مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال ششم، شماره ۲۳، زمستان ۸۸، ص ص ۱۰-۱

روش های تکراری شبه نیوتن برای دستگاه های معادلات غیر خطی

صمد عهدی اقدم[۱*]، رضا رضاپور[۱]، سمیرا قوسی[۲]
[۱]گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی مرند
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور مرند

چکیده

در این مقاله اصلاحاتی از روش کلاسیک نیوتن را برای حل دستگاه های معادلات غیرخطی تعمیم داده و با تحلیل همگرایی، مراتب همگرایی هر یک از روش ها را همسان با مرتبه آن ها در حل معادلات غیرخطی به دست آورده‌ایم. شاخص کارآیی هر یک از روش ها را تعیین نموده و روش ها را برای تعیین جواب دستگاه های معادلات غیرخطی منتخب به کار گرفته‌ایم. میزان شاخص‌های کارآیی و آزمون های عددی موید کارایی بهتر و بیشتر روش های با مرتبه همگرایی پنج هستند.

کلمات کلیدی: روش نیوتن، روش های تکراری، دستگاه های معادلات غیرخطی، مرتبه همگرایی.

۱ مقدمه

دستگاه معادلات غیرخطی مربعی

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \end{cases} \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن به ازای هر $1\le i\le n$، f_i یک تابع حقیقی n متغیره بر $U_i\subseteq R^n$ می‌باشد. در صورت ناتهی بودن $U=\bigcap_{i=1}^{n}=U_i$ ، تابع برداری

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=[f_1(x_1,x_2,\dots,x_n),f_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)]^T$$

تابعی از $U\subseteq R^n$ به R^n می‌باشد که با معرفی بردار مجهول $x=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T$ ، دستگاه معادلات (۱) به معادله $F(x)=0$ تبدیل می‌شود.

تعریف فرض کنیم $U\subseteq R^n$ مجموعه ای باز و $r\in U$ باشد. تابع $F:U\subseteq R^n$ در r مشتق پذیر است اگر نگاشت خطی $DF(r):U\subseteq R^n$ موجود باشد به طوری که:

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: ahdi@marandau.ac.ir

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(r+h)-F(r)-DF(r)h}{\|h\|}$$

قضیه۱ اگر تابع برداری $F:R^n\to R^n$ (با مولفه های f_i) در نقطه r مشتق پذیر باشد آن گاه مشتقات جزیی $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(r)$ وجود دارند و

$$[DF(r)]=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r)\right].$$

اغلب، ماتریس فوق را ماتریس ژاکوبین F در r می‌گویند.

در روش های تکراری مرجع[۱] برای معادله غیرخطی $f(x)=0$، دنباله $\{x_n\}$ از فرمول بازگشتی $x_{n+1}=g(x_n)$ تولید می‌شود که در آن $g(x)=x-\varphi(x)f(x)$ می‌باشد و به عنوان نمونه به ازای $\varphi(x)=\frac{1}{f'(x)}$ روش مرتبه دوم کلاسیک نیوتن حاصل می‌گردد، در اینجا نیز به طور مشابه معادله $F(x)=0$ حاصل از دستگاه معادلات (۱) را به فرم $x=G(x)$ تبدیل می‌کنیم.

قضیه۲ فرض کنیم به ازای خانواده ای از ثابت های a_1، a_2،...، a_n و b_1، b_2،...، b_n

$$D=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|\ \forall i,\quad i=1,2,\dots,n,\quad a\le x_i\le b_i\}$$

و نیز G تابع پیوسته با مشتقات جزیی اول پیوسته از $D\subseteq R^n$ بتوی R^n باشد با این خاصیت که اگر $x\in D$ آن گاه $G(x)\in D$. در این صورت، G دارای یک نقطه ثابت در D است. به علاوه، هر گاه یک ثابت $k<1$ موجود باشد که اگر $x\in D$ و به ازای هر $j=1,2,\dots,n$ و هر تابع مولفه ای g_i, $\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right|\le\frac{k}{n}$,
آن گاه نقطه ثابت منحصر بفرد است و دنباله $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}=0$ با رابطه بازگشتی $x_{n+1}=G(x_n)$ به ازای هر x_0 در D به نقطه ثابت منحصر بفرد $p\in D$ همگراست و

$$\|x_n-p\|_\infty\le\frac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|_\infty .$$

