مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال ششم، شماره ۲۳، زمستان ۸۸، ص ص ۶۸-۶۱

رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری با استفاده از وزن های مشترک

علیرضا امیرتیموری[۱]*، سهراب کردرستمی[۲]، عاطفه معصوم زاده[۳]
[۱]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت
[۲]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان
[۳]کارمند بانک صادرات گیلان و عضو باشگاه پژو هشگران جوان

چکیده

مقاله حاضر به یکی از مهمترین موضوعات تحلیل پوششی داده ها که همان رتبه بندی واحدهای تصمیم گیری است می پردازد. برای این منظور از وزن های مشترک استفاده خواهد شد. ابتدا یک بردار وزنی مشترک برای کلیه واحدهای تصمیم گیرنده به دست می آید و با استفاده از این وزن های مشترک یک اندازه کارایی جدید برای واحدها تعریف و با این اندازه کارایی واحدها رتبه بندی می شوند. کاربردی از روش معرفی شده در بانک های استان گیلان ارایه خواهد شد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، کارایی، رتبه بندی، وزن مشترک.

۱ مقدمه

روش غیر پارامتری تحلیل پوششی داده ها (DEA) روشی مبتنی بر برنامه ریزی خطی است که در آن برای ارزیابی هر واحد تصمیم گیری، یک مسأله برنامه ریزی خطی حل می شود. مدل های پایه ای DEA در بهترین حالت به واحدهای تصمیم گیری کارا اندازه کارائی یک را تخصیص می دهند، لذا این مدل ها تمایزی بین واحدهای کارا ایجاد نمی کنند. لیکن اغلب مایلیم در بین واحدهای کارا نیز یک رتبه بندی انجام دهیم تا رتبه هر یک در مجموعه شناسایی شود. روش های متعددی برای رتبه بندی واحدهای کارا در تحلیل پوششی داده پیشنهاد شد، برای نمونه می توان به کارهای اندرسن و پیترسن(AP)، تون و چن اشاره کرد.[1,4,5]

در تحقیق حاضر یک روش برای رتبه بندی واحدهای کارا پیشنهاد می شود که مبتنی بر استفاده از وزن های مشترک است. به این ترتیب که ابتدا واحدهای کارا و نا کارا طبقه بندی می شوند، سپس به کمک یک روش مبتنی بر DEA یک مجموعه مشترک وزن ها برای واحدهای کارا به دست می آید. به کمک این وزن ها ی مشترک برای هر واحد تصمیم گیری یک اندازه تعریف خواهد شد که بزرگی این اندازه معیاری برای رتبه بندی خواهد بود. سازماندهی بخش های مختلف مقاله به این صورت است که دربخش بعدی مدل AP و معایب آن به طورمختصر بیان می شود. روش پیشنهادی دربخش سوم آمده است. در بخش چهارم یک مطالعه کاربردی دربانک صادرات استان گیلان ارایه می شود. نتیجه گیری دربخش پنجم آمده است.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: teimoori@guilan.ac.ir

۲ رتبه بندی واحدهای کارا

مدل اندرسن و پیترسن (AP) در سال ۱۹۹۳ پیشنهاد گردید، آن ها جهت رتبه بندی DMU_p، آن را از مجموعه واحدهای تصمیم گیری حذف نمودند و مدل را بر روی باقیمانده DMU ها اجرا کردند. فرمول بندی این مدل به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad z^* = \sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rp} \\
& s.t. \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ip} = 1 \\
& \sum_{r=1}^{S} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j = 1,\dots,n,\ j \ne p \\
& u_r \ge \varepsilon, \qquad r = 1,\dots,s \\
& v_i \ge \varepsilon, \qquad i = 1,\dots,m
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

مدل AP دارای مشکلاتی است که اولین و مهمترین آن نشدنی بودن فرم پوششی برای ساختار خاصی از داده ها است. همچنین این مدل ناپایدار است که با حذف بعضی از DMU های باساختارخاص، مقدار بسیار بزرگی برای کارایی به دست می آید که نمی تواند از نظر علمی توجیه شود.

