مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال هفتم، شماره ۳ (پیاپی ۲۶)، پاییز ۸۹، ص ص ۱۰-۱
شاپا ۶۰۸۳-۲۰۰۸

نمودار کنترل چند متغیره T^2 هتلینگ با سه اندازه نمونه متغیر

کامیار چالاکی[*]، علی‌رضا فراز
هیئت علمی گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ارومیه، ارومیه، ایران
استادیار دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مسجد سلیمان، خوزستان ، ایران

رسید مقاله: ۸۸/۵/۱۰
پذیرش مقاله: ۸۹/۲/۹

چکیده
این مقاله به طراحی نمودار کنترل چندمتغیره T^2 هتلینگ با سه اندازه نمونه تطبیقی می‌پردازد. در این راستا، برپایه مفاهیم زنجیر مارکوف، نمودار کنترل مذکور مدل‌سازی می‌گردد و سپس با استفاده از تکنیک الگوریتم ژنتیک، پارامترهای نمودار کنترل (در سطح معین خطا) به قسمی تعیین می‌گردند که توان نمودار در شناسایی تغییرات در میانگین فرآیند کمینه گردد.

کلمات کلیدی: نمودار کنترل T^2 هتلینگ، طرح نمونه گیری اندازه نمونه متغیر، زنجیر مارکوف، الگوریتم ژنتیک.

۱ مقدمه
نمودارهای کنترل از پرکاربردترین ابزارهای کنترل آماری فرآیند بوده و نقش مهمی را در ارتقاء کیفیت فرآیندها و محصولات ایفا می‌کنند. متداول‌ترین آن‌ها، نمودار کنترل شوهارت است که به منظور پایش محصول یا فرآیندی تنها با یک مشخصه کیفی به کار می‌رود. رشد تکنولوژی، ارتقاء خواسته و دانش کیفی مشتریان سبب گردیده است که محصولات و فرآیندها عموماً دارای چندین مشخصه کیفی به هم مرتبط باشند. امروزه کمتر فرآیندی را می‌توان یافت که تنها دارای یک مشخصه کیفی باشد، از آن‌رو نمودارