سری های توانی با ضرایب تابعی و کار برد آن در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و با شرایط اولیه

علی خوش کنار [*]، محمود سعیدی ، موسی ایلی
گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت

چکیده
در این مقاله سری های توانی با ضرایب تابعی معرفی و مطالبی در مورد همگرایی و مشتق گیری از آن ها بیان شده و کاربرد این نوع سری ها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و با شرایط اولیه، مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: سری های توانی، همگرایی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، شرایط اولیه.

۱ مقدمه
سری های توانی معمولی (با ضرایب عددی) حالت خاصی از سری های توابع هستند که روی زیر مجموعه های معینی از $\mathbf{R}$ به نام بازه ی همگرایی تعریف شده اند. از لحاظ ظاهری یک سری توانی با ضرایب تابعی همانند یک سری توانی معمولی است با این تفاوت که به جای ضرایب عددی، توابع قرار گرفته اند. این سری ها نیز حالت خاصی از سری های توابع هستند و اگرضرایب روی یک زیر مجموعه ی $\mathbf{R}^n$ تعریف شده باشند بررسی همگرایی آن ها نیز روی یک زیر مجموعه معینی از $\mathbf{R}^{n+1}$صورت می گیرد. در این مقاله فرض می کنیم $n=1$.

همان طور که می دانیم یکی از کاربردهای سری های توانی معمولی، حل دسته ای از معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه است. مشابه چنین کاربردی برای سری های توانی با ضرایب تابعی نیز وجود دارد. در واقع از این گونه سری ها برای حل برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و با شرایط اولیه استفاده می کنیم.

۲ سری های توانی با ضرایب تابعی
در این بخش به معرفی و بررسی وضعیت همگرایی سری های توانی و همچنین شرایطی را که تحت آن می توان از این سری ها نسبت به متغیرها مشتق گیری نمود، می پردازیم.

[*]عهدار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: a.khoshkenar@iaurasht.ac.ir

۲-۱ تعریف

اگر E و F زیرمجموعه هایی از $\mathbf{R}$ و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع حقیقی روی E باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n$ را یک سری تابعی روی $U = E\times F$ می نامیم.

۲ـ۲ قضیه های مهم

۲-۲-۱ قضیه (مشتق و همگرایی یک شکل)

اگر $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع مشتق پذیر روی $[a,b]$ باشد به طوری که $\{f_n'\}$ بر $[a,b]$ همگرای یک شکل و به ازای نقطه ای مانند x_0 متعلق به $[a,b]$ دنباله $\{f_n(x_0)\}$ همگرا باشد آن گاه $\{f_n\}$ روی $[a,b]$ همگرای یک شکل به تابعی مانند f است که این تابع بر $[a,b]$ مشتق پذیر است و برای هر $x\in[a,b]$، $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

اثبات: به [۱] مراجعه کنید.

۲ـ۲ـ۲ قضیه (مشتق گیری از یک سری توانی با ضرایب تابعی)

فرض کنیم E و F زیرمجموعه های بازی در $\mathbf{R}$ باشند. قرار می دهیم $U = E\times F$ و فرض می کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع حقیقی روی E باشد که مشتق مرتبه دوم تمامی جملات آن موجود و پیوسته اند و همچنین فرض می کنیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, t^n$ نیز روی U همگرای نقطه ای باشد. در این صورت:

الف) برای هر $x\in E$ و هر $t\in F$،
$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x)\, t^{n-1}$$
و
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, t^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) f_n(x)\, t^{n-2}.$$

ب) اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)\, t^n$ روی U همگرای نقطه ای و سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n''(x)\, t^n$ روی U نسبت به x همگرای یک شکل باشد، آن گاه برای هر $x\in E$ و هر $t\in F$ ،

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)t^n \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n''(x)t^n.$$

اثبات: فرض می کنیم $x_0\in E$ و $t_0\in F$.

