محاسبه تابع بتا توسط روش های تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی و مقایسه آن ها

فرج الله محمدی یعقوبی [۱*]، طاهر لطفی [۱]، اسماعیل بابلیان [۲]
[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان
[۲] گروه ریاضی و کامپیوتر ـ دانشگاه تربیت معلم تهران

چکیده

در این مقاله، یک مدل بهینه سازی با یک تابع هدف چندگانه با توجه به یک دستگاه معادلات رابطه فازی ارایه می شود. مجموعه جواب این قبیل از معادلات رابطه فازی، یک مجموعه غیر محدب است. بنابراین روش های معمولی از قبیل روش سیمپلکس یا روش نقطه ی داخلی برای حل این گونه مسایل به کار نمی روند. در این مقاله، ابتدا روی مجموعه جواب شدنی بحث می کنیم و سپس به مساله بهینه سازی یک تابع هدف خطی می پردازیم که برای حل این مساله، ابتدا آن را به یک مساله برنامه ریزی صحیح ۱−۰ تبدیل کرده و سپس آن را با استفاده از تکنیک شاخه و کران حل می نمائیم و در نهایت به مساله بهینه سازی یک تابع هدف چندگانه با استفاده از روش های L_p متریک می پردازیم. قضایا، تعاریف و لم های مورد نیاز در این مقاله بیان می شود و سرانجام به منظور روشن شدن روش ارایه شده، مثالی واقعی ارایه می شود.

کلمات کلیدی: تابع بتا، روش تجزیه آدومین، روش آشوب هوموتوپی.

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل کاربردهای زیادی در علوم و مهندسی دارند و حل آن ها در یاری رساندن به درک و توجیه پدیده‌های علمی اهمیت بسزایی دارد، اما تعداد کمی از این معادلات را می‌توان با روش های آنالیزی حل کرد و اکثر آن ها حل آنالیزی ندارند. لذا این معادلات باید با روش های دیگری حل شوند. برخی از روش هایی که در سال های اخیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارتند از روش آشوب دلتا [۳−۱]، روش آنالیز هموتوپی [۵−۴]، روش تغییرات تکراری [۶]، روش تجزیه آدومین [۸−۷] و روش آشوب هموتوپی [۱۲−۹].

همچنین برای ملاحظه برخی جزئیات روش های آنالیز غیرخطی توسعه یافته در سال های اخیر می‌توان به [۱۳] مراجعه نمود.

* عهدار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Fm.yaghobi@yahoo.com

از اوایل سال ۱۹۸۰ تا کنون روش تجزیه آدومین (ADM) برای حل دسته وسیعی از معادلات تابعی به کار گرفته شده است، که از جمله این معادلات می‌توان به معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و همچنین معادلات انتگرالی همراه با شرایط اولیه و یا مرزی اشاره نمود [۲۵-۱۴]. در این روش جواب معمولاً به صورت یک سری نامتناهی به دست می‌آید که به جواب دقیق معادله همگرا می‌شود.

در سال های اخیر، کاربرد روش آشوب هوموتوپی (HPM) برای حل مسایل ریاضی مورد توجه واقع شده است. این روش هم مانند روش تجزیه آدومین روشی مؤثر و راحت برای حل انواع معادلات خطی و غیرخطی می‌باشد. در این روش از تکنیک هوموتوپی در توپولوژی استفاده می‌شود و هوموتوپی طوری ساخته می‌شود که دارای یک پارامتر مانند p باشد که $p\in[0,1]$.

کارایی، سادگی و دقت روش هوموتوپی برای حل دسته وسیعی از انواع معادلات خطی و غیرخطی همراه با سرعت بالای همگرایی به جواب دقیق نشان داده شده است. البته روش آشوب هموتوپی در سال ۱۹۹۸ توسط هی پیشنهاد شد [۹] و تا کنون به طور موفقیت آمیزی برای حل انواع مختلفی از مسایل بکار رفته است [۳۲-۲۶]. در این مقاله قصد داریم تابع بتا را توسط یک معادله دیفرانسیل خطی ساده مرتبه اول و به کمک روش های ADM و HPM محاسبه نماییم. بدین منظور معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را درنظر می گیریم:

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=Q(t) \tag{۱}$$

جواب تحلیلی معادله (۱) عبارت است از:

$$y(t)f(t)=\int Q(t)f(t)dt \tag{۲}$$

که $f(t)=e^{\int p(t)dt}$.

