

طراحی آماری نمودار کنترل چند متغیره T^2 هتلینگ با دو فاصله زمانی نمونه گیری متغیر با استفاده از الگوریتم ژنتیک

اصغر سیف^{۱*}، علی رضا فراز^۲، محسن توایان^۳

^۱گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان
^۲گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس تهران
^۳گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان

چکیده

در نمودار کنترل چندمتغیره T^2 هتلینگ گرچه دارای مزیت های زیادی است اما برای شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرآیند بسیار کند عمل می کند. جهت فایق آمدن بر این کاستی، این مقاله به طراحی نمودار کنترلی چندمتغیره T^2 هتلینگ با استفاده از طرح نمونه گیری فواصل زمانی متغیر می پردازد. در این راستا، برپایه مفاهیم زنجیر مارکوف، نمودار کنترل T^2 -VSI بنا سازی می گردد. سپس با استفاده از تکنیک الگوریتم ژنتیک، پارامترهای نمودار کنترل (در سطح معینی از خطا) به قسمی تعیین می گردند که توان چارت در شناسایی تغییرات در میانگین فرآیند کمینه گردد. در پایان با استفاده از یک مثال برگرفته از ادبیات موضوع دو نمودار کنترل T^2 -VSI و T^2 -FRS از بعد آماری با هم مقایسه می گردند.

کلمات کلیدی: کنترل کیفیت، نمودار T^2 هتلینگ، زنجیر مارکوف، الگوریتم ژنتیک.

۱ مقدمه ای بر نمودار کنترل چند متغیره T^2 هتلینگ و طرح نمونه گیری با فواصل زمانی متغیر

نمودارهای کنترل از پرکاربردترین ابزارهای کنترل آماری فرآیند بوده و نقش مهمی را در ارتقاء کیفیت فرآیندها و محصولات ایفا می کنند. متداول ترین آن ها، نمودار کنترل شوهارت است که به منظور پایش محصول یا فرآیندی تنها با یک مشخصه کیفی بکار می رود. رشد تکنولوژی، ارتقاء خواسته و دانش کیفی مشتریان سبب گردیده است که محصولات و فرآیندها عموماً دارای چندین مشخصه کیفی به هم مرتبط باشند. امروزه کمتر فرآیندی را می توان یافت که تنها دارای یک مشخصه کیفی باشد، از آنرو نمودارهای کنترل چند متغیره از اهمیت ویژه ای برخوردارند. در میان نمودارهای کنترل چندمتغیره، نمودار کنترل T^2 هتلینگ به دلیل سادگی در فهم و به کارگیری آن برای اپراتورها و همچنین به دلیل شباهت زیاد آن به نمودار کنترل تک متغیره شوهارت از محبوبیت خاصی در نمودارهای کنترل چندمتغیره نسبت به MEWMA و MCUSUM برخوردار است.

سیت و بهکاران، طراحی آماری نمودار کنترل چند متغیره T^2 ؛ هتلینگ با دو فاصله زمانی نمونه گیری متغیر؛ استفاده از الگوریتم هتلینگ

p مشخصه کیفی به هم مرتبط را در یک فرآیند یا محصول در نظر بگیرید که از توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین μ_0 و ماتریس واریانس - کواریانس Σ تبعیت می کنند (زمانی که فرآیند تحت کنترل است). به عنوان تعمیمی از حالت یک متغیره، هتلینگ^۱ در سال ۱۹۳۱ آماره زیر را معرفی کرد و این آماره به T^2 - هتلینگ معروف گشت:

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\bar{X} - \mu_0) \quad (1)$$

که در آن $\bar{X}' = \{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p\}$ میانگین p مشخصه کیفی فرآیند در نمونه هایی به حجم n است. وی همچنین ثابت می کند که با فرض معلوم بودن بردار μ_0 و ماتریس واریانس - کواریانس Σ ، آماره T^2 دارای توزیع χ^2 با p درجه آزادی است و لذا حد کنترلی نمودار T^2 هتلینگ، صدک α -ام بالایی آن توزیع در نظر گرفته می شود ($k = \chi^2_{\alpha}(p)$). لذا، فرآیند خارج از کنترل خوانده می شود اگر $T^2 \geq \chi^2_{\alpha}(p)$. معمولاً در عمل، بردار μ_0 و ماتریس Σ نامعلوم اند، از این رو باید برآورد شوند. لذا، زمانی که فرض می شود فرآیند تحت کنترل است، تعداد m نمونه مقدماتی به حجم n از فرآیند گرفته می شود و توسط آنالیز این نمونه های مقدماتی μ_0 و Σ برآورد می شوند. در چنین حالتی، آماره T^2 دارای توزیع F فیشر است و در سطح خطای نوع اول α ، یک حد کنترل برای نمودار T^2 به فرم زیر است (آلت^۲):

$$k = c(m, n, p) F_{\alpha}(p, v) \quad (2)$$

که در آن $F_{\alpha}(p, v)$ بیانگر صدک α ام بالایی توزیع F فیشر با p و v درجه آزادی برای صورت و مخرج است بطوری که:

$$c(m, n, p) = \begin{cases} \frac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} & n > 1 \\ \frac{p(m+1)(m-1)}{m(m-p)} & n = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$v = \begin{cases} m(n-1)-p+1 & n > 1 \\ m(m-p) & n = 1 \end{cases} \quad (4)$$

