نظریه در باره برآورد های نا اریب

شهرام یعقوب زاده شهرستانی*
گروه آمار دانشگاه پیام نور مرکز صومعه سرا

چکیده

در این مقاله نشان می دهیم که برای پارامتری خاص در چند توزیعی که انتخاب می کنیم برآوردگر نا اریبی وجود ندارد. این حقیقت را ابتدا برای خانواده ای از توزیع های نرمال و سپس برای خانواده توزیع های نمایی یک پارامتری ثابت می کنیم. البته در صورت وجود برآورد گر نااریب، ثابت می کنیم که آن برآوردگر تابعی از آماره های مرتب است.

کلمات کلیدی: خانواده نرمال، برآوردگر نااریب، برآورد پذیر نا اریب، خا نواده نمایی، آماره های مرتب.

۱ مقدمه

اگر X_1، X_2،...، X_k متغیرهای تصادفی با مقادیر مرتب شده $X_1 \geq X_2 \geq \ldots \geq X_k$ فرض شوند، به طوری که X_i دارای توزیعی با چگالی معلوم $f(x \mid \theta_i),(1 \leq i \leq k)$ که θ_i نامعلوم است، باشند و توزیع متناظر با پارامتر $\theta_{\max} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ را بهترین توزیع بنامیم، آن گاه در بخش های دوم وسوم این مقاله، به ترتیب در خانواده ای از توزیع نرمال و خا نواده توزیع های نمایی یك پارامتری ثابت می کنیم برآورد نااریب θ_I، پارامتر بهترین توزیع انتخابی از بین توزیع های X_1، X_2، ...، X_k که به صورت زیر تعریف می شود، وجود ندارد. همچنین در بخش چهارم این مقاله، به خاصیتی از برآوردگر UMVUE، θ_I اشاره می کنیم.

$$\theta_I = \sum_{i=1}^{k} \theta_i I(X_i > X_{(1)i}) \tag{۱}$$

به طوری که $X_{(1)i} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_k)$.

با فرض $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ و $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$، θ_i را برآورد پذیر نا اریب (UBE) گویند، اگر برآوردگری ما نند U(X) وجود داشته باشد، به طوری که

$$E_\theta(U(X)) = E_\theta(\theta_I) \quad ,\forall \theta$$

درغیراین صورت θ_i را NUBE گویند.

* عهده دار مکاتبات

۲ توزیع های نرمال

لـــم ۱ اگـــر X دارای توزیـــع $N(\mu,1)$ باشـــد، آن گـــاه $\phi(\mu)$ و $\mu\Phi(\mu)$، NUBE هـــستند.($\phi(.)$ چگـــالی و $\Phi(.)$ تابع توزیع وچگالی متغیرنرمال استا ندارد هستند)

اثبات: فرض کنید $\phi(\mu)$، UBE باشد، یعنی تابعی از X ما نند h(X) وجود دارد، به طوری که

$$E_{\mu}[h(X)] = \phi(\mu) \quad ,\forall\mu$$

از طرفی به ازای هر μ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\mu x}dx = 1$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه فوق نسبت به μ نتیجه می گیریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xh(x)e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\mu x}dx = 0 \Rightarrow E(Xh(X)) = 0 \quad ,\forall\mu$$

چون خانواده $\{N(\mu,1) \mid \mu \in R\}$ کامل است، پس Xh(x)=0. اما از طرفی به ازای هر μ ، $P_{\mu}(X=0)=0$ می باشد، پس باید h(X)=0 باشد که به تناقص بر می خوریم. درنتیجه $\phi(\mu)$، NUBE است. ازطرفی

$$E_{\mu}(yI(y>0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}(y-\mu)^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\mu}^{\infty}(t+\mu)e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = -\int_{-\mu}^{\infty}\phi'(t)dt$$

$$+\mu\int_{-\mu}^{\infty}\phi(t)dt = \phi(-\mu)+\mu(1-\Phi(-\mu)) = \phi(\mu)+\mu\Phi(\mu)$$

یعنی آن که H(y)=yI(y>0) یک UBE برای $g(\mu)=\phi(\mu)+\mu\Phi(\mu)$ است ازطرفی باتوجه به قسمت (الف) چون $\phi(\mu)$، NUBE است، باید $\mu\Phi(\mu)$، NUBE باشد.