۲ روش ها و تحلیل همگرایی

روش های مورد بحث مرجع [۱] را با مراعات همان نامگذاری ها برای حل دستگاه های معادلات غیرخطی به شرح زیر به کار می‌گیریم و به منظور تعیین مرتبه همگرایی روش ها فرض می‌کنیم تابع برداری n متغیره $F(x)$ به اندازه کافی مشتق پذیر است که در این صورت می‌توان بسط تیلورش را حول نقطه x_n به فرم زیر نوشت:

$$F(x)=F(x_n)+F'(x_n)(x-x_n)+\frac{1}{2}F''(x_n)(x-x_n)^2+\frac{1}{6}F^{(3)}(x_n)(x-x_n)^3+o(\|x-x_n\|^4) \tag{۲}$$

به ازای $x=r$ (ریشه معادله $F(x)=0$) و با تعریف بردار خطای $e_n=x_n-r$ نتیجه می‌شود:

$$F(x_n)=F'(x_n)e_n-\frac{1}{2}F''(x_n)\,e_n^2+\frac{1}{6}F^{(3)}(x_n)\,e_n^3+o(\|e_n\|^4) \tag{۳}$$

الف: روش کلاسیک نیوتن (CN)

$$x_{n+1}=x_n-[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$$

برای تعیین مرتبه همگرایی، بردار r را از طرفین فرمول فوق تفریق می‌کنیم:

$$x_{n+1}-r=x_n-r-[F'(x_n)]^{-1}F(x_n) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}_{n+1}=e_n-[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$$

از فرمول (۳) می‌توان نوشت:

$$e_{n+1}=e_n-[F'(x_n)]^{-1}\left\{F'(x_n)e_n-\frac{1}{2}F''(x_n)e_n^2+\frac{1}{6}F^{(3)}(x_n)e_n^3+o(\|e_n\|^4)\right\}$$

بنابراین

$$e_{n+1}=\frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1}F''(x_n)e_n^2-\frac{1}{6}[F'(x_n)]^{-1}F^{(3)}(x_n)e_n^3+o(\|e_n\|^4)$$

پس مرتبه همگرایی برای روش کلاسیک نیوتن در دستگاه ها نیز دو می‌باشد.

ب: روش شرودر (SCH)

$$x_{n+1}=x_n-[(F'(x_n))^2-F(x_n)F''(x_n)]^{-1}F'(x_n)F(x_n)$$

در این فرمول و همچنین در فرمول هالی سطر i ام عبارت $G_{n\times n}=F(x_n)F''(x_n)$ به فرم

$$G_{n\times n}(i)=F(x_n)^T\,Hessf_i(x_n)$$

تعیین می‌شود که در آن به ازای $1\le i\le n$ ،

$$Hessf_i(a)=\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(a)\right]_{j,k=1}^{n}$$

با روند مشابه قسمت الف به فرمول خطای زیر برای روش شرودر می‌رسیم:

$$e_{n+1}=-\frac{1}{2}A^{-1}F'(x_n)F''(x_n)\,e_n^2+o\left(\|e_n\|^3\right)$$

که در آن

$$A=\left(F'(x_n)\right)^2-F(x_n)F''(x_n)=\left(F'(x_n)\right)^2\left(I+\overline{A}e_n\right).$$

با فراهم نمودن شرایط قضیه۲، به ازای $B=\overline{A}e_n$ شرط $\|B\|<1$ برقرار است ولذا فرمول

$$(1+B)^{-1}=1-B+B^2-B^3+\dots\ ,$$

نتیجه می‌دهد که چون جمله اول A فاقد e_n است پس اولین جمله A^{-1} نیز فاقد e_n می‌باشد و در نتیجه فرمول خطای این روش از مرتبه دو خواهد شد.