حال هر زمان که از فرآیند نمونه گیری می شود، آماره T^2 را حساب می کنیم و آن را با k مقایسه می کنیم. مادامی که مقدار آماره کوچک تر از حد کنترل نمودار باشد، در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ فرض می گردد که فرآیند تحت کنترل است. از این رو می توان فرآیند را در سطح خطای نوع I عمومی α به طور دقیق کنترل کرد. حال اگر

¹ Hotelling
² F. ALT

تغییری در میانگین فرآیند رخ دهد به قسمی که میانگین جدید فرآیند برابر $\mu_1 \neq \mu_0$ شود، آن گاه آماره T^2 دارای توزیع فیشر غیر مرکزی با p و v درجه آزادی برای صورت و مخرج و با پارامتر غیر مرکزی زیر است:

$$\eta = n(\mu_1 - \mu_0)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0) = nd^2 \quad (5)$$

توان نمودار برای کشف چنین تغییری در میانگین فرآیند، به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$Power = \left[1 - F \left(\frac{k}{c(m, n, p)}, p, v, \eta = nd^2 \right) \right] \quad (6)$$

که در آن $F(x, p, v, \eta)$ بیانگر مقدار تابع توزیع تجمعی فیشر در نقطه x با p درجه آزادی برای صورت و v درجه آزادی برای مخرج و پارامتر غیر مرکزی η است.

آنچه که مسلم است، مطلوب آن است که نمودار کنترل از توان بالایی در شناسایی تغییرات در میانگین فرآیند برخوردار باشد. متأسفانه مانند نمودار \bar{X} شوهارت، توان نمودار T^2 در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرآیند در مقایسه با نمودارهای MEWMA و MCUSUM نسبتاً پایین است. در حالت یک متغیره، جهت غلبه بر این کاستی، محققان با استفاده از روش نمونه گیری با دو فاصله زمانی متغیر^۳ (VSI) موفق به بهبود توان نمودار \bar{X} شوهارت به طور چشمگیری شده‌اند. که در این راستا می‌توان رینولدز و آرنولد^۴ [۸]، [۹] و رانگر و پیگناتیلو^۵ [۱۰] را نام برد. سپس آپاریسی و هارو^۶ [۲] به تعمیم این شیوه به نمودار کنترل T^2 پرداختند و نشان دادند که این طرح نمونه گیری توان نمودار را به طور چشمگیری بهبود می‌بخشد به قسمی که توان نمودار برای کشف تغییرات متوسط ($d=1$) تقریباً دوبرابر می‌گردد. نمودار طراحی شده توسط آپاریسی و هارو^۷ [۲] بر پایه دو فرض اساسی زیر استوار است:

۱- فرآیند از حالت خارج از کنترل و زمانی که تغییری به اندازه d در میانگین فرآیند رخ داده است، شروع به فعالیت می‌کند.

۲- پارامترهای تحت کنترل فرآیند از قبل مشخص است.

چنانچه می‌دانیم، این دو فرض چندان فرض‌های واقع‌بینانه‌ای نیستند. معمولاً در عمل، قبل از شروع هر فرآیند، مهندس فرآیند با انجام آزمون‌هایی از تحت کنترل بودن آن اطمینان حاصل نموده و سپس اقدام به شروع فعالیت آن می‌نماید. لذا هر فرآیندی از حالت تحت کنترل فعالیت خود را آغاز می‌نماید نه از حالتی خارج از کنترل. بعلاوه، معمولاً پارامترهای تحت کنترل فرآیند نامعلوم اند و لازم است که توسط نمونه های مقدماتی برآورد گردند. این مساله، محدودیت‌های کاربردی بیشماری را برای نمودار معرفی شده توسط آپاریسی و هارو [۲] به

³ Variable Sampling Intervals

⁴ Reynolds & Arnold

⁵ Runger & Pignatiello

⁶ Aparisi, F. and Haro, C.

⁷ Aparisi, F. and Haro, C.

همراه دارد. لذا در این مقاله به طراحی نمودار کنترل T^2 با طرح نمونه گیری با فواصل زمانی متغیر بدون در نظر گرفتن فرضیات فوق می پردازیم. ساختار مقاله به شرح زیر است:

در بخش دوم، مدل نمودار کنترل T^2 با طرح نمونه گیری با فواصل زمانی متغیر طراحی می گردد. در بخش سوم، با استفاده از الگوریتم ژنتیک مدل مذکور بهینه می گردد و پارامترهای نمودار به قسمی برآورد می شوند که توان نمودار پیشینه گردد. در بخش چهارم، با ذکر یک مثال صنعتی کارایی این نمودار با نمودار کنترل T^2 هتلینگ کلاسیک، مقایسه می گردد. سرانجام، نتیجه گیری و پیشنهادات آخرین بخش مقاله را تشکیل می دهند.