قـضیه ۱ اگـر X_1 و X_2 دو متغیـر تـصادفی مـستقل بـا مقادیرمرتـب شـده $X_1 \geq X_2$ باشـند، بـه طـوری کـه $X_i \sim N(\theta_i,1)$، آنگاه θ_I میانگین توزیع انتخابی متناظر با $X_{(i)}$، NUBE است.

اثبات:

$$\theta_I = \theta_1 I(X_1 \geq X_2) + \theta_2 I(X_1 < X_2) = \theta_2 + (\theta_1 - \theta_2)I(X_1 \geq X_2)$$

با فرض $Y = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(\eta,1)$ و $\eta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2}}$ بازای هر $\theta = (\theta_1,\theta_2)$

داریم:

$$E_{\theta}(\theta_I) = \theta_2 + \sqrt{2}P_{\theta}(y>0) = \theta_2 + \sqrt{2}\eta\Phi(\eta)$$

بنابراین θ_I NUBE است.

۳ خانوده توزیع های نمایی یک پارامتری

فرض کنید متغیرتصاد فی X دارای توزیع با چگالی زیر باشد

$$f(x \mid \theta) = \beta(\theta) t(x) e^{-\theta r(x)} \quad , x \in (a,b) \quad , \theta \in \Omega \subset R \tag{۲}$$

که

$$r(x) \neq 0 \quad , \beta(\theta) > 0 \quad , t(x) > 0$$

وبه ازای هر $c \in (a,b)$ فرض کنید

$$R(c,\theta) = \int_c^b t(x) e^{-\theta r(x)} dx \tag{۳}$$

که به ازای هر $\theta \in \Omega$، $R(c,\theta) > 0$ می شود.

لم ۲ اگر X_1 و X_2 دومتغیر تصادفی مستقل وبازای هر $x \in (a,b)$، X_i دارای توزیع $f(x_i \mid \theta_i)$ باشند. با فرض $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ وبرقراری شرایط لم ۱، $\theta_1 P_\theta(X_1 > X_2)$، NUBE است اگر وفقط اگر بازای هر $c \in (a,b)$، $\theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > c)$، NUBE باشد.

اثبات: ابتدا فرض می کنیم $\theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > c)$، NUBE است. ثابت می کنیم $\theta_1 P_\theta(X_1 > X_2)$، NUBE است. فرض کنید این طورنباشد، پس تابعی چون $T(X_1, X_2)$ وجود دارد، به طوری که

$$\begin{aligned} &E_\theta(T(X_1,X_2)) = \theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > X_2) \quad , \forall \theta \\ &\Rightarrow E_\theta^{X_2}\{E_\theta^{X_1|X_2}\{[T(X_1,X_2) - \theta_1 I(X_1 > X_2)] \mid X_2\}\} = 0 \quad , \forall \theta \end{aligned} \tag{۴}$$

چون X_1 و X_2 مستقل و X_2 کامل ا ست، با توجه به رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned} &E_\theta^{X_1|X_2}(T(X_1,X_2) \mid X_2) = \theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > X_2) \\ &\Rightarrow E_\theta^{X_1}(T(X_1,c)) = \theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > c) \quad , \forall c \in (a,b), \forall \theta \end{aligned}$$

یعنی آن که $\theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > c)$، UBE ا ست که متناقص با لم ۲ است، پس NUBE است. اکنون فرض کنید $\theta_1 P_\theta(X_1 > X_2)$، NUBE وتابع $\theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > c)$، UBE است.پس تابعی ما نند $T(X_1, c)$ وجود دارد، به طوری که

$$E_{\theta_1}(T(X_1,c)) = \theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > c) \quad , \forall \theta_1, \forall c \in (a,b)$$

می دانیم که

$$\begin{aligned} &E_{\theta_1}^{X_1|X_2=c}(T(X_1,X_2) \mid X_2 = c) = \theta_1 E_\theta^{X_1|X_2=c}(I(X_1 > X_2) \mid X_2 = c) \quad , \forall c, \forall \theta \\ &\Rightarrow E_\theta^{X_1|X_2}(T(X_1,X_2) \mid X_2) = \theta_1 E_\theta^{X_1|X_2}(I(X_1 > X_2) \mid X_2 = c) \quad , \forall c, \forall \theta \end{aligned} \tag{۵}$$

باگرفتن امید ریاضی نسبت به X_2 ا زطرفین را بطه (۵) داریم:

$$E_\theta(T(X_1,X_2)) = \theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > X_2) \quad ,\forall\theta$$

که متناقص با فرض است، درنتیجه $\theta_1 P_{\theta_1}(X_1 > c)$، NUBE ا ست.