پ: روش میانگین حسابی نیوتن (AN)

$$\begin{cases} x^*_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - 2[F'(x^*_{n+1}) + F'(x_n)]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

برای تعیین مرتبه همگرایی این روش با قرار دادن $A = F'(x^*_{n+1}) + F'(x_n)$ خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - 2A^{-1}F(x_n)$$

که با تفریق r از طرفین و ضرب A از سمت چپ به دست می‌آوریم:

$$Ae_{n+1} = Ae_n - 2F(x_n)$$

در ادامه با به کارگیری رابطه (۲) به ازای F' به جای F و $x = x^*_{n+1}$ داریم:

$$F'(x^*_{n+1}) = F'(x_n) + F''(x_n)(x^*_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}F^{(3)}(x_n)(x^*_{n+1} - x_n)^2 + o\left(\left\|x^*_{n+1} - x_n\right\|^3\right)$$

برای تعیین $x^*_{n+1} - x_n = -[F'(x_n)]^{-1}F(x_n)$ با استفاده از رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$x^*_{n+1} - x_n = -e_n + \frac{1}{2}[F'(x_n)]^{-1}\left(F''(x_n)e_n^2 - \frac{1}{3}F^{(3)}(x_n)e_n^3\right) + o\left(\|e_n\|^4\right)$$

بنابراین

$$F'(x^*_{n+1}) = F'(x_n) - F''(x_n)e_n + \frac{1}{2}\left\{F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1}F''(x_n) + F^{(3)}(x_n)\right\}e_n^2 + o\left(\|e_n\|^3\right)$$

در نتیجه

$$A = 2F'(x_n) - F''(x_n)e_n + \frac{1}{2}\left\{F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1}F''(x_n) + F^{(3)}(x_n)\right\}e_n^2 + o\left(\|e_n\|^3\right)$$

پس

$$\begin{aligned} Ae_{n+1} &= Ae_n - 2F(x_n) \\ &= \frac{1}{2}\left\{F''(x_n)[F'(x_n)]^{-1}F''(x_n) + F^{(3)}(x_n)\right\}e_n^3 + o\left(\|e_n\|^4\right) \end{aligned}$$

بنابراین برای این روش مشابه با قبل مرتبه همگرایی سه می‌باشد:

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}A^{-1}\left\{F''(x_n)\left[F'(x_n)\right]^{-1}F''(x_n) + F^{(3)}(x_n)\right\}e_n^3 + o\left(\|e_n\|^4\right).$$

ت: روش نقطه میانی نیوتن (MN)

$$\begin{cases} x_{n+1}^{*} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \left[F'\left(\dfrac{x_n + x_{n+1}^{*}}{2}\right)\right]^{-1} F(x_n). \end{cases}$$

در این روش برای تعیین مرتبه همگرایی با قرار دادن $Z_n = \dfrac{x_n + x_{n+1}^{*}}{2}$ به فرمول خطای مرتبه سوم

$$e_{n+1} = \left[F'(z_n)\right]^{-1}\left[\frac{1}{4}F''(x_n)\left[F'(x_n)\right]^{-1}F''(x_n) - \frac{1}{24}F^{(3)}(x_n)\right]e_n^3 + o\left(\|e_n\|^4\right).$$

می‌رسیم و با ادامه همین روند در مورد سایر روش ها خواهیم داشت:

ث: روش واسطه موزون نیوتن (HN)

$$\begin{cases} x_{n+1}^{*} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{2}\left(\left[F'(x_n)\right]^{-1} + \left[F'(x_{n+1}^{*})\right]^{-1}\right)F(x_n), \\ e_{n+1} = \dfrac{1}{12}\left[F'(x_{n+1}^{*})\right]^{-1} F^{(3)}(x_n)e_n^3 + o\left(\|e_n\|^4\right). \end{cases}$$

ج: روش هالی (HL)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \left[\left(F'(x_n)\right)^2 - \dfrac{1}{2}F(x_n)F''(x_n)\right]^{-1} F'(x_n)F(x_n), \\ e_{n+1} = A^{-1}\left[\dfrac{1}{4}\left(F''(x_n)\right)^2 - \dfrac{1}{6}F'(x_n)F^{(3)}(x_n)\right]e_n^3 + o\left(\|e_n\|^4\right) \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} A &= \left(F'(x_n)\right)^2 - \frac{1}{2}F(x_n)F''(x_n) \\ &= \left(\mathrm{F}'(x_n)\right)^2 - \frac{1}{2}F'(x_n)e_nF''(x_n) + \frac{1}{4}F''(x_n)e_n^2F''(x_n) + o\left(\|e_n\|^3\right). \end{aligned}$$