الف) چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)t^n$ روی مجموعه باز F همگراست پس روی F نسبت به متغیر t از هر مرتبه مشتق پذیر است. بنابراین مشتق های آن از هر مرتبه در نقطه t_0 موجودند و

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n\right)\Bigg|_{(x_0,t_0)} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)t^n\right)\Bigg|_{t=t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} nf_n(x_0)t_0^{\,n-1}$$

همچنین

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n\right)\Bigg|_{(x_0,t_0)} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)t^n\right)\Bigg|_{t=t_0} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)f_n(x_0)t_0^{\,n-2} \quad .$$

ب) چون E و F مجموعه های باز هستند پس یک عدد حقیقی و مثبت مانند r وجود دارد که $[x_0-r,x_0+r]\subseteq E$ و $[t_0-r,t_0+r]\subseteq F$. قرار می دهیم $p_0=(x_0,t_0)$ و داریم $[x_0-r,x_0+r]\times[t_0-r,t_0+r]\subseteq U$. اکنون دنباله های توابع $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$، $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ و همچنین تابع های حقیقی F ، G و H را روی $[x_0-r,x_0+r]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i(x)t_0^{\,i}\ ،\ G_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i'(x)t_0^{\,i}\ ،\ H_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i''(x)t_0^{\,i}\ ،F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t_0^{\,n}\ ،$$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)t_0^{\,n} \text{ و } H(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n''(x)t_0^{\,n}\ .$$

داریم که $G_n'(x)=H_n(x)$ و $G(x)=\lim_{n\to\infty}G_n(x)$.

چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n''(x)t_0^{\,n}$ روی U نسبت به x همگرای یک شکل است پس برای هر $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند N وابسته به ε و t_0 (مستقل از x) وجود دارد که برای هر $x\in[x_0-r,x_0+r]$ و هر $n\geq N$، $\left|H_n(x)-H(x)\right|=\left|\sum_{i=0}^{n} f_n''(x)t_0^{\,n}-\sum_{n=0}^{\infty} f_n''(x)t_0^{\,n}\right|<\varepsilon$.

بنابراین $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $[x_0-r,x_0+r]$ همگرای یک شکل به H است، پس بنابه قضیه (۲-۲-۱)، $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $[x_0-r,x_0+r]$ همگرای یک شکل به G است و برای هر $x\in[x_0-r,x_0+r]$، G' موجود است به ویژه در x_0 . در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)t^n\right)\Bigg|_{(x_0,t_0)} = \frac{d}{dx}\big(G(x)\big)\Big|_{x=x_0} = \lim_{n\to\infty} H_n(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0)t_0^{\,n}$$

چون $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $[x_0-r,x_0+r]$ همگرای یک شکل به G است و $F_n'(x)=G_n(x)$ و $F(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x)$، پس قضیه (۲-۲-۱)، همگرایی یک شکل $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ به F را روی $[x_0-r,x_0+r]$ ایجاب می کند. بنابراین F درهر نقطه از $[x_0-r,x_0+r]$ مشتق پذیر است به ویژه در x_0 . درنتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n\right)\Bigg|_{(x_0,t_0)} = \frac{d}{dx}\big(F(x)\big)\Big|_{x=x_0} = \lim_{n\to\infty} G_n(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x_0){t_0}^n \quad .$$

۲-۲-۳ قضیه $\{f_n\}$ روی U همگرای یک شکل به تابع f است اگر وتنها اگر $\{f_n\}$ روی U یک دنباله کوشی یک شکل باشد.

اثبات) به [۱] مراجعه کنید.

۲-۲-٤ قضیه فرض کنیم Eو Fزیرمجموعه هایی از $\mathbf{R}$ و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع حقیقی روی E باشد. اگر $\{a_n\}$ دنباله ای ازاعداد حقیقی نامنفی باشد که برای هر $x\in E$و هر $n\in \mathbf{N}$، $|f_n(x)|\le a_n$ و سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ روی F همگرای مطلق باشد آن گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n$ نسبت به x همگرای یک شکل است.