۳ به دست آوردن وزن مشترک برای واحدهای تصمیم گیری

فرض کنید n واحد تصمیم گیری $(DMU_j : j = 1,\dots,n)$ هر کدام با m ورودی و s خروجی مورد نظر هستند. در حالت خاص DMU_j ورودی های $x_j = (x_{1j},\dots,x_{mj}) \ge 0$ را جهت تولید خروجی های $y_j = (y_{1j},\dots,y_{sj}) \ge 0$ مصرف می کند. وزن خروجی های DMU_p را به ترتیب $u_1,\dots,u_s$ و وزن ورودی های آن را $v_1,\dots,v_s$ می گیریم. فرم مضربی مدل CCR که نخستین بارتوسط چارنز، کوپر و رودز (۱۹۷۸) پیشنهاد شد به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} v_i\, x_{ip}} \\
& s.t. \\
& \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r\, y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \quad j = 1,\dots,n, \\
& u_r \ge 0, \qquad r = 1,\dots,s, \\
& v_i \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

مساله فوق یک مساله برنامه ریزی کسری است که با به کار بردن تبدیل چارنز و کوپر(۱۹۶۲) به یک مساله برنامه ریزی خطی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$
\begin{aligned}
& Z_p^* = Max \quad \sum_{r=1}^{s} u_r \ y_{rp} \\
& s.t. \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ip} = 1 \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \, x_{ij} \leq 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
& u_r \geq \overline{\varepsilon}, \qquad r = 1,\ldots,s, \\
& v_i \geq \overline{\varepsilon}, \qquad i = 1,\ldots,m.
\end{aligned} \tag{۳}
$$

مدل فوق برای ارزیابی DMU_p یک بردار وزنی بهینه به صورت (u^*, v^*) تخصیص می دهد. لذا n بردار وزنی برای $n \ \ DMU$ به دست می آید. به کمک این وزن ها برای هرواحد یک اندازه کارایی تعریف می شود. همان طور که از ساختار مدل فوق برمی آید درفضای دوبعدی مجموع توزین شده ورودی ها – خروجی ها نیمساز ربع اول به عنوان خط معیار درنظر گرفته شده و مدل تلاش می کند برای هرواحد تصمیم گیری وزنی را انتخاب کند که زوج مرتب (مجموع توزین شده خروجی ها، مجموع توزین شده ورودی ها) را تاحد ممکن به این خط معیارنزدیک کند. لذا روی این خط معیار، مجموع توزین شده ورودی ها با مجموع توزین شده خروجی ها برابر است. در این مقاله برای به دست آوردن وزن های مشترک ابتدا به کمک مدل های پایه ای مجموعه واحدهای تصمیم گیری به دو دسته کارا (E) و ناکارا (NE) افرازمی شوند. سپس تلاش می کنیم وزن های v_i، u_r را به گونه ای بیابیم که زوج مرتب فوق تا حد ممکن به خط معیار نزدیک شود ودرصورت امکان روی آن قرارگیرد. برای این منظور $\beta > 0$ را به عنوان نشانه درنظرگرفته و مجموع توزین شده خروجی هاو ورودی ها را به ترتیب از پایین و بالا به آن نزدیک می کنیم. به عبارت دیگر نامعادلات زیر را درنظرمی گیریم:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq \beta \qquad j \in E \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \geq \beta \qquad j \in E
\end{aligned}
$$

اکنون تلاش می کنیم به کمک حل یک مساله برنامه ریزی خطی هر یک از عبارات $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ و $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ را به β برسانیم. برای نیل به این هدف مساله برنامه ریزی کسری زیر رادرنظرمی گیریم:

$$Min \qquad \frac{\sum_{j \in E} \rho_j}{\sum_{j \in E} \varphi_j} \tag{۴}$$

$$
\begin{aligned}
& s.t \\
& \rho_j \le \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \le \beta, && j \in E, \\
& \beta \le \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le \varphi_j, && j \in E, \\
& u_r \ge \varepsilon, && r = 1,\ldots,s, \\
& v_i \ge \varepsilon, && i = 1,\ldots,m.
\end{aligned}
$$