۲ طرح نمونه گیری VSI

در نمودار کنترلی T^2 - هتلینگ کلاسیک، همواره نرخ نمونه گیری از فرآیند ثابت است. در واقع همواره نمونه هایی به حجم ثابت n_0 و در فواصل زمانی ثابت h_0 از فرآیند جمع آوری می شوند. در نمودار T^2 VSI، دو فاصله زمانی نمونه گیری h_1 و h_2 مورد استفاده قرار می گیرد به قسمی که $h_2 < h_0 < h_1$ و برای تعیین زمان تغییر در فواصل زمانی نمونه گیری بین زیر گروه ها از حد هشدار w استفاده می شود که $0 < w < k$. این طرح به صورت زیر تعریف می گردد:

اگر مقدار آماره زیر گروه $i-1$ ام در ناحیه میان خط هشدار تا حد کنترلی چارت قرار بگیرد ($w \leq T_{i-1}^2 < k$)، آنگاه، این احتمال وجود دارد که تغییری در میانگین فرآیند رخ داده شده باشد و لذا امکان اعلام یک هشدار از سوی نمودار در زیر گروه بعدی وجود دارد، لذا جهت اعمال کنترل بیشتر بر روی فرآیند، $i-1$ امین زیر گروه بعد از h_2 واحد زمانی، گرفته خواهد شد و در غیر این صورت زمانی که $T_{i-1}^2 < w$ ، نمونه بعدی در h_1 واحد زمانی دیگر از فرآیند جمع آوری خواهد شد. بنابراین، طرح نمونه گیری VSI به فرم زیر تعریف می گردد:

Control Limit: k

$$h_i = \begin{cases} h_2 & w \leq T_{i-1}^2 < k \\ h_1 & T_{i-1}^2 < w \end{cases} \quad (7)$$

آپاریسی و هارو [۲] در طراحی نمودار T^2 VSI از معیار ATS^8 استفاده کرده اند. این معیار زمانی کاربرد دارد که فرآیند از حالت خارج از کنترل شروع به فعالیت نماید. چنانچه عنوان شد، این فرض بیشتر یک فرضیه جهت ساده سازی مراحل طراحی است تا فرضی واقعی [۵]. زمانی که فرآیند از حالت تحت کنترل آماری ($d=0$)، شروع بکار می نماید از تعدیل شده معیار ATS که $AATS^9$ نام دارد استفاده می شود که بیانگر متوسط زمان لازم از وقوع شیفت تا دریافت یک هشدار از سوی نمودار کنترل است. معمولاً فرض می شود که مدت زمانی که فرآیند در حالت تحت کنترل باقی می ماند از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ پیروی می نماید. سپس تغییری در میانگین فرآیند به اندازه d سبب بروز یک حالت خارج از کنترل می گردد. لذا، مقدار AATS زمانی که تغییری به اندازه d در میانگین فرآیند رخ داده باشد، برابر است با:

⁸ Average Time to Signal

⁹ Adjusted Average Time to Signal

$$AATS = ATC - \frac{1}{\lambda}$$

که در آن ATC بیانگر متوسط زمان لازم از شروع تولید تا مشاهده اولین هشدار از سوی نمودار بعد از وقوع تغییر در فرآیند است. معیار ATC را می توان با توجه به ویژگی فقدان حافظه توزیع نمایی و خواص زنجیره مارکوف محاسبه نمود. آنچه مسلم است در هر بار نمونه گیری از فرآیند یکی از حالات زیر رخ می دهد:

حالت ۱: $0 \leq T^2 < w$ و فرآیند تحت کنترل است.

حالت ۲: $w \leq T^2 < k$ و فرآیند تحت کنترل است.

حالت ۳: $0 \leq T^2 < w$ و فرآیند خارج از کنترل است.

حالت ۴: $w \leq T^2 < k$ و فرآیند خارج از کنترل است.

حالت ۵: $T^2 \geq k$ و فرآیند خارج از کنترل است.

زمانی که $T^2 \geq k$ ، نمودار کنترلی هشدار را مبنی بر خارج از کنترل بودن فرآیند اعلام می دارد و فرآیند به منزله بررسی های بیشتر متوقف می شود. چنانچه فرآیند تحت کنترل باشد، این هشدار یک زنگ خطر اشتباهی^{۱۰} است. از آنجا که بعد از رسم هر نقطه در بالای حد کنترلی نمودار، فرآیند رسم نقاط بر روی نمودار کنترلی متوقف می شود، بنابراین، حالت ۵ را می توان حالت جاذب^{۱۱} در زنجیره های مارکوف نامید. مفاهیم اساسی زنجیره های مارکوف را که در این بخش به کار رفته اند را می توان در سینلار^{۱۲} [۴] یافت. برای یک زنجیر مارکوف با چهار حالت گذرای فوق، ماتریس احتمال تغییر وضعیت زمانی به قرار زیر است:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ 0 & 0 & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن p_{ij} بیانگر احتمال تغییر وضعیت به حالت فعلی j از حالت قبلی i است. بعلاوه در ادامه داریم:

$$\eta = n_0 d^2 \text{ و } c = C(m, n_0, p) \text{ و } \nu = \begin{cases} m(n_0 - 1) - p + 1 & n_0 > 1 \\ m(m - p) & n_0 = 1 \end{cases}$$