اثبات) چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ روی F همگرای مطلق است پس برای هر $t\in F$ و هر $\varepsilon>0$، عددی طبیعی مانند N وابسته به t و ε هست که برای هر $N\le n<m$، $\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,|t|^k<\varepsilon$. در نتیجه برای هر $t\in F$ و هر $\varepsilon>0$، عددی طبیعی مانند N وابسته به t و ε هست که برای هر $x\in E$ و برای هر $N\le n<m$، $\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)t^k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} a_k\,|t|^k<\varepsilon$. بنابراین سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n$ روی U نسبت به x همگرای یک شکل است.

۳ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به کمک سری های توانی با ضرایب تابعی

در این قسمت فرض می کنیم Eزیرمجموعه ی بازی از اعداد حقیقی و u تابعی حقیقی روی $U=E\times\mathbf{R}$ باشد که مشتقات جزیی مرتبه اول و دوم آن نسبت به x و t موجود و پیوسته اند.

۳-۱ معادله گرما $u_t=c^2u_{xx}$

معادله گرما $u_t=c^2u_{xx}$ را که c یک عدد حقیقی مثبت است با شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$ در نظر می گیریم. اگر مشتق تابع حقیقی f از هر مرتبه روی E موجود و پیوسته و دنباله ی توابع $\{f^{(n)}\}$روی E کراندار یک شکل باشد آن گاه معادله گرما، جوابی یکتا به صورت $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ دارد که:

الف) در شرط اولیه صدق می کند.

ب) روی U همگرای نقطه ای است.

پ) روی U نسبت به x همگرای یک شکل است.

اثبات) فرض می کنیم $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ و با جای گذاری در معادله داریم که،

$$.\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)u_{n+1}(x)t^n = c^2\sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)t^n$$

بنابراین به ازای هر $n \ge 0$، $(n+1)u_{n+1}(x) = c^2 u_n''(x)$. با توجه به شرط اولیه، $u_0(x) = f(x)$ و با استقراء ریاضی می توان نشان داد که برای هر $1 \le n$، $u_n(x) = \frac{c^{2n}}{n!} f^{(2n)}(x)$. **این فرمول ها سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ را به طور منحصر بفرد مشخص می کنند.**

اکنون اعتبار مشتق گیری از سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ را روی U نسبت به متغیرهای x و t و همچنین همگرایی آن را بررسی می کنیم. چون دنباله ی توابع $\{f^{(n)}\}$ روی E کراندار یک شکل است پس عددی مثبت مانند M وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E$ و هر $n \ge 0$، $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$. اگر دنباله عددی $\{a_n\}$ را به صورت $a_n = \frac{M}{n!}c^{2n}$ تعریف کنیم، آن گاه برای هر $x \in E$ و هر $n \ge 1$، داریم که $0 \le a_n$، $\left|u_n(x)\right| \le a_n$ و $\left|u_n'(x)\right| \le a_n$. بنابراین برای هر $(x,t) \in U$، و هر $n \ge 1$، $\left|u_n(x)t^n\right| \le a_n |t|^n$ و $\left|u_n'(x)t^n\right| \le a_n |t|^n$. چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |t|^n = M\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{2n}}{n!}|t|^n$، در نتیجه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ روی **R** همگرای مطلق است، پس همگراست. بنابراین سری های $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)t^n$ روی U همگرای نقطه ای هستند و همچنین بنابه قضیه (۲-۲-۴)، نسبت x به همگرای یک شکل اند. پس قضیه (۲-۲-۲)، ایجاب می کند که فرمول های زیر برقرارند.

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n(x)t^{n-1} \text{ ، } \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)t^n$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)t^n \quad .$$

مثال ۳-۱-۱ اگر فرض کنیم E زیرمجموعه ی باز و کرانداری در **R** باشد آن گاه معادله گرما $u_t = c^2 u_{xx}$ با شرط اولیه $u(x,0) = -x^2$ جوابی یکتا به صورت $u(x,t) = -x^2 - 2c^2 t$ روی $U = E \times \mathbf{R}$ دارد.

۳-۲ معادله موج یک بعدی $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

هرگاه مشتق توابع f و g از هر مرتبه روی E موجود و پیوسته و دنباله ی توابع $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ روی E کراندار یک شکل باشند آن گاه معادله موج یک بعدی $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ با شرایط اولیه $u(x,0) = f(x)$ و $u_t(x,0) = g(x)$ جوابی یکتا به صورت $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ دارد که:

الف) در شرایط اولیه صدق می کند.