۲ محاسبه تابع بتا

تابع بتا بارها در مسایل فیزیکی و آماری ظاهر می شود. همچنین این تابع دارای کاربردهای مستقیم در توزیع بتا در آمار می باشد و رابطه مستقیمی با تابع گاما دارد و به کمک آن بعضی از مقادیر مشکل تابع گاما را می توان حساب کرد . لذا در این قسمت به معرفی آن می‌پردازیم.

تابع بتا به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\beta(m.n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt \tag{۳}$$

به منظور محاسبه تابع بتا توسط ADM و HPM معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را در نظر می گیریم،

$$\frac{dy}{dt}+\frac{m-1}{t}y=(1-t)^{n-1} \tag{۴}$$

جواب تحلیلی (۴) عبارت است از:

$$y(t)f(t)=\int f(t)(1-t)^{n-1}dt\,, \tag{۵}$$

که $f(t)=t^{m-1}$. لذا از (۳) و (۵) داریم

$$y(t)\,t^{m-1}\Big|_0^1=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt=\beta(m,n). \tag{۶}$$

ضمناً از وجود تقارن بین m و n در (۳) نتیجه می شود $\beta(m,n)=\beta(n,m)$.

همچنین با استفاده از (۶) واضح است:

$$\beta(1,1)=\int_0^1 dt=1$$
$$\beta(2,1)=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$$
$$\beta(2,2)=\int_0^1 (1-t)\,dt=\frac{1}{6}$$
$$\beta(3,3)=\int_0^1 t^2(1-t)^2dt=\frac{1}{30}$$

۳ محاسبه تابع بتا با استفاده از ADM

برای محاسبه تابع بتا از (۶) توسط ADM، عملگر $L=\frac{d}{dt}$ را معرفی می‌کنیم. لذا می‌توان (۴) را به صورت زیر نوشت:

$$L(y)+\frac{m-1}{t}y=(1-t)^{n-1} \tag{۷}$$

یا

$$y=\frac{t}{m-1}(1-t)^{n-1}-\frac{t}{m-1}L(y). \tag{۸}$$

روش تجزیه آدومین جواب را به صورت سری در نظر می گیرد. بدین منظور گیریم

$$y=\sum_{i=0}^{\infty}y_i \tag{۹}$$

که

$$y_0=\frac{t}{m-1}(1-t)^{n-1},$$
$$y_{i+1}=-\frac{t}{m-1}L(y_i),\ i=0,1,2,\ldots \tag{۱۰}$$

در نتیجه از (۶) و (۹) خواهیم داشت:

$$\beta(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt=\left[t^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^1 \tag{۱۱}$$

لازم به ذکر است که همگرایی ADM در [۲۲] و [۳۷-۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش بعد سعی می‌کنیم با به کارگیری ADM چند محاسبه برای مقادیر معروف تابع بتا را انجام دهیم.

۳-۱ مثال ها و نتایج محاسباتی با روش تجزیه آدومین (ADM)

مثال ۳-۱-۱ گیریم $n=1$ و $m>2$. از (۱۱) خواهیم داشت

$$\beta(m,1)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt=\left[t^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^1$$

از (۱۰) داریم

$$\begin{aligned}
y_0&=\frac{t}{m-1}(1-t)^{1-1}=\frac{t}{m-1}\\
y_1&=-\frac{t}{m-1}L(y_0)=-\frac{t}{(m-1)^2},\\
y_2&=-\frac{t}{m-1}L(y_1)=\frac{t}{(m-1)^3},\\
&\vdots\\
y_i&=(-1)^i\frac{t}{(m-1)^{i+1}}\quad,\quad i=0,1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\beta(m,1)&=\left[\mathrm{t}^{\mathrm{m-1}}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^1=\left[\mathrm{t}^{\mathrm{m-1}}\left(\frac{t}{m-1}-\frac{t}{(m-1)^2}+\frac{t}{(m-1)^3}-+\cdots\right)\right]_0^1\\
&=\frac{1}{m-1}\left[1-\frac{1}{m-1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^2-\left(\frac{1}{m-1}\right)^3+-\cdots\right]\\
&=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+1/(m-1)}\right)=\frac{1}{m-1}\left(\frac{m-1}{m}\right)=\frac{1}{m}
\end{aligned}$$