¹⁰ False Alarm

¹¹ Absorbing State

¹² Cinlar

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= \Pr(T^2 < w | T^2 < k) \times e^{-\lambda h_1} \\
 &= \frac{F(c \times w, p, v, 0)}{F(c \times k, p, v, 0)} \times e^{-\lambda h_1} \\
 p_{12} &= \Pr(w \leq T^2 < k | T^2 < k) \times e^{-\lambda h_1} \\
 &= \frac{F(c \times k, p, v, 0) - F(c \times w, p, v, 0)}{F(c \times k, p, v, 0)} \times e^{-\lambda h_1} \\
 p_{13} &= \Pr(T^2 < w) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \\
 &= F(c \times w, p, \eta) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \\
 p_{14} &= \Pr(w \leq T^2 < k) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \\
 &= (F(c \times k, p, v, \eta) - F(c \times w, p, v, \eta)) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \\
 p_{15} &= \Pr(T^2 > k) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \\
 &= (1 - F(c \times k, p, v, \eta)) \times (1 - e^{-\lambda h_1}) \\
 p_{21} &= \frac{F(c \times w, p, v, 0)}{F(c \times k, p, v, 0)} \times e^{-\lambda h_2} \\
 p_{22} &= \frac{F(c \times k, p, v, 0) - F(c \times w, p, v, 0)}{F(c \times k, p, v, 0)} \times e^{-\lambda h_2} \\
 p_{23} &= F(c \times w, p, v, \eta) \times (1 - e^{-\lambda h_2}) \\
 p_{24} &= (F(c \times k, p, v, \eta) - F(c \times w, p, v, \eta)) \times (1 - e^{-\lambda h_2}) \\
 p_{25} &= (1 - F(c \times k, p, v, \eta)) \times (1 - e^{-\lambda h_2}) \\
 p_{33} &= p_{43} = \Pr(T^2 < w) = F(c \times w, p, v, \eta) \\
 p_{34} &= p_{44} = \Pr(w \leq T^2 < k) = F(c \times k, p, v, \eta) - F(c \times w, p, v, \eta) \\
 p_{35} &= p_{45} = \Pr(T^2 > k) = 1 - F(c \times k, p, v, \eta)
 \end{aligned}$$

حال با توجه به خواص زنجیر مارکوف، امید ریاضی مدت زمان لازم از شروع فرآیند تا رسیدن به حالت جاذب، از فرم زیر به دست می آید:

$$ATC = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{h} \quad (9)$$

که در آن Q همان ماتریس تغییر وضعیت P است که سطر و ستون مربوط به حالت جاذب، حذف شده است و $\mathbf{b}' = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ بردار احتمال‌های آغازین است که در آن $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$ و \mathbf{I} ماتریس همانی از درجه چهار و $\mathbf{h}' = (h_1, h_2, h_1, h_2)$ بردار فواصل زمانی نمونه گیری است. در این مقاله، به منظور اعمال کنترل بیشتر بر روی فرآیند در لحظه شروع به فعالیت آن و همچنین مشکلات احتمالی که در تنظیم اولیه هر فرآیندی رخ می‌دهد، بردار احتمال‌های آغازین را برابر $\mathbf{b}' = (0, 1, 0, 0)$ در نظر می‌گیریم. از طرفی، بدیهی است که هر چه فواصل نمونه گیری را کوتاه‌تر کنیم، قدرت تشخیص نمودار برای شناسایی هر گونه تغییری در فرآیند افزایش می‌یابد، بنابراین به جهت آن‌که بتوان این نمودار را با نمودار کنترل T^2 - کلاسیک مقایسه کرد باید هر دو نمودار از لحاظ توان، زمانی که فرآیند تحت کنترل است، برابر باشند. بنابراین لازم است که متوسط دفعات نمونه گیری هر

دو طرح VSI و کلاسیک، زمانی که فرآیند تحت کنترل است، یکسان باشند. بنا به خواص زنجیر مارکوف، متوسط دفعات نمونه‌گیری برای طرح VSI زمانی که فرآیند تحت کنترل است (حالات ۱ و ۲) برابر است با:

$$ANS = \mathbf{b}'(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(1, 1, 0, 0) \quad (10)$$

زمانی که $w=0$ و $h_1=h_2=h_0$ آن‌گاه طرح VSI به طرح کلاسیک را نتیجه می‌دهد. در این حالت، به راحتی می‌توان نشان داد که ANS برای نمودار T^2 کلاسیک به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$ANS = \frac{1}{1-e^{-\lambda h_0}} \quad (11)$$

حال با تساوی قرار دادن معادلات (۱۰) و (۱۱) و حل آن نسبت به w ، داریم:

$$w = F^{-1}\left(\frac{F(k, p, v, 0) \times (e^{-\lambda h_0} - e^{-\lambda h_2})}{e^{-\lambda h_0} (e^{-\lambda h_1} - e^{-\lambda h_2})}, p, v, 0\right) \quad (12)$$

حال از آنجا که می‌خواهیم در صورت بروز تغییری به اندازه d در میانگین فرآیند، معیار AATS به حداقل مقدار خود برسد، لذا باید مقدار AATS را در معادله (۱۰) با داشتن مقادیر n_0 و p و d و k کمینه کنیم. بنابراین هدف از طراحی نمودار کنترل $VSI T^2$ انتخاب بهینه پارامترهای h_1 و h_2 به قسمی است که توان نمودار برای شناسایی شیفتی به مقدار d در میانگین فرآیند بیشینه گردد. معادله توازن‌گر (۱۲) منجر به طراحی نمودار کنترلی $VSI T^2$ به گونه‌ای می‌گردد که وقتی فرآیند تحت کنترل است، فراوانی نمونه‌گیری هر دو طرح به طور متوسط با هم مساوی و برابر مقدار h_0 باشد. این معادله تضمین می‌کند که کلیه مقایسات بین دو طرح VSI و طرح کلاسیک کاملاً عادلانه بوده و بدون حمایت از یک طرح خاص صورت گرفته است.