ب) روی U همگرای نقطه ای است. پ) روی U نسبت به x همگرای یک شکل است.

اثبات) اگرفرض کنیم $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$ آن گاه با قرار دادن آن در معادله موج داریم که $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)u_{n+2}(x)t^n = c^2\sum_{n=0}^{\infty}u''_n(x)t^n$.

بنابراین به ازای هر $n\geq 0$، $(n+1)(n+1)u_{n+2}(x)=c^2u''_n(x)$. بنابه شرایط اولیه، $u_0(x)=f(x)$ و $u_1(x)=g(x)$ و با استقراء ریاضی می توان نشان داد که برای هر $n\geq 1$، $u_{2n}(x)=\frac{c^{2n}}{(2n)!}f^{(2n)}(x)$ و $u_{2n+1}(x)=\frac{c^{2n}}{(2n+1)!}g^{(2n)}(x)$. این فرمول ها سری $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$ را به طور منحصر بفرد مشخص می کنند.

حال مجاز بودن مشتق گیری از سری $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$، نسبت به متغیرهای x و t و همچنین همگرایی آن را ثابت می کنیم. با توجه به کرانداری یک شکل دنباله های توابع $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ روی E، عددی مثبت مانند M وجود دارد به طوری که برای هر $x\in E$ و هر $n\geq 0$، $\left|f^{(2n)}(x)\right|\leq M$ و $\left|g^{(2n)}(x)\right|\leq M$.

اگر دنباله عددی $\{a_n\}$ را به صورت

$$a_n=\begin{cases}\frac{c^n}{n!}M & n=0,2,4,\ldots\\ \frac{c^{n-1}}{n!}M & n=1,3,5,\ldots\end{cases}$$

تعریف کنیم. آن گاه برای هر $x\in E$ و هر $n\geq 0$، داریم که $0\leq a_n$، $|u_n(x)|\leq a_n$، $|u'_n(x)|\leq a_n$ و $|u''_n(x)|\leq a_n$. بنابراین برای هر $(x,t)\in U$ و هر $n\geq 0$، $|u_n(x)t^n|\leq a_n|t|^n$، $|u'_n(x)t^n|\leq a_n|t|^n$ و $|u''_n(x)t^n|\leq a_n|t|^n$. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n|t|^n$ به ازای هر مقدار t همگراست پس سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ روی $\mathbf{R}$ همگرای مطلق است، در نتیجه همگراست. بنابراین سری های $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$، $\sum_{n=0}^{\infty}u'_n(x)t^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}u''_n(x)t^n$ روی U همگرای نقطه ای هستند و همچنین بنابه قضیه (۲-۲-۴)، نسبت به x همگرای یک شکل اند. پس بنا به قضیه (۲-۲-۲)، فرمول های مشتق گیری از $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$ نسبت به x و t برقرارند.

مثال۳-۲-۱ معادله موج یک بعدی را با شرایط اولیه $u(x,0)=\sin(x)$ و $u_t(x,0)=\cos(x)$ درنظر می گیریم که $x\in E=\mathbf{R}$. در این حالت تمام جملات دنباله های $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ توابعی به صورت $\pm\sin(x)$ یا $\pm\cos(x)$ هستند. بنابراین، این دنباله ها روی E کراندار یک شکل اند. درنتیجه $u(x,t)=\sin(x)+\cos(x)t+\frac{(-1)c^2}{2!}\sin(x)t^2+\frac{(-1)c^2}{3!}\cos(x)t^3+\cdots$. این جواب روی $U=E\times\mathbf{R}$ همگرای نقطه ای و نسبت به x همگرای یک شکل است و می توانیم آن را به صورت $u(x,t)=\sin(x)\cos(ct)+\cos(x)\frac{\sin(ct)}{c}$ بنویسیم.