قـضیه ۲ اگـر X_i دارای توزیـع تعریـف شـده دررا بطـه (۲) وشـرایط لـم ۲ برقراراباشـد، آنگـاه بـا فـرض $\theta = (\theta_1,\theta_2)$، پارامترتوزیع انتخابی، یعنی

$$\theta_I = \theta_1 P_\theta(X_1 > X_2) + \theta_2 \forall\theta P_\theta(X_2 > X_1)$$

NUBE است.

اثبات: چون $E_\theta(\theta_I) = \theta_1 P_\theta(X_1 > X_2) + \theta_2 \forall\theta P_\theta(X_2 > X_1)$ در $\theta = (\theta_1,\theta_2)$ متقارن اسـت، پـس تا بع UBE آن درصورت وجود، تابعی براساس $X_{(1)}$ و $X_{(2)}$ و متقا رن در $(X_{(1)},X_{(2)})$ خواهـد بـود. اکنـون ثابت می کنیم θ_I، UBE است اگر و فقط اگر $\theta_1 P_\theta(X_1 > X_2)$،UBE باشد. فـرض کنیـد $T(X_{(1)},X_{(2)})$ برآورد گر نا اریب θ_I باشد، پس داریم:

$$E_\theta(T(X_{(1)},X_{(2)})) = \theta_1 E_\theta(I(X_1 > X_2)) + \theta_2 E_\theta(I(X_2 > X_1)),\forall\theta \tag{۶}$$

$$E_\theta\{(T(X_1,X_2)-\theta_1)I(X_1 > X_2)\} + \theta_2 E_\theta\{(T(X_1,X_2)-\theta_2)I(X_2 > X_1)) = 0,\forall\theta \tag{۷}$$

اکنون فرض کنید

$$E_\theta\{(T(X_1,X_2)-\theta_1)I(X_1 > X_2)\} > 0 \tag{۸}$$

درنتیجه با توجه به خا صیت تقارنی، پس

$$E_\theta\{(T(X_2,X_1)-\theta_2)I(X_2 > X_1)\} > 0 \tag{۹}$$

اما مجموع روابط ۸ و۹ متناقص با رابطه (۷) می باشد، پس $\theta_1 P_\theta(X_1 > X_2)$ و $\theta_2 P_\theta(X_2 > X_1)$، UBE هستند. اکنون فرض می کنیم $\theta_1 P_\theta(X_1 > X_2)$، UBE است، پس $\theta_2 P_\theta(X_2 > X_1)$ودر نهایت θ_I، UBE می شود.

اکنون کاربرد قضیه ۲ را در چند مثال زیرکه در آنها θ، مثبت وحقیقی است، نشان می دهیم.

مثال ۱ (توزیع های نمایی) فرض کنیـد $f(x \mid \theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0$. درا یـن حالـت بـا فـرض r (x)=x و $A(c,\theta) = e^{c\theta}$ داریم:

$$A'(c,\theta) - A(c,\theta)r(x) = e^{c\theta}(c-\theta) = g_1(\theta,c)g_2(x,c)$$

بنابراین چون شرایط لم ۱ برقرار است، با استفاده ازقضیه ۲ نتیجه می گیریم پارامتر θ_I از توزیع نمایی انتخابی، NUBE است.

مثال ۲ (توزیع های پارا تو) فرض کنید $f(x \mid \theta) = \theta d^{\theta} x^{-(\theta+1)}, x \geq d > 0$ و d معلوم است. دراین حالت با فرض $r(x) = \ln(x)$ و $t(x) = x^{-1}$ و $\beta(\theta) = \theta d^{\theta}$
$A(c,\theta) = c^{\theta}$ داریم:

$$A'(c,\theta) - A(c,\theta) r(x) = c^{\theta} \ln(\frac{c}{\theta})$$

بنابراین چون شرایط لم ۲ برقرار است، با استفا ده از قضیه۲ نتیجه می گیریم پارامتر θ_I از توزیع پارتو انتخابی، NUBE است.

مثال ۳ (توزیع های وایبول) فرض کنید به ازای p معلوم ومثبت چگالی X به صورت $f(x \mid \theta) = px^{p-1}e^{-\theta x^{p}}, x > 0$ باشد. با فرض $A(c,\theta) = e^{\theta c^{p}}$ و $r(x) = x^{p}$ و $t(x) = px^{p-1}$ داریم:

$$t(x) = px^{p-1}A'(c,\theta) - A(c,\theta) r(x) = e^{-\theta c^{p}}(c^{\theta} - c^{p})$$

بنابراین چون شرایط لم ۲ برقرار است، با استفاده از قضیه ۲ نتیجه می گیریم پارامتر θ_I از توزیع وایبول انتخابی، NUBE است.

٤ یک خاصیت برآوردگرهای UMVUE

در این بخش خانواده توزیع های پیوسته یک پارامتری را در نظر می گیریم و می خواهیم یک ویژگی در باره برآوردگرهای UMVUE را بیان کنیم.

فرض کنید y_i آماره بسنده $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$ براساس یک نمونه به حجم n است،به طوری که مشاهده iام دارای چگالی $f(x \mid \theta_i)$ می باشد. اگر θ_I پارامترتوزیع $y_{(1)} = \max\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ باشد، بافرض $\alpha_i = \theta_i^{-1}$ برآوردگر نا اریب α_I برای خانواده نمایی یک پارامتری وجوددارد. (دشپاند وفرید [1] (۱۹۹۵)) و می توان آن را به روش U-V (رابینس [2] (۱۹۸۸)) به دست آورد.

قضیه ۳ اگر $h(\theta_I) = \sum_{j=1}^{k} h(\theta_i) P_{\theta}(y_j = y_{(1)})$ بطوری که h تابع غیرثابت باشد، آن گاه برآوردگر UMVUE آن درصورت وجود، تابعی ازآماره های مرتب $y_{(1)} \geq y_{(2)} \geq ... \geq y_{(k)}$ ومتقارن در مشاهدات y_1، y_2، ...، y_k است.

اثبات: فرض کنید $y_{(1)j} = \max\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ و $g_j = P_{\theta}(y_j > y_{(1)j})$ و $T = T(y_1, y_2, ..., y_k)$ برآوردگر UMVUE ، $h(\theta_I)$ باشد، بنابراین داریم:

$$E_\theta[T(y_1,y_2,...,y_k)] = E_\theta[h(\theta_I)] = \sum_{j=1}^{k} h(\theta_i) g_j(\theta) = A(\theta_1,\theta_2,..,\theta_k)$$

اگر $g_1(\theta) = g_1(\theta_1,\theta_2,..,\theta_k) = P_\theta(y_1 > y_{(1)1})$ باشد، پس $g_r(\theta)$ $(2 \le r \le k)$ را می توان از $g_1(\theta)$ با تعویض θ_r با θ_1 به دست آورد. بنابراین به ازای هرجایگشت $(i_1,i_2,...,i_k)$ از مجموعه اعداد {1,2,…,k} داریم:

$$A(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) = A(\theta_{i_1},\theta_{i_2},...,\theta_{i_k}) \qquad (۱۰)$$

اگر $\{y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_k}\}$ یک جایگشت از y_i ها باشد، آن گاه با توجه به خاصیت استقلال y_i ها و رابطه (۱-۳) نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned} &E_\theta[T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})] = A(\theta_{i_1},\theta_{i_2},...,\theta_{i_k}) = A(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) \\ &= E_\theta[T(y_1,y_2,...,y_k)] \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

حال فرض کنید $T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})$ برآوردگر UMVUE $A(\theta_{i_1},\theta_{i_2},...,\theta_{i_k})$ باشد، پس با توجه به خاصیت یکتایی برآوردگرهای UMVUE ها داریم:

$$V_\theta[T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})] = V_\theta[T(y_1,y_2,...,y_k)] \qquad (۱۲)$$

همچنین نتیجه می گیریم:

$$E_\theta[T^2(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})] = E_\theta[T^2(y_1,y_2,...,y_k)]$$