۳ فرآیند کمینه سازی و الگوریتم ژنتیک

به منظور آن که نمودار طراحی شده $VSI T^2$ قابلیت کاربرد در صنایع را دارا باشد، در این مقاله محدودیت به منظور آن که نمودار طراحی شده $VSI T^2$ را در نظر گرفته‌ایم. علت این انتخاب آن است که نوبت‌های کاری در صنایع کشور حداکثر ۸ ساعت است. از طرفی، فواصل زمانی کمتر از ۰/۱ ساعت در عمل می‌تواند مشکل ساز شود. در واقع باید این نکته را مد نظر داشت که فرآیند باید مجال تولید n محصول را در فاصله زمانی اندک h_2 داشته باشد. بنابراین، مساله طراحی نمودار کنترل $VSI T^2$ به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \min(AATS) \\ & s.t : \\ & 0 \leq w < k, \\ & 0.1 \leq h_2 \leq h_1 \leq 8 \end{aligned} \quad (13)$$

حل کردن مساله (۱۳) با توجه به قیود آن از روش تحلیلی امکان پذیر نمی باشد. در این مقاله برای حل مساله فوق از تکنیک الگوریتم ژنتیک استفاده می کنیم. الگوریتم ژنتیک یک روش جستجو فرا ابتکاری است که توسط هلند^{۱۳} در سال ۱۹۷۵ معرفی گردید. از آن زمان تا کنون این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم های فرا ابتکاری دیگر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. الگوریتم ژنتیک برای بهینه سازی تابع هدف نیازی به تجزیه و تحلیل ریاضی و پیچیده تابع مورد نظر ندارد و در بسیاری از زمینه های بهینه سازی به طور وسیعی استفاده می شود. در واقع هدف الگوریتم ژنتیک دست یابی به یک بهینه عمومی و نه محلی، بدون بگرنج کردن فضای جواب است. در واقع الگوریتم ژنتیک از یک مجموعه جواب های شدنی کوچک (جمعیت) در یک فرآیند موازی شروع به تولید نسل جدید یا جمعیت جدید می نماید. این فرآیند تکراری برگرفته از مباحث ژنتیکی تکامل موجودات است و نسل جدید را همانند فرآیند بقا به طور کاملاً تصادفی از نسل حاضر تولید می کند. از جمله ویژگی های الگوریتم ژنتیک می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- در الگوریتم ژنتیک، جمعیتی از نقاط (به جای یک نقطه) به صورت موازی مورد جستجو قرار می گیرند.
 - ۲- در الگوریتم ژنتیک از قواعد انتقال احتمالی (به جای قواعد انتقال قطعی) استفاده می شود.
 - ۳- در الگوریتم ژنتیک نیازی به اطلاع درباره مشتق پذیری تابع هدف نیست و تنها کافی است که برای مساله مورد نظر یک تابع برازش تعریف شود.
 - ۴- به راحتی می تواند برای مسائل چند هدفه بکار رود.
 - ۵- برای محیط های نویزی مفید است.
 - ۶- روش های متعددی برای سرعت دهی به الگوریتم و بهبود کیفیت جواب وجود دارد و به محض افزایش آگاهی از دامنه مساله می توان با محدود کردن فضای پاسخ، از این روش ها استفاده نمود.
 - ۷- لیستی از متغیرهای بهینه ارایه می دهد و نه فقط یک جواب بهینه.
- به طور کلی ژنتیک الگوریتم دارای پارامترهای کلیدی زیر است:

جمعیت: الگوریتم ژنتیک با تعدادی از جواب های اولیه شدنی بنام جمعیت اولیه شروع به کار می کند. هر جمعیت دارای N_{pop} کروموزوم می باشد که به طور کاملاً تصادفی از فضای جواب مساله مورد بررسی تولید می شوند. هرچه این کمیت مقدار بزرگتری باشد، در هر نسل محدوده ی بزرگتری از فضای پاسخ مورد بررسی قرار می گیرد. در این مقاله مقدار این پارامتر ۱۰۰ در نظر گرفته شده است.

روش انتخاب^{۱۴}: در این مرحله بر اساس روشی خاص دو کروموزوم به عنوان والد برای نسل کشی انتخاب می شوند. روش های انتخاب متفاوت منجر به نسل های متفاوت خواهند شد. چرخ رولت^{۱۵} و روش انتخابی تورنامنت^{۱۶}، روش های انتخاب استاندارد برای الگوریتم ژنتیک می باشند. معمولاً برای کروموزوم های هر

¹³ Holland

¹⁴ Selection Strategy

¹⁵ Roulette

¹⁶ Tournament

نسل، مقدار تابع هزینه آن‌ها محاسبه می‌شود و به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. آنگاه بهترین‌های هر نسل برای عمل جفت‌گیری انتخاب می‌شوند و مابقی حذف می‌گردند. نرخ انتخاب، X_{rate} کسری از N_{pop} است. تعداد کروموزوم‌هایی که در هر نسل نگهداری می‌شوند برابر است با $X_{keep} = X_{rate} \cdot N_{pop}$. در واقع هر نسل شامل X_{keep} کروموزوم ارشد و $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند است که با عمل جفت‌گیری از والدین بدست آمده‌اند. در این مقاله $X_{rate} = 0.95$ در نظر گرفته شده است.

انتخاب بر اساس چرخه رولت بدین صورت است که در این روش کروموزوم‌های بهتر شانس انتخاب بیشتری دارند و شانس انتخاب کروموزوم متناسب با میزان برازندگی آن کروموزوم است. در روش تورنامنت ابتدا مسابقه‌ای با معمولاً ۲ یا ۳ کروموزوم اجرا می‌شود و در بین آن‌ها بهترین کروموزوم به جمعیت بعدی کپی می‌شود. این عمل به اندازه جمعیت تکرار می‌گردد.