ρ_j کران پایینی برای $\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}$ و φ_j کران بالایی برای $\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}$ است. با حل این مساله یک بردار وزنی مشترک برای کلیه DMUها به صورت $u^* = (u_1^*,\ldots,u_s^*)$ و $v^* = (v_1^*,\ldots,v_m^*)$ به دست خواهد آمدکه به کمک آن تمام واحدها با رفتاری یکسان درجهت نزدیک کردن مجموع توزین شده ورودی ها به مجموع توزین شده خروجی ها وزن اختیار می کنند. مساله فوق یک مساله برنامه ریزی کسری است که می توان آن را با به کار بردن تبدیلات چارنز و کوپر به یک مساله برنامه ریزی خطی تبدیل نمود. با فرض $\sum_{j=1}^{n} \varphi_j = 1/t$ مساله زیر را داریم:

$$
\begin{aligned}
& Min \qquad \sum_{j=1}^{n} t\rho_j \\
& s.t \\
& 1 = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j, \\
& t\rho_j \le \sum_{r=1}^{s} u_r \overline{y}_{rj} \le t\beta, && j \in E, \\
& t\beta \le \sum_{i=1}^{m} v_i \overline{x}_{ij} \le t\varphi_j, && j \in E, \\
& u_r \ge \varepsilon && r = 1,\ldots,s, \\
& v_i \ge \varepsilon, && \frac{n!}{r!(n-r)!} i = 1,\ldots,m.
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

اکنون با فرض $t\rho_j = \overline{\rho}_j$, $t\varphi_j = \overline{\varphi}_j$, $tu_r = \overline{u}_r$ و $tv_i = \overline{v}_i$ مدل زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
&Min && \sum_{j=1}^{n} \overline{\rho}_j && \\
&s.t && && \\
& && 1 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi}_j , && \\
& && \overline{\rho}_j \le \sum_{r=1}^{s} \overline{u}_r y_{rj} \le \beta, && j \in E, \\
& && \beta \le \sum_{i=1}^{m} \overline{v}_i x_{ij} \le \overline{\varphi}_j , && j \in E, \\
& && \overline{u}_r \ge \varepsilon, && r = 1,\dots,s , \\
& && \overline{v}_i \ge \varepsilon, && i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{۶}$$

حال با در اختیار داشتن بردار وزنی مشترک، شاخص کارایی به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\pi_p^* = \frac{\sum_{r=1}^{s} \overline{u}_r^* y_{rp}}{\sum_{i=1}^{m} \overline{v}_i^* x_{ip}}, \quad p \in E$$

به راحتی می توان بررسی کرد که $0 < \pi_p^* \le 1$، هرچه π_p^* بزرگتر باشد DMU_p رتبه بهتری خواهد داشت. به کمک این اندازه، تعداد واحدهائی که اندازه یک دارند نسبت به مدل CCR به شدت کاهش خواهد یافت. اما هنوز یک رتبه بندی کاملی روی واحدها صورت نگرفته است. چرا که واحدهایی که اندازه یک دارند احتمالاً بیش از یکی هستند در مرحله بعد برای رتبه بندی واحدهایی که اندازه یک دارند می توان فرایند را روی این واحدها و هربار با حذف این واحدها پیاده کرد. مجدداً به کمک یک مساله برنامه ریزی خطی یک رتبه بندی روی این داده ها انجام خواهد شد.

٤ مثال کاربردی

بانک صادرات استان گیلان دارای ۳۵ شعبه درجه ۴ می باشد. دراین بخش فرایند رتبه بندی ارایه شده دربخش قبل روی این شعب اجرا می شود. برای این منظور مساحت مفید، تعداد کارمندان و هزینه جاری هر شعبه را به عنوان ورودی و منابع، مصارف، کارمزد و درآمد هر شعبه را به عنوان خروجی در نظر می گیریم. به دلیل پاره ای از محدودیت ها از بیان مقادیر کمی ورودی ها و خروجی ها خودداری می شود. با به کار بردن مدل CCR بر روی این ۳۵ شعبه تعداد ده شعبه کارا شدند. میزان کارایی هر شعبه در جدول (۱) آمده است.