و برای هر دوجایگشت متفاوت $(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})$ و $(y_{j_1},y_{j_2},...,y_{j_k})$ و با فرض $V_\theta[T(y_1,y_2,...,y_k)] = V(\theta)$ داریم:

$$\begin{aligned} &COV(T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k}),T(y_{j_1},y_{j_2},...,y_{j_k})) = V_\theta[T(y_1,y_2,...,y_k)] \\ &= V(\theta) \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

اگر فرض کنیم $T^* = \frac{1}{k!}\sum_{(i_1,i_2,...,i_k)} T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})$ آن گاه:

$$\begin{aligned} V(T^*) &= \frac{1}{(k!)^2}\{\sum_{(i_1,i_2,...,i_k)} V_\theta(T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})) + \\ &\sum_{(i_1,i_2,...,i_k)}\sum_{(j_1,j_2,...,j_k)} COV(T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k}),T(y_{j_1},y_{j_2},...,y_{j_k}))\} \\ &= \frac{1}{(k!)^2}\{k! + k!(k!-1)\}V(\theta) = V(\theta) \end{aligned}$$

که متناقص با رابطه (۱۲) است، مگر آن که $T^{*}=T$ باشد، یعنی به ازای هر جایگشت $(i_1,i_2,...,i_k)$ داریم:

$$T(y_{i_1},y_{i_2},...,y_{i_k})=T(y_1,y_2,...,y_k)$$

مثال ۳: فرض کنید y_i ماکزیمم n مشاهده از توزیع $U(0,\theta_i)$ و $y_{(1)}\geq y_{(2)}\geq ...\geq y_{(k)}$ مقادیر مرتب شده y_i ها باشد. اگرتوزیع $y_{(1)}$ انتخاب شده و θ_I پارامتر توزیع انتخاب شده باشد، برآوردگر UMVUE، θ_I به صورت زیراست که در y_1، y_2، ...، y_k متقارن است.(ولایسمی [1]، کامر [2]، شرما [3] (۱۹۸۸)).

$$K(Y)=\frac{y_{(1)}}{n}[(n+1)-(\frac{y_{(2)}}{y_{(1)}})^n]$$

۵ نتیجه گیری

اگر X_1، X_2، ...، X_k، k مشاهده باشند، به طوری که هر X_i دارای توزیعی معلوم از یک خانواده باشد و از بین توزیع های مقادیر مرتب شده X_i ها بهترین توزیع انتخاب نموده و θ_I پارامتر توزیع انتخابی باشد، آن گاه برآورد گر نااریب θ_I درصورت وجود تابعی از آماره های مرتب X_i ها خواهد بود.

منابع

[1] Cohen, A. and Sackrowitz, H. (1989), Two-stage conditionally unbiased estimators of the selected normal means. Statist. Probab.Lett., 8, 273 – 273

[2] Deshpande, J.V. and Fareed, T.P.M. (1995), A note on conditionally unbiased after selection. Statist. Probab, Lett., 22,17 – 23.

[3] Kumar, S. and Gangopadhyay, A. K. (2005), Estimating the parameters of the selected Pareto population, Statist. Math., 2 121 – 130.

[4] Vellaisamy, P. (1993), On UMVUE estimation following selection, Comn. Statist.-Theory Methods, 22, 1031- 1043.

[5] Vellaisamy, P. (2003), Quantile estimation of the selected scale parameters, J. Statist. Plan. Inference, 115, 461- 470.

[6] Vellaisamy, P. and Iain, S. (2008). Estimating the parameter of the population selected from discrete exponential family, Statist. Probab. Lett., 78, 1076 – 1087.

[7] Robbins, H. (1988), The (U-V) method of estimation. Statististical Decision Theory and related Topics – IV , Vol, 1, Eds; S.S. Gupta and J.,O. Berger, Springer – Verlag, New York, 265- 270.

[8] Eaton, M.L (1967), Some optimum properties of ranking procedures, Ann. Math. Statist., 38, 124-137.

[9] Casella, G. and Berger, R.L. (2002), Statistical Inference. Second edition, Wadsworth & Brooks, California.

[10] Sill, M. W. and Sampson, A. R.(2007), Extension of two-stage Conditionally unbiased estimator of the selection population to the bivariete normal case. Comm.