مثال۳-۱-۲ برای $n=2$ و $m>3$ طبق (۱۱) داریم

$$\beta(m,2)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt=\left[t^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^1$$

از (۱۰) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
y_0&=\frac{t}{m-1}(1-t)\\
y_1&=-\frac{t}{m-1}L(y_0)=-\frac{t}{(m-1)^2}[(1-t)-t]\\
y_2&=-\frac{t}{m-1}L(y_1)=\frac{t}{(m-1)^3}[(1-t)-3t]\\
&\vdots\\
y_i&=(-1)^i\frac{t}{(m-1)^{i+1}}\left[(1-t)-(2^i-1)\times t\right]\quad,\quad i=0,1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\beta(m,2)=\left[\mathrm{t}^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^1=\frac{1}{m-1}\left[-\left(2^0-1\right)+\frac{2^1-1}{m-1}-\frac{2^2-1}{(m-1)^2}+\frac{2^3-1}{(m-1)^3}-+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{m-1}\left(1-\frac{2}{m-1}+\left(\frac{2}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)+\frac{1}{m-1}\left(1-\frac{1}{m-1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+2/(m-1)}\right)+\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+1/(m-1)}\right)=-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m}=\frac{1}{(m+1)m}$$

مثال ۳-۱-۳ برای $n=3$ و $m>4$ طبق (۱۱) داریم

$$\beta(m,3)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt=\left[t^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^1$$

از (۱۰) نتیجه می شود

$$y_0=\frac{t}{m-1}(1-t)^2$$

$$y_1=-\frac{t}{(m-1)^2}\left[(1-t)^2-2t(1-t)\right]$$

$$y_2=\frac{t}{(m-1)^3}\left[(1-t)^2-6t(1-t)+2t^2\right]$$

$$\vdots$$

$$y_i=(-1)^i\frac{t}{(m-1)^{i+1}}\left[(1-t)^2-\left(2^{i+1}-2\right)\times t(1-t)+\left(3^i-2^{i+1}+1\right)\times t^2\right]\ ,\quad i=0,1,2,\cdots.$$

بنابراین

$$\beta(m,3)=\left[\mathrm{t}^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^1=\frac{1}{m-1}\left[\left(3^0-2^1+1\right)-\frac{3^1-2^2+1}{m-1}+\frac{3^2-2^3+1}{(m-1)^2}-\frac{3^3-2^4+1}{(m-1)^3}+-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{m-1}\left[\left(1-\frac{3}{m-1}+\left(\frac{3}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)-2\left(1-\frac{2}{m-1}+\left(\frac{2}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)+\left(1-\frac{1}{m-1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+3/(m-1)}\right)-\frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{1+2/(m-1)}\right)+\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+1/(m-1)}\right)=\frac{2}{(m+2)(m+1)\ m}$$

٤ اساس روش آشوب هوموتوپی (HPM)

برای بیان ایده‌های پایه‌ای در این روش، معادله زیر را در نظر می گیریم [۱۱]:

$$A(y)=f(r), \qquad r\in\Omega. \qquad (۱۲)$$

که

$$B\left(y,\frac{\partial y}{\partial r}\right)=0, \quad r\in\Gamma. \qquad (۱۳)$$

در اینجا A یک عملگر دیفرانسیلی کلی، B عملگر مرزی، $f(r)$ تابع تحلیلی و Γ نیز مرز تعریف شده روی دامنه Ω می‌باشد. می‌توان A را به دو قسمت M و N تقسیم کرد که M قسمت خطی و N قسمت غیرخطی می‌باشند. لذا می‌توانیم (۱۲) را به صورت زیر بنویسیم.