۳-۳ معادله تریکومی $tu_{xx}+u_{tt}=0$

این معادله با شرایط اولیه $u(x,0)=f(x)$ و $u_t(x,0)=g(x)$ جوابی به صورت $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$ دارد که $u_0(x)=f(x)$ ، $u_1(x)=g(x)$ و

$$u_{2n+2}=0 \qquad n=0,1,2,3,...$$

$$u_{3n}=\frac{(-1)^n}{2\times3\times5\times6\times...\times(3n-1)\times(3n)}f^{(2n)}(x) \qquad n=1,2,3,...$$

$$u_{3n+1}=\frac{(-1)^n}{3\times4\times6\times7\times...\times(3n)\times(3n+1)}g^{(2n)}(x) \qquad n=1,2,3,...$$

بنابراین

$$u(x,t)=\left(f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\times3\times5\times6\times...\times(3n-1)\times(3n)}f^{(2n)}(x)t^{3n}\right)$$
$$+\left(g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\times4\times6\times7\times...\times(3n)\times(3n+1)}g^{(2n)}(x)t^{3n+1}\right)$$

چون سری های

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\times3\times5\times6\times...\times(3n-1)\times(3n)}t^{3n} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\times4\times6\times7\times...\times(3n)\times(3n+1)}t^{3n+1}$$

روی **R** همگرای مطلق اند پس همگرا هستند. حال اگر دنباله های توابع $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ روی E کراندار یک شکل باشند، آن گاه هر یک از سری های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\times3\times5\times6\times...\times(3n-1)\times(3n)}f^{(2n)}(x)t^{3n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\times4\times6\times7\times...\times(3n)\times(3n+1)}g^{(2n)}(x)t^{3n+1}$ روی U همگرای نقطه ای و نسبت به x همگرای یک شکل هستند. بنابراین سری

$$u(x,t)=\left(f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\times3\times5\times6\times...\times(3n-1)\times(3n)}f^{(2n)}(x)t^{3n}\right)$$
$$+\left(g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\times4\times6\times7\times...\times(3n)\times(3n+1)}g^{(2n)}(x)t^{3n+1}\right)$$

نیز چنین است.

مثال۳-۳-۱ اگر $u(x,0)=\sin(x)$ و $u_t(x,0)=\cos(x)$ آن گاه معادله تریکومی روی $U=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ جوابی به صورت زیر دارد.

$$u(x,t)=\sin(x)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\times3\times5\times6\times...\times(3n-1)\times(3n)}t^{3n}\right)$$
$$+\cos(x)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\times4\times6\times7\times...\times(3n)\times(3n+1)}t^{3n+1}\right)$$

٤ نتیجه گیری

کاری که در این مقاله انجام شد معرفی سری های توانی با ضرایب تابعی و استفاده از آن ها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بود. در واقع با اثبات چند قضیه جالب در خصوص همگرایی و مشتق گیری از این سری ها توانستیم معادلات مهمی را به روش سری های توانی حل کنیم و دیدیم که جواب ها ی به دست آمده به شرایط اولیه بستگی دارند.

یکی از مزیت های مهم این روش سهولت محاسبه جواب ها برای معادلات مورد بحث است که نیازی به انتگرال گیری ندارند ولی نسبت به روش های حل کلاسیک، دامنه عمل کمتری دارد. این روش بیشتر برای معادلات با ضرایب ثابت به کار گرفته شد اما همان طور که دیدیم برای معادلات با ضرایب غیر ثابت نیز قابل استفاده است.

نکته دیگر این که، در معادلاتی که مورد بحث قرار دادیم متغیر x در تابع u، یک بعدی بود. ما می توانیم تعاریف و قضیه ها را برای حالتی که x یک متغیر چند بعدی است تعمیم دهیم و به کمک آن معادلات چند بعدی (در حالت کلی n بعدی) از جمله گرما، موج و لاپلاس را حل کنیم. حتی در مورد معادلات غیر خطی نیز می توان از این روش استفاده کرد هر چند که بحث در مورد همگرایی وضعیت بسیار پیچیده ای پیدا می کند. این موضوعات می توانند ایده هایی برای کارهای آینده باشند.

منابع

[۱] اصول آنالیز ریاضی والتر رودین انتشارات علمی و فنی.

[۲] معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی دانشگاه پیام نور.