عملگر تلاقی^{۱۷}: عملگر تلاقی استاندارد برای تولید نسل جدید، بدین صورت است که دو والد به عنوان پدر و مادر انتخاب می‌شوند و حاصل جفت‌گیری دو فرزند است. والدین در مجموع باید $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند را تولید کنند تا نسل جدید تکمیل گردد.

عملگر جهش^{۱۸}: برای آن که ژنتیک الگوریتم سریعاً به یک مقدار بهینه محلی همگرا نشود عملگر جهش صورت می‌گیرد تا تنوع بررسی و آزادی عمل الگوریتم در بررسی نقاط فضای جواب افزایش یابد. در اینجا عددی تصادفی از توزیع خاصی به مقدار ژن کروموزوم انتخابی اضافه می‌شود. اغلب کاربران الگوریتم ژنتیک عددی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر را انتخاب می‌کنند. در این روش باید برای واریانس توزیع نرمال مقداری انتخاب شود. البته معمولاً کروموزوم‌هایی برای عمل جهش انتخاب می‌شوند که جزو بهترین کروموزوم‌های هر نسل نباشند.

عملگر نخبگی^{۱۹}: زمانی که از اپراتورهای ژنتیکی استفاده می‌شود ممکن است بهترین کروموزوم‌ها از دست بروند. لذا لازم است که به منظور حفظ بهترین اطلاعات هر نسل، نخبگان هر نسل مستقیماً به نسل بعدی انتقال یابند. در واقع، نخبگی روشی است برای نگهداری یک کپی از بهترین کروموزوم‌های هر نسل در نسل جدید. مکانیزم فوق‌الگوریتم ژنتیک را مجبور می‌سازد تا همواره تعدادی از بهترین‌ها را در هر نسل نگه دارد. به تجربه ثابت شده است که این مکانیزم عملگر الگوریتم ژنتیک را بهبود داده و در ضمن زمان همگرایی را کوتاه می‌نماید. این عملگر توسط گلدبرگ^{۲۰} در سال ۱۹۸۹ معرفی گردید. در این مقاله تعداد کروموزوم‌هایی که طبق این قاعده به نسل بعدی کپی می‌شوند، برابر ۵ در نظر گرفته شده است.

بعد از آنکه عملگر تلاقی و جهش صورت پذیرفت، میزان تابع مطلوبیت برای هر کروموزوم محاسبه می‌شود. کروموزوم‌ها رتبه‌بندی می‌شوند و مجدداً بهترین‌ها انتخاب می‌شوند، معیار توقف بررسی می‌شود و مجدداً این حلقه تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد.

¹⁷ Mating

¹⁸ Mutation

¹⁹ Elitism

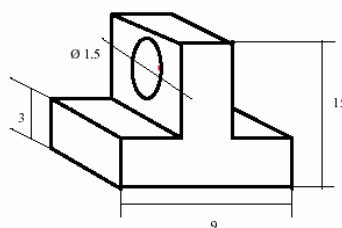
²⁰ Goldberg

جداول (۱) و (۲) نتایج این فرآیند کمینه سازی را برای حالت های دو متغیره و چهار متغیره نشان می دهند. با توجه به جداول، طرح هایی که دارای کمترین مقدار AATS می باشند، با ستاره مشخص شده اند. چنانچه ملاحظه می شود، مقدار بهینه پارامتر h_2 کمترین مقدار خود یعنی عدد ۰/۱ تعیین گردیده است. لذا در طراحی طرح VSI تعیین درست این مقدار حدی کمینه از اهمیت بالایی برخوردار است. از طرفی، معمولاً مهندسان کیفی تمایل دارند که در بازه های زمانی صحیح از فرآیند نمونه گیری نمایند. لذا، در صورتی که امکان نمونه گیری در فواصل زمانی مشخص تعیین شده توسط پارامتر h_1 مقدور نباشد، می توان از طرح های VSI دیگری که در عمل از محبوبیت کاربردی بیشتری برخوردارند، استفاده نمود. این طرح ها که دارای مقادیر صحیحی برای پارامتر h_1 می باشند، در جداول (۱) و (۲) نیز مشخص شده اند. چنانچه ملاحظه می شود، مقدار AATS این طرح های کاربردی اختلاف چندان معنی داری با طرح بهینه متناظرشان ندارند. بهترین حالت از میان حالت های صحیح تعیین شده برای پارامتر h_1 ، نزدیک ترین مقدار صحیح به مقدار بهینه پارامتر h_1 است. در نتیجه این طرح ها می توانند بعنوان یک پاسخ عملی و کاربردی به مساله، در نظر گرفته شوند. آنچه که مسلم است امکان طراحی نمودارهای دیگری با توجه به نحوه عملکرد فرآیند و هرگونه قیود دیگری وجود دارد.

نتایج مقایسه حاکی از آن است که طرح VSI نسبت به طرح کلاسیک از توان بسیار بالاتری در شناسایی تغییرات در میانگین فرآیند برخوردار است و این بهبود در توان نمودار کنترل هتلینگ به ازاء مقادیر کوچک تا متوسط از d به وضوح نمایان است. همچنین متوجه می شویم که به ازاء مقادیر کوچک از d ، خط هشدار از حد کنترل نمودار فاصله می گیرد. این مساله سبب افزایش تواتر نمونه گیری می شود، اما اگر فرآیند تحت کنترل باشد، به طور متوسط فراوانی نمونه گیری از فرآیند با طرح کلاسیک برابر است. اما اگر فرآیند خارج از کنترل بسربرد و تغییری در میانگین فرآیند رخ دهد، این مساله منجر به تشخیص هرچه سریع تر تغییر رخ داده شده می گردد. همچنین، ملاحظه می شود که توان طرح نمونه گیری VSI حتی برای شناسایی تغییرات بزرگ در میانگین فرآیند ($d=2$) نیز بیشتر از طرح کلاسیک است، اما این اختلاف چندان معنی دار نمی باشد، مگر در حالتی که تعداد مشخصات کیفی فرآیند حداقل ($p=2$) است.