ردیف	شماره شعبه	میزان کارائی
۱	۷۰	۱/۰۰۰
۲	۲۲۳	۱/۰۰۰
۳	۲۲۷	۱/۰۰۰
۴	۲۵۶	۰/۷۰۷۴
۵	۲۵۹	۰/۷۱۲۸
۶	۳۴۶	۱/۰۰۰
۷	۳۶۹	۰/۵۹۹۴
۸	۵۰۶	۰/۴۷۴۶
۹	۵۱۵	۰/۷۵۳۷
۱۰	۵۹۶	۰/۶۹۴۶
۱۱	۶۷۷	۰/۸۳۷۸
۱۲	۶۸۱	۱/۰۰۰
۱۳	۷۱۲	۰/۵۵۴۵
۱۴	۷۱۴	۰/۵۸۱۰
۱۵	۷۱۶	۰/۵۷۶۶
۱۶	۷۲۲	۰/۷۵۴۴
۱۷	۷۶۰	۱/۰۰۰
۱۸	۸۹۲	۰/۵۹۸۹
۱۹	۱۱۰۳	۰/۹۰۹۵
۲۰	۱۱۴۹	۰/۵۱۹۷
۲۱	۱۲۰۶	۱/۰۰۰
۲۲	۱۳۳۷	۰/۶۶۲۸
۲۳	۱۶۸۱	۰/۶۳۷۱
۲۴	۲۰۰۹	۰/۷۱۱۸
۲۵	۲۱۲۸	۱/۰۰۰
۲۶	۲۱۶۸	۰/۶۸۹۶
۲۷	۲۶۰۲	۰/۵۲۳۵
۲۸	۲۸۲۹	۰/۵۸۲۶
۲۹	۳۱۱۵	۰/۸۲۵۹
۳۰	۳۱۴۴	۱/۰۰۰
۳۱	۳۵۴۹	۰/۵۷۶۶
۳۲	۳۵۹۴	۰/۷۶۱۵
۳۳	۴۱۴۳	۰/۵۹۴۹
۳۴	۴۱۴۶	۱/۰۰۰
۳۵	۴۳۵۶	۰/۷۳۹۰

جدول ۱: نتایج حاصل از مدل CCR

برای رتبه بندی این ده واحد از روش ارایه شده استفاده شد. نتایج در جدول (۲) گنجانده شده است. مجموع توزین شده ورودی ها و خروجی ها درستون های سوم و چهارم جدول آمده است. مدل AP نیز روی داده ها اجرا شد و نتایج درستون آخر جدول (۲) آمده است. همان طورکه ستون های ۳ و ۴ نشان می دهند شعبه ۷۶۰ بالاترین رتبه را دارد که هر دو مدل این را تایید می کنند.