$$M(y)+N(y)=f(r), \quad r\in\Omega. \qquad (۱٤)$$

ساختار آشوب هوموتوپی به صورت زیر است:

$$H(v,p)=(1-p)\left[M(v)-M(y_0)\right]+p\left[A(v)-f(r)\right]=0 \qquad (۱۵)$$

که

$$v(r,p)\ :\ \ \Omega\times[0,1]\rightarrow R \qquad (۱۶)$$

در معادله (۱۵)، $p\in[0,1]$ پارامتر نشاندنی و y_0 هم تقریب اولیه است. می‌توان فرض نمود که جواب معادله (۱۵) می‌تواند بر حسب یک سری توانی از p مانند زیر بیان شود.

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\cdots \qquad (۱۷)$$

و بهترین تقریب جواب عبارت است از:

$$y=\lim_{p\rightarrow 1}v=v_0+v_1+v_2+\cdots \qquad (۱۸)$$

برای همگرایی سری فوق می‌توان به [۱۱] مراجعه نمود.

۵ محاسبه تابع بتا توسط HPM

در این بخش HPM را برای محاسبه تابع بتا در نظر می‌گیریم. با توجه به معادله (۴)، گیریم $M(y)=\frac{m-1}{t}y(t)$ و $N(y)=\frac{dy}{dt}$. به عبارت دیگر هوموتوپی ساده زیر را می‌سازیم.

$$M(v)-M(y_0)+pM(y_0)+p\left[N(v)-f(t)\right]=0 \qquad (۱۹)$$

یا

$$\frac{m-1}{t}v(t)-\frac{m-1}{t}y_0(t)+p\frac{m-1}{t}y_0(t)+p\left[\frac{dv}{dt}-(1-t)^{n-1}\right]=0$$

سری (۱۷) را در (۱۹) جای گذاری می‌کنیم و ضرایب توان های یکسان p را متحد قرار می دهیم، بنابراین:

$$
\begin{aligned}
&p^0 : M(v_0) - M(y_0) = 0,\\
&p^1 : M(v_1) + M(y_0) + N(v_0) - f(t) = 0,\\
&p^2 : M(v_2) + N(v_1) = 0,\\
&p^3 : M(v_3) + N(v_2) = 0,\\
&\vdots\\
&p^{n+1} : M(v_{n+1}) + N(v_n) = 0.
\end{aligned}
\tag{۲۰}
$$

در نتیجه با توجه به (۶) و (۱۸) داریم

$$\beta(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt = \left[t^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) \right]_0^1 \tag{۲۱}$$

۵-۱ مثال ها و نتایج محاسباتی با روش آشوب هموتوپی(HPM)

مثال ۵-۱-۱ گیریم $n = 1$ و $m > 2$ با انتخاب $y_0(t) = 0$ از (۲۰) خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
&v_0(t) = 0,\\
&v_1(t) = \frac{t}{m-1},\\
&v_2(t) = -\frac{t}{(m-1)^2},\\
&\vdots\\
&v_i(t) = (-1)^{i-1}\frac{t}{(m-1)^i} \quad , \quad i = 1,2,3, \dots .
\end{aligned}
$$

با جای گذاری v_iها در (۲۱) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\beta(m,1) &= \left[t^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) \right]_0^1 = \left[t^{m-1} \left(\frac{t}{m-1} - \frac{t}{(m-1)^2} + \frac{t}{(m-1)^3} - + \cdots \right) \right]_0^1\\
&= \frac{1}{m-1}\left[1 - \frac{1}{m-1} + \left(\frac{1}{m-1}\right)^2 - + \cdots \right] = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+1/(m-1)} \right) = \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

حال اگر در این مثال فرض کنیم $y_0(t) = 1$ ، آن گاه

$$
\begin{aligned}
&v_0(t) = 1,\\
&v_1(t) = -1 + \frac{t}{m-1},\\
&v_2(t) = -\frac{t}{(m-1)^2},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$v_i(t)=(-1)^{i-1}\frac{t}{(m-1)^i}\quad,\quad i=2,3,4,\ldots$$

که دوباره همان نتیجه قبلی به دست خواهد آمد.