۴ مثال کاربردی

در این بخش با ارایه یک مثال کاربردی به مقایسه توان نمودارهای کنترل T^2 هتلینگ با طرح نمونه گیری VSI و طرح کلاسیک می پردازیم. فرض کنید که می خواهیم، چهار مشخصه کیفی قطعه نشان داده شده در شکل ۱ را کنترل کنیم.



شکل ۱: محصول صنعتی با چهار مشخصه کیفی ابعادی

بردار میانگین و ماتریس واریانس-کواریانس فرآیند، توسط $\mu_0 = 50$ (م=) زیر گروه مقدماتی زمانی که فرآیند تحت کنترل است به فرم زیر برآورد گردیده‌اند:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 1.5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.2065 & 0.1269 & 0.0698 & -0.1289 \\ & 0.1370 & 0.0743 & 0.1418 \\ & & 0.0501 & 0.0614 \\ & & & 0.1790 \end{bmatrix}$$

مهندس کنترل کیفیت از یک نمودار کنترل T^2 - کلاسیک با اندازه نمونه‌هایی به حجم $n = 5$ جهت کنترل فرآیند فوق در سطح خطای نوع اول $\alpha = 0.005$ استفاده می‌نماید. در این راستا، وی هر یک ساعت یکبار از فرآیند نمونه‌گیری می‌کند. تجربه نشان داده است که معمولاً فرآیند هر ۱۰۰ ساعت یکبار از کنترل خارج می‌گردد و تغییر رخ داده شده در بردار میانگین فرآیند در مقیاس ماهالانویس برابر واحد ($d=1$) می‌باشد. لذا هدف، اعمال کنترل بر روی تغییری به میزان واحد است. با نمودار کنترل کلاسیک فوق، وی قادر است که تغییر رخ داده شده را در مدت زمان $7/42$ ساعت یا تقریباً 445 دقیقه کشف کند (جدول (۲) را ببینید). این توان به منزله آن است که حدوداً یک نوبت کاری به طول می‌انجامد تا مهندس کیفیت موفق به شناسایی حالت خارج از کنترل و تعمیر فرآیند گردد. در این میان، کلیه محصولات تولید شده با خواسته مشتریان تطابق نداشتند و برای سازمان هزینه دربرخواهند داشت. در این میان می‌توان به هزینه تعمیر یا تعویض محصول و همچنین هزینه برگشت محصول به کارخانه و شکایات و نارضایتی مشتری در صورت دریافت محصول معیوب، نام برد. حال به منظور کنترل بهتر فرآیند و کاهش ریسک، جدول ۲ طرح زیر را پیشنهاد می‌نماید:

$$w = 1.14$$

$$h_2 = 6'$$

$$h_1 = 88'$$

این طرح بدون هیچ گونه تحمیل هزینه‌های نمونه‌گیری اضافی، تغییر مذکور را در مدت زمان تقریبی ۷۹ دقیقه شناسایی و کشف خواهد کرد. در واقع این طرح 366 دقیقه یا حدوداً 6 ساعت زودتر منجر به شناسایی حالت خارج از کنترل در میانگین فرآیند می‌گردد. در واقع، با این طرح نمونه‌گیری، توان نمودار T^2 کلاسیک 82% بهبود می‌یابد. بنابراین به خوبی ملاحظه می‌شود که چگونه طرح VSI می‌تواند به طور چشمگیری مانع تولید محصولات غیر منطبق و خارج از کنترل و در نتیجه منفعت سازمان گردد. در این طرح، هرگاه که احساس شود فرآیند خارج از کنترل است، زمان نمونه‌گیری آتی از فرآیند به شش دقیقه کاهش می‌یابد. در غیر این صورت، فواصل نمونه‌گیری تقریباً به هشتاد و هشت دقیقه افزایش می‌یابند. زمانی که فرآیند واقعاً تحت کنترل است، این طرح به طور متوسط از بعد هزینه‌های نمونه‌گیری (تواتر نمونه‌گیری) هم سطح طرح کلاسیک است. هرچه محصولات تولیدی فرآیندها هزینه برتر و گران تر باشند، مزیت‌های این طرح کنترل بیشتر آشکار می‌گردد.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، نمودار کنترل چند متغیره $VSI T^2$ ارائه گردید. نتایج مقایسات عددی حاکی از آن است که طرح کنترل VSI منجر به شناسایی زودتر تغییرات در میانگین فرآیند می گردد و لذا طرحی کاراتر از طرح کلاسیک است. نتایج مقایسات در جدول ۱ و ۲ حاکی از آن است که طرح نمونه گیری VSI برای شیفتهای کوچک تا متوسط، توان نمودار هتلینگ را نسبت به طرح کلاسیک به طور چشمگیری بهبود می بخشد. هرچه که تعداد مشخصات کیفی افزایش یابد، این اختلاف در دو طرح برای شناسایی تغییرات کوچک تا متوسط چشمگیرتر است.