چ: روش نیوتن-گاوس (NG)

$$\begin{cases} x_{n+1}^{*} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}\left[3F(x_n) - 4F\left(\dfrac{x_n + x_{n+1}^{*}}{2}\right) + 2F(x_{n+1}^{*})\right], \\ e_{n+1} = \left\{\left(\left[F'(x_n)\right]^{-1}F''(x_n)\right)^2 + \dfrac{1}{12}\left[F'(x_n)\right]^{-1}F^{(3)}\left(x_n\right)\right\}e_n^3 + o\left(\|e_n\|^4\right). \end{cases}$$

ح: روش میانگین حسابی بهبود یافته نیوتن $(AN5)$

$$\begin{cases} x^*_{n+1} = x_n - \left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ u_{n+1} = x_n - 2\left[F'(x^*_{n+1}) + F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \left[F'(x^*_{n+1})\right]^{-1} F\left(u_{n+1}\right). \end{cases}$$

در بررسی مرتبه همگرایی این روش و روش واسطه موزون بهبود یافته نیوتن از بسط تیلور تابع $F(u_{n+1})$ حول بردار r به فرم

$$F(u_{n+1}) = F'(r)(u_{n+1} - r) + o(\|u_{n+1} - r\|^2) \qquad (۴)$$

و بسط تیلور تابع $F'(r)$ حول بردار x^*_{n+1} به فرم

$$F'(r) = F'(x^*_{n+1}) - F''(x^*_{n+1})(x^*_{n+1} - r) + o\left(\|x^*_{n+1} - r\|^2\right)$$

استفاده می‌کنیم. با استفاده از این رابطه در (۴) می‌توان نوشت:

$$F(u_{n+1}) = F'(x^*_{n+1})(u_{n+1} - r) - F''(x^*_{n+1})(x^*_{n+1} - r)(u_{n+1} - r) + o\left(\|x^*_{n+1} - r\|^2 \|u_{n+1} - r\|\right)$$

با تفریق بردار r از طرفین فرمول x_{n+1} رابطه $x_{n+1} - r = u_{n+1} - r - [F'(x^*_{n+1})]^{-1} F(u_{n+1})$ به دست می‌آید که با قرار دادن عبارت معادل $F(u_{n+1})$ در آن نتیجه می‌شود:

$$e_{n+1} = [F'(x^*_{n+1})]^{-1} F''(x^*_{n+1})(x^*_{n+1} - r)(u_{n+1} - r) + o\left(\|x^*_{n+1} - r\|^2 \|u_{n+1} - r\|\right)$$

حال از اینکه x^*_{n+1} با روش مرتبه دوم CN و u_{n+1} با یکی از روش های مرتبه سوم AN یا HN تولید می‌شوند پس فرمول خطای فوق از مرتبه پنج خواهد بود.

خ: روش نقطه میانی بهبود یافته نیوتن $(HN5)$

$$\begin{cases} z_n = x_n - \frac{1}{2}\left[F'(x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ u_{n+1} = x_n - \left[F'(z_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \left[2F'(z_n) - F'(x_n)\right]^{-1} F\left(u_{n+1}\right). \end{cases}$$

برای تعیین مرتبه همگرایی، بسط تیلور تابع $F'(r)$ حول بردارهای z_n و x_n را به ترتیب به فرم

$$F'(r) = F'(z_n) - F''(z_n)(z_n - r) + o\left(\|z_n - r\|^2\right)$$

و

$$F'(r) = F'(x_n) - F''(x_n) e_n + o\left(\|e_n\|^2\right)$$

در نظر گرفته و بسط دوم را از دو برابر بسط اول تفریق می‌کنیم:

$$F^{'}(r) = 2F^{'}(z_n) - F^{'}(x_n) + F^{"}(x_n)e_n^2 + o\left(\|e_n\|^3\right)$$

اکنون با قرار دادن این مقدار در رابطه (۴) نتیجه می‌شود:

$$F(u_{n+1}) = \left[2F^{'}(z_n) - F^{'}(x_n)\right](u_{n+1} - r) + F^{"}(x_n)e_n^2\left(u_{n+1} - r\right) + o\left(\|u_{n+1} - r\|^2\right).$$

با تفریق بردار r از طرفین بند سوم فرمول این روش و استفاده از رابطه اخیر به دست می‌آوریم:

$$e_{n+1} = \left[2F^{'}(z_n) - F^{'}(x_n)\right]^{-1} F^{"}(x_n)e_n^2\left(u_{n+1} - r\right) + o\left(\|u_{n+1} - r\|^2\right)$$

و چون u_{n+1} از روش مرتبه سوم HN تولید می‌شود پس این فرمول خطا از مرتبه پنج خواهد بود.