ردیف	شماره شعبه	مجموع توزین شده ورودی	مجموع توزین شده خروجی	کارایی π_p^*	کارایی واحد در مدل AP
۱	۷۰	۰/۱۱۶۵	۰/۷۴۶	(۴)۰/۶۴۰۳	۱/۴۶۷۶
۲	۲۲۳	۰/۱۱۹۹	۰/۰۶۵۲	(۷)۰/۵۴۳۸	۱/۱۰۵۵
۳	۲۲۷	۰/۰۷۹۴	۰/۰۳۴۴	(۸)۰/۴۳۳۲	۲/۱۲۷۲
۴	۲۵۶	۰/۱۱۵	۰/۰۵۱۰	۰/۴۴۳۵	۰/۷۰۷۴
۵	۲۵۹	۰/۱۳۷۳	۰/۰۴۳۰	۰/۳۱۳۲	۰/۷۱۲۷
۶	۳۴۶	۰/۰۷۹۲	۰/۰۵۸۰	(۶)۰/۷۳۲۳	۲/۱۱۸۸
۷	۳۶۹	۰/۱۲۷۲	۰/۰۴۵۸	۰/۳۶۰۱	۰/۵۹۹۴
۸	۵۰۶	۰/۱۷۷۰	۰/۰۵۰۴	۰/۲۸۴۷	۰/۴۷۴۶
۹	۵۱۵	۰/۰۹۱۲	۰/۰۳۶۹	۰/۴۰۴۶	۰/۷۵۳۶
۱۰	۵۹۶	۰/۰۹۴۶	۰/۰۳۷۰	۰/۳۹۱۱	۰/۶۹۴۹
۱۱	۶۷۷	۰/۰۷۷۰	۰/۰۲۹۶	۰/۳۸۴۴	۰/۸۳۷۷
۱۲	۶۸۱	۰/۱۲۹۲	۰/۰۷۹۲	(۵)۰/۶۱۳۰	۱/۲۲۴۴
۱۳	۷۱۲	۰/۱۱۶۸	۰/۰۳۵۶	۰/۳۰۴۸	۰/۵۵۴۵
۱۴	۷۱۴	۰/۰۹۲۶	۰/۰۳۱۳	۰/۳۳۸۰	۰/۵۸۱۰
۱۵	۷۱۶	۰/۱۲۲۹	۰/۰۴۳۹	۰/۳۵۷۲	۰/۵۷۶۶
۱۶	۷۲۲	۰/۱۱۰۰	۰/۰۳۸۶	۰/۳۵۰۹	۰/۷۵۴۴
۱۷	۷۶۰	۰/۰۷۹۲	۰/۰۷۹۲	(۱)۱/۰۰۰	۹/۰۷۸۶
۱۸	۸۹۲	۰/۰۸۸۴	۰/۰۳۶۸	۰/۴۱۶۳	۰/۵۹۸۹
۱۹	۱۱۰۳	۰/۰۷۹۹	۰/۰۴۴۵	۰/۵۵۶۹	۰/۹۰۹۵
۲۰	۱۱۴۹	۰/۱۱۱۸	۰/۰۳۳۸	۰/۳۰۲۳	۰/۵۱۹۷
۲۱	۱۲۰۶	۰/۱۰۷۲	۰/۰۶۳۹	(۶)۰/۵۹۶۱	۱/۱۸۸۱
۲۲	۱۳۳۷	۰/۰۸۱۹	۰/۰۳۶۰	۰/۴۳۹۶	۰/۶۳۷۱
۲۳	۱۶۸۱	۰/۰۸۴۷	۰/۰۳۴۴	۰/۳۹۴۳	۰,۶۳۷۱
۲۴	۲۰۰۹	۰/۱۱۲۰	۰/۰۵۰۲	۰/۴۴۸۲	۰/۷۱۱۸
۲۵	۲۱۲۸	۰/۰۹۴۹	۰/۰۴۱۹	(۹)۰/۰۴۴۱۵	۱/۸۶۰۲
۲۶	۲۱۶۸	۰/۱۰۱۱	۰/۰۳۴۴	۰/۳۴۰۳	۰/۶۸۹۶
۲۷	۲۶۰۲	۰/۱۰۷۴	۰/۰۲۳۱	۰/۲۱۵۱	۰/۵۲۳۵
۲۸	۲۸۲۹	۰/۱۰۴۸	۰/۰۳۰۹	۰/۲۹۴۸	۰/۵۸۲۶
۲۹	۳۱۱۵	۰/۰۹۱۲	۰/۰۵۱۷	۰/۵۶۶۹	۰/۸۲۵۹
۳۰	۳۱۴۴	۰/۱۱۴۵	۰/۰۷۹۲	(۳)۰/۶۹۱۷	۱/۱۴۲۷
۳۱	۳۵۴۹	۰/۱۰۳۱	۰/۰۳۵۹	۰/۳۴۸۲	۰/۵۷۶۶
۳۲	۳۵۹۴	۰/۰۸۰۴	۰/۰۳۹۶	۰/۴۹۲۵	۰/۷۶۱۵
۳۳	۴۱۴۳	۰/۱۰۵۹	۰/۰۴۵۴	۰/۴۲۸۷	۰/۵۹۴۹
۳۴	۴۱۴۶	۰/۰۷۹۹	۰/۰۲۱۹	(۱۰)۰/۲۷۴۱	۱/۹۴۷۵
۳۵	۴۳۵۶	۰/۰۸۱۴	۰/۰۴۲۰	۰/۵۱۶۰	۰/۷۳۹۰

جدول ۲: نتایج مدل AP و مدل ارایه شده

۵ نتیجه گیری

در این مقاله نیز یک روش برای رتبه بندی واحدهای کارا با به کار بردن وزن های مشترک مطرح شد. به این صورت که ابتدا با به کار بردن یک مدل برنامه ریزی خطی یک بردار وزنی مشترک برای کلیه واحدهای کارا به دست آمد سپس با استفاده از این بردار وزنی مشترک و شاخص کارایی معرفی شده کارائی واحدها را به دست آورده و ملاحظه می گردد که تعداد واحدهای کارا در مدل ارایه شده به شدت کمتر از مدل های متداول است و به این ترتیب یک رتبه بندی بر روی واحدهای کارا انجام می شود. باتکرار روند فوق و با حذف واحدهای دارای رتبه یکسان، می توان به یک رتبه بندی کاملی رسید.

منابع

[1] Anderson P., Peterson N. C., A procedure for ranking efficient unit in data envelopment analysis. Management Science, 1993, 39, 1261-1264.

[2] Charnes A. and Cooper W. W., Programming with linear fractional. Navel Research Logistics Quarterly, 1962, 15, 333-334.

[3] Charnes A. Cooper W. W. and Rhodes E., Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 1978, 2, 429-444.

[4] Chen Y. Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility, European Journal of Operational Research, 2005, 161, 545-551.

[5] Tone K., A slack–based measure of super–efficiency in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research 2002, 143(1), 32-41.