مثال۵-۱-۲ برای $n=2$ و $m>3$ با توجه به (۲۰) و انتخاب $y_0(t)=0$ ، داریم:

$$v_0(t)=0,$$
$$v_1(t)=\frac{t}{m-1}(1-t),$$
$$v_2(t)=-\frac{t}{(m-1)^2}\left[(1-t)-t\right],$$
$$v_3(t)=\frac{t}{(m-1)^3}\left[(1-t)-3t\right],$$
$$\vdots$$
$$v_i(t)=(-1)^{i-1}\frac{t}{(m-1)^i}\left[(1-t)-\left(2^i-1\right)\times t\right],\quad i=1,2,3,\ldots.$$

با جای گذاری v_iها در (۲۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\beta(m,2)&=\left[t^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}v_i(t)\right]_0^1=\frac{1}{m-1}\left[-\left(2^0-1\right)+\frac{2^1-1}{m-1}-\frac{2^2-1}{(m-1)^2}+\frac{2^3-1}{(m-1)^3}-+\cdots\right]\\&=-\frac{1}{m-1}\left(1-\frac{2}{m-1}+\left(\frac{2}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)+\frac{1}{m-1}\left(1-\frac{1}{m-1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)\\&=-\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+2/(m-1)}\right)+\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+1/(m-1)}\right)=-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m}=\frac{1}{(m+1)m}\end{aligned}$$

مثال۵-۱-۳ گیریم $n=3$ و $m>4$ با انتخاب $y_0(t)=0$ از (۲۰) خواهیم داشت:

$$v_0(t)=0,$$
$$v_1(t)=\frac{t}{m-1}(1-t)^2,$$
$$v_2(t)=-\frac{t}{(m-1)^2}\left[(1-t)^2-2t(1-t)\right],$$
$$v_3(t)=\frac{t}{(m-1)^3}\left[(1-t)^2-6t(1-t)+2t^2\right],$$
$$\vdots$$

$$v_i(t)=(-1)^{i-1}\frac{t}{(m-1)^i}\Big[\ (1-t)^2-(2^i-2)\times t(1-t)+(3^{i-1}-2^i+1)\times t^2\Big]\ ,\quad i=1,2,3,\cdots.$$

با جای گذاری v_iها در (۲۱) خواهیم داشت

$$\beta(m,3)=\left[\mathrm{t}^{\mathrm{m}-1}\sum_{i=0}^{\infty}v_i(t)\right]_0^1=\frac{1}{m-1}\left[(3^0-2^1+1)-\frac{3^1-2^2+1}{m-1}+\frac{3^2-2^3+1}{(m-1)^2}-\frac{3^3-2^4+1}{(m-1)^3}+-\cdots\right]$$
$$=\frac{1}{m-1}\left[\left(1-\frac{3}{m-1}+\left(\frac{3}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)-2\left(1-\frac{2}{m-1}+\left(\frac{2}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)+\left(1-\frac{1}{m-1}+\left(\frac{1}{m-1}\right)^2-+\cdots\right)\right]$$
$$=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+3/(m-1)}\right)-\frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{1+2/(m-1)}\right)+\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{1+1/(m-1)}\right)=\frac{1}{m+2}-\frac{2}{m+1}+\frac{1}{m}=\frac{2}{(m+2)(m+1)m}$$

٦ توضیح

با ادامه دادن محاسبات مشابه مثال های فوق برای $m>0$ و $n\in\mathrm{N}$ نتیجه می شود:

$$\beta(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\times\cdots\times1}{(m+n-1)(m+n-2)\times\cdots\times m}\,. \tag{۲۲}$$

رابطه فوق را می توان به استقرا روی n ثابت کرد، زیرا طبق توضیحات فوق داریم $\beta(m,1)=\dfrac{1}{m}$.