د: روش واسطه موزون بهبود یافته نیوتن $(HN\,5)$

$$\begin{cases} x_{n+1}^{*} = x_n - \left[F^{'}(x_n)\right]^{-1} F(x_n), \\ u_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{2}\left[F^{'}(x_n)\right]^{-1} + \left[F^{'}(x_{n+1}^{*})\right]^{-1} F(x_n), \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \left[F^{'}(x_{n+1}^{*})\right]^{-1} F\left(u_{n+1}\right). \end{cases}$$

ذ: روش هالی بهبود یافته $(HL\,6)$

$$\begin{cases} u_{n+1} = x_n\left[\left(F^{'}(x_n)\right)^2 - \dfrac{1}{2}F(x_n)F^{"}(x_n)\right]^{-1} F^{'}(x_n)F(x_n) \\ x_{n+1} = u_{n+1} - \left[F^{'}(u_{n+1})\right]^{-1} F(u_{n+1}). \end{cases}$$

برای تعیین مرتبه همگرایی این روش بسط تیلور $F(x)$ را حول نقطه u_{n+1} در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = F(u_{n+1}) + F^{'}(u_{n+1})(x - u_{n+1}) + \frac{1}{2}F^{"}(u_{n+1})(x - u_{n+1})^2 + o\left(\left\|x - {u_{n+1}}^3\right\|\right)$$

به ازای $x = r$ (ریشه معادله $F(x)$) نتیجه می‌شود:

$$F(u_{n+1}) = F^{'}(u_{n+1})(u_{n+1} - r) - \frac{1}{2}F^{"}(u_{n+1})(u_{n+1} - r)^2 + o\left(\|u_{n+1} - r\|^3\right)$$

با تفریق بردار r از طرفین فرمول، رابطه

$$x_{n+1} - r = u_{n+1} - r - \left[F^{'}(u_{n+1})\right]^{-1} F(u_{n+1})$$

حاصل می‌شود که استفاده از عبارت معادل $F(u_{n+1})$ به دست می‌دهد:

$$e_{n+1}=-\frac{1}{2}\left[F^{'}(u_{n+1})\right]^{-1}F^{''}(u_{n+1})(u_{n+1}-r)^2+o\left(\|u_{n+1}-r\|^3\right)$$

با توجه به فرمول خطای مرتبه سوم روش هالی، فرمول خطای فوق از مرتبه شش خواهد بود.

۳ آزمون های عددی

در مقایسه روش های تکراری برای حل معادلات غیر خطی از شاخصی به نام شاخص کارآیی به صورت $p^{\frac{1}{w}}$ استفاده می‌شود که در آن p مرتبه روش و w تعداد ارزیابی های توابع است که یک روش در هر تکرار نیاز دارد. شاخص کارآیی بزرگتر برای یک روش به نشانه بهتر بودن آن روش است. به طور مشابه در دستگاه ها نیز از این شاخص به صورت $p^{\frac{n}{w}}$ استفاده می‌کنیم که در آن n تعداد معادلات دستگاه است. به عنوان مثال در روش نیوتن نیاز به n محاسبه تابع در بردار $F(x_n)$ و n^2 محاسبه تابع در ماتریس $F^{'}(x_n)$ است، بنابراین شاخص کارایی این روش $2^{\frac{1}{n+1}}$ می‌باشد. در روش های شرودر و هالی علاوه بر محاسبات یادشده نیاز به n^3 محاسبه تابع در ماتریس $F^{''}(x_n)$ نیز هست، پس شاخص کارآیی این دو روش به ترتیب $2^{\frac{1}{n^2+n+2}}$ و $3^{\frac{1}{n^2+n+1}}$ خواهد بود. جدول زیر مقایسه‌ای از شاخص کارآیی روش ها در حالت تک معادله و دستگاه معادلات را تا ۴ معادله نشان می‌دهد:

n	CN	SCH	AN, MN, HN	HL	NG	$AN5, MN5, HN5$	$HL6$
1	1.414	1.260	1.442	1.442	1.316	1.495	1.431
2	1.260	1.104	1.246	1.170	1.246	1.308	1.196
3	1.189	1.055	1.170	1.088	1.201	1.223	1.111
4	1.149	1.034	1.130	1.054	1.170	1.175	1.071