منابع

- [1] Alt, F.B. (1973), Aspects of Multivariate Control Charts. M. S. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta GA.
- [2] Aparisi, F. and Haro, C.L. (2001), Hotelling's T^2 control chart with variable sampling intervals, International Journal of Production Research, Vol. 39, No. 14, 3127-3140.
- [3] Bai, D. S. and Lee, K. T. (2002), Variable sampling interval \bar{X} control charts with an improved switching rule. International Journal of Production Economics, Vol. 76, 189-199.
- [4] Cinlar, E., (1975), Introduction to Stochastic Processes. PrenticeHall, Englewood Cliffs, NJ.
- [5] Faraz, A. and Moghadam, M. B. (2008), Hotelling's T^2 Control Chart with Two-State Adaptive Sample Sizes, Quality & Quantity, International Journal of methodology, DOI 10.1007/s11135-008-9167-x.
- [6] Hotelling H., (1947), Multivariate quality control - Illustrated by the air testing of sample bombsights. Techniques of Statistical Analysis, Eisenhart, C., Hastay, M.W., Wallis, W.A. (eds), New York: MacGraw-Hill, pp. 111-184.
- [7] Lowry CA, Montgomery DC., (1995), A review of multivariate control charts. IIE Transactions, 27: 800-810.
- [8] Reynolds Jr, M.R., Arnold, J.C., (1989), Optimal one-side Shewhart control chart with variable sampling intervals. Sequential Analysis 8, 51-77.
- [9] Reynolds, M.R., JR., and Arnold, J.C. (1996), Variable sampling intervals \bar{X} charts in the presence of correlation. Journal of Quality technology, Vol. 28, No.2, 12-30.
- [10] Runger, G. C., and Pignatiello, J. J. (1991), Adaptive sampling for process controls. Journal of Quality Technology, Vol. 23, 135-155.

جداول

d	h_1	h_2	w	$AATS_{VSI}$	$AATS_{FRS}$	%
	۴/۷۰	۰/۱	۰/۲۳	۴۲/۵۷*		%۵۲
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۶۷	۴۵/۶۰		%۴۸
۰/۵	۳/۰۰	۰/۱	۰/۳۸	۴۳/۲۵	۸۸/۴۰	%۵۱
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۲۷	۴۲/۶۵		%۵۲
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۲۱	۴۲/۵۸		%۵۲
	۲/۸۰	۰/۱	۰/۴۲	۸/۲۳*		%۶۶
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۶۷	۸/۴۵		%۶۵
۱/۰	۳/۰۰	۰/۱	۰/۳۸	۸/۲۴	۲۳/۹۱	%۶۶
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۲۷	۸/۴۲		%۶۵
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۲۱	۸/۷۲		%۶۴
	۱/۶۷	۰/۱	۰/۹۰	۲/۱۳*		%۷۲
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۶۷	۲/۱۷		%۷۱
۱/۵	۳/۰۰	۰/۱	۰/۳۸	۲/۴۷	۷/۵۱	%۶۷
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۲۷	۲/۸۴		%۶۲
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۲۱	۳/۲۳		%۵۷
	۱/۲۳	۰/۱	۱/۷۴	۰/۹۶*		%۶۷
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۶۷	۱/۱۸		%۶۰
۲/۰	۳/۰۰	۰/۱	۰/۳۸	۱/۵۷	۲/۹۳	%۴۶
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۲۷	۱/۹۸		%۳۲
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۲۱	۲/۳۸		%۱۹

جدول ۱: مقایسه میان نمودارهای کنترل T^2 کلاسیک (FRS) و T^2 VSI برای حالت $p=2$,

$$\lambda = 0.01 \text{ و } m=25, \alpha = 0.005, n_0 = 2$$

d	h_1	h_2	w	$AATS_{VSI}$	$AATS_{FRS}$	%
	۳/۹۴	۰/۱	۰/۴۷	* ۸/۳۷		%۸۳
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۸۱	۸/۹۲		%۸۲
۰/۵	۳/۰۰	۰/۱	۰/۵۷	۸/۴۴	۵۰/۵۸	%۸۳
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۴۶	۸/۳۷		%۸۳
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۴۰	۸/۴۲		%۸۳
	۱/۴۷	۰/۱	۱/۱۴	* ۱/۳۲		%۸۲
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۸۱	۱/۳۷		%۸۲
۱/۰	۳/۰۰	۰/۱	۰/۵۷	۱/۵۳	۷/۴۲	%۷۹
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۴۶	۱/۷۲		%۷۷
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۴۰	۱/۹۰		%۷۴
	۱/۱۳	۰/۱	۱/۸۴	* ۰/۵۸		%۶۷
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۸۱	۰/۷۱		%۵۹
۱/۵	۳/۰۰	۰/۱	۰/۵۷	۰/۸۹	۱/۷۵	%۴۹
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۴۶	۱/۰۹		%۳۸
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۴۰	۱/۲۸		%۲۷
	۱/۱۱	۰/۱	۱/۹۷	* ۰/۴۷		%۳۶
	۲/۰۰	۰/۱	۰/۸۱	۰/۶۰		%۱۸
۲/۰	۳/۰۰	۰/۱	۰/۵۷	۰/۷۹	۰/۷۳	%۸-
	۴/۰۰	۰/۱	۰/۴۶	۰/۹۸		%۳۴-
	۵/۰۰	۰/۱	۰/۴۰	۱/۱۸		%۶۲-

جدول ۲: مقایسه میان نمودارهای کنترل T^2 کلاسیک (FRS) و T^2 VSI برای حالت $p=4$ ،

$$\lambda = 0.01, m=50, \alpha = 0.005, n_0 = 5$$