هچنین با انتگرال گیری جز به جز از (۳) می توان نوشت:

$$\beta(m,n+1)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)=\left[\frac{1}{m}t^m(1-t)^n\right]_0^1+\frac{m}{n}\int_0^1 t^m(1-t)^{n-1}dt=\frac{m}{n}\beta(m+1,n)$$

در نتیجه با استفاده از فرض استقرا داریم

$$\beta(m,n+1)=\frac{m}{n}\beta(m+1,n)=\frac{n}{m}\left[\frac{(n-1)\times(n-2)\cdots\times1}{(m+n)\times(m+n-1)\cdots\times(m+1)}\right]$$
$$=\left[\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\cdots\times1}{(m+n)\times(m+n-1)\cdots\times(m+1)\times m}\right].$$

بنابراین مطلب فوق برای $m>0$ و $n\in\mathrm{N}$ ثابت می شود.

همچنین تابع گاما به صورت زیر تعریف می شود [۳۸]:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

که $\Gamma(n)=(n-1)!$.

در نتیجه با ضرب و تقسیم (۲۲) در $\Gamma(m)=(m-1)!$ نتیجه می شود

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{۲۳}$$

ضمناً می توان (۲۳) را با روش تحلیلی برای هر m و n که تابع Γ تعریف شده باشد، ثابت کرد.

بنابراین برای $m=n=\frac{1}{2}$ طبق (۲۳) داریم $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$

از طرفی با تغییر متغیر $t=\sin^2 x$ معادله (۴) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{\cos x}{\sin x}y=2\sin x.$$

معادله فوق، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است و جواب آن برابر $y(x)=2x\sin x$ می باشد، بنابراین طبق(۶)،

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{y(t)}{\sqrt{t}}\right]_0^1=\left[\frac{y(x)}{\sin x}\right]_0^{\pi/2}=\pi.$$

همچنین برای $m=n=\frac{3}{2}$ طبق (۲۳) داریم $2\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2$.

که مشابه قسمت فوق با تغییر متغیر $t=\sin^2 x$ معادله (۴) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{\cos x}{\sin x}y=2\sin x\cos^2 x$$

معادله فوق، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است و جواب آن برابر $y(x)=\left(\frac{1}{4}x-\frac{\sin 4x}{16}\right)\Big/\sin x$ می باشد، بنابراین طبق (۶) داریم:

$$\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\left[y(t)\sqrt{t}\right]_0^1=\left[y(x)\sin x\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}.$$

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله روش های تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی برای محاسبه تابع بتا و بررسی برخی نتایج محاسباتی آن به طور موفقیت آمیزی مورد استفاده قرار گرفت. سادگی و کارایی این دو روش پیشنهادی در مثال هایی نشان داده شد. همچنین، برخلاف روش های متداول پیشین و کلاسیک مبتنی بر انتگرال گیری، این الگوریتم‌ها از عمل مشتق‌گیری، که ساده‌تر از عمل انتگرال گیری است، استفاده می‌کنند و هر دو روش از نظر محاسباتی به نتایج یکسانی منجر می‌شوند.

منابع

[1] C.M. Bender, K. S. Pinsky, L. M. Simmons, A new perturbative approach to nonlinear problems, Journal of Mathematical Physics, 30 (7) (1989), pp. 1447-1455.

[2] I. Andrianow, J. Awrejcewicz, Construction of periodic solution to partial differential euations with nonlinear bundary conditions, Internatioal Journal of Nonlinear Sciences and Numerical simulation, 1 (4), (2000).

[3] J. H. He, A note on delta-perturbatin expansion method, Applied Mathematics and Mechanics, 23 (6) (2002), pp. 634-638.