جدول ۱: مقایسه شاخص کارآیی روش ها

روش های مورد بحث را برای تعیین جواب های دستگاه های معادلات غیرخطی منتخب زیر، که در مراجع [4,5,6] از آن ها استفاده گردیده، به کار می‌بریم:

$$S_1=\begin{cases}x^2-y=0.2\\ y^2-x=0.3\end{cases}\qquad \mathrm{P}=\begin{bmatrix}-0.2860321636288604\\ -0.1181856013697928\end{bmatrix}$$

$$S_2=\begin{cases}x^2+y^2=x\\ x^2-y^2=y\end{cases}\qquad \mathrm{P}_1=\begin{bmatrix}0.7718445063460382\\ 0.4196433776070806\end{bmatrix},\quad \mathrm{P}_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{cases} e^x - y = 2 \\ \cos\ x + y = 1 \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.8502329164169512 \\ 0.3401918575555883 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{cases} x^2 - y = -1 \\ x - \cos(\frac{\pi y}{2}) = 0 \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S_5 = \begin{cases} 3x + y^2 = 0 \\ x - y(1+y) = 0 \end{cases} \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -0.1875 \\ -0.75 \end{bmatrix}$$

$$S_6 = \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} 1.488033871712585 \\ 0.7559830641437075 \end{bmatrix}$$

$$S_7 = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 + z^2 = 0 \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} 0.6982886099715139 \\ 0.6285242979602138 \\ 0.3425641896895695 \end{bmatrix}$$

	X_0	CN	SCH	AN	MN	HN	HL	NG	AN5	MN5	HN5	HL6
s_1	$[-0.5, -0.7]^T$	9	7	7	7	5	7	9	5	5	4	4
	$[-0.1, +0.1]^T$	6	6	4	4	4	6	4	3	3	3	3
s_2, p_1	$[1, -0.5]^T$	6	6	4	4	4	5	4	3	3	3	3
s_2, p_2	$[0.8, -0.5]^T$	31	8	10	10	16	6	8	6	5	13	5
	$[-2, -1]^T$	8	8	6	6	5	6	6	5	5	5	4
s_3	$[0.75, -0.25]^T$	5	6	4	4	4	5	4	3	3	3	3
s_4	$[1, 1]^T$	8	7	5	5	5	7	6	4	4	4	4
s_5, p_1	$[-0.15, 0.3]^T$	6	7	4	4	4	5	5	4	4	3	3
s_5, p_2	$[0.3, -1.6]^T$	7	7	5	5	4	7	5	4	4	4	4
s_6	$[1.6, 0.4]^T$	5	6	4	4	3	5	4	3	3	3	3
s_7	$[0.1, 0.9, 0.1]^T$	9	7	6	6	5	6	9	5	5	5	5
	$[0.7, 1.3, 0.7]^T$	7	7	5	5	4	6	2	4	4	4	4

جدول ۲: مقایسه تعداد تکرارهای روش ها

٤ نتیجه گیری

اصلاحاتی از روش تکراری نیوتن را برای حل دستگاه های معادلات تعمیم داده و مرتبه همگرایی روش های تعمیمی را محاسبه نمودیم. همچنین شاخص کارآیی هریک از روش ها را مشخص کرده و برنامه کامپیوتری روش ها را در محیط برنامه نویسی MATLAB برای مسایل منتخب اجرا نمودیم. آزمون های عددی موید کارایی بیشتر روش های تکراری از مرتبه پنج در حل دستگاه ها هستند.

منابع

[۱] ص. عهدی اقدم ، ر. رضاپور، اصلاحاتی از روش تکراری نیوتن با مرتبه همگرایی بالا، مجموعه مقالات اولین همایش منطقه ای ریاضیات و دستاوردهای آن، دانشگاه آزاد اسلامی رشت (۱۳۸۷) ۴۴۲-۴۳۴.

[2] T. Shifrin, Multivariable Mathematics, wiley, 2005.

[3] S. Weerakoon, T.G.I. Fernando, A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, Appl. Math. Lett. 13 (2000) 87-93.

[4] X. Wu, Note on the improvement of Newton's method for systems of nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 1476-1479.

[5] M.A. Noor, M. Waseem, Some iterative methods for solving a system of nonlinear equations, J. Computers and Mathematics with Applications 57 (2009) 101-106.

[6] M. Frontini, E. Sormani, Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 149 (2004) 771-782.