[4] S. J. Liao, Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems, Applied Mathematics and Mechanics, (English- Ed.) 19 (10) (1998), pp. 957-962.
[5] J. H. He. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, International Congress of Mathematicians, Beijign, 20-28 August, 2002.
[6] J. H. He, Variational iteration method: a kind of nonlinear analystical technique: some examples, International Journal of Nonlinear Mechanics, 34 (4) (1999), pp. 699-70.
[7] G. Adomian, Solving frontier problems o physics: the decomposition method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
[8] G. Adomian, R. Rach, On the solution of algebraic equations by the decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 105 (1985), pp. 141-166.
[9] J. H. He, Homotopy perturbation technique, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 178 (1999), pp. 257-262.
[10] J. H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, International Journal of Non- Linear Mechanics, 35 (1) (2000), pp. 37-43.
[11] J. H. He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, Applied Mathematics and Computation, 135 (2003), pp. 73-79.
[12] J. H. He, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, Applied Mathematics and Computation, 156 (2004), pp. 527-539.
[13] J. H. He, A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques, International Journal of Nonlinear Sciences an Numerical Simulation, 1 (1) (2000), pp. 51-70.
[14] S. Abbasbandy, M. T. Darvishi, A numerical solution of Burgers equation by modified Adomian method, Applied Mathematics and Computation, 163 (2005), pp. 1265-1272.
[15] S. Abbasbandy, A numerical solution of Blasius equation by Adomians decomposition method and comparison with homotopy perturbation method, Chaos, Solitons & Fractals, 31, (2007), pp. 257-260.
[16]. G. Adomian, R. Rach, On the solution of algebraic equations by the decomposition method, Journal of Mathematical Analysis and Application, 105, (1985), pp. 141-166.
[17] G. Adomian, A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, Mathematical and Computer Modelling, 13(7), (1992), pp. 17-43.
[18] G. Adomian, A review of the decomposition method in applied mathematics, Journal of Mathematical Analysis and Application, 135, (1988), pp. 501-544.
[19] G. Adomain, Nonlinear stochastic system theory and applications to physics, Kluwer, Dordrecht, 1989.
[20] G. Adomian, Solving frontier problems of physics: the decomposition method, Kluwer, Dordrecht, 1994.
[21] E. Babolian, J. Biazar, Solving the problem of biological species living together by Adomian decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 129, (2002), pp. 339-343.
[22] E. Babolian, J. Biazar, On the order of convergence of Adomian method, Applied Mathematics and Computation, 130, pp. (2002), 383-387.
[23] E. Babolian, a. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 153. (2004), pp. 301-305.
[24] E. Babolian, J. Biazar, A. R. Vahidi, A new computational method for Laplace transform by decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 150, (2004), pp. 841-846.
[25] E. Babolian, J. Biazar, A.R. Vahidi, The decomposition method applied to systems of Fredholm integral equations of the second kind, Applied Mathematics and Computation, 148 (2004), pp. 443-452.
[26] J. H. He, The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities, Applied Mathematics and Computation, 151 (2004), pp. 287-292.
[27] J. H. He, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, Chaos, Solitons and Fractals, 26 (2005), pp. 695-700.
[28] J. H. He, Homotopy perturbation method for solving boundary value problems, Physics Letters A, 350 (2006), pp. 87-88.
[29] J. H. He, Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems, Chaos, Solitions and Fractals, 26 (3) (2005), pp. 827-833.
[30] J. Biazar, H. Ghazvini, Exact solutions for nonlinear Sehrodinger equations by He's homotopy perturbation method, Physics Letters A, 366 (2007), pp. 79-84.
[31] D. D. Ganji, The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer, Physics Letters A, 355 (2006), pp. 337-341.

[32] S. Abbasbandy, Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 173 (2006), pp. 493-500.
[33] G. B. Arfkan, H. J. Weber, Mathematical method for physics, Academic Press, Fifth Edition, 2001.
[34] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method applied to nonlinear equations, Mathematical and Computer Modelling, 20 (9), (1994), pp. 69-73.
[35] K Abbaui, Y. Cherruault, New ideas for proving convergence of decomposition methods, Computer Mathematics with Applications, 29 (7), (1996), pp. 103-108.
[36] Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method, Kybernets, 8 (2), (1998), pp. 423-426.
[37] Y. Cherruault, G. Adomian, De composition methods, a new proof of convergence, Mathematical and Computer Modelling, 18, (1993), pp. 103-106.
[۳۸] طاهر لطفی، اسماعیل بابلیان، فرج اله محمدی یعقوبی، محاسبه تابع گاما توسط روش های تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی و مقایسه آن ها، مجله ریاضیات کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، شماره۱۴ ،۵۷-۴۹، ۱۳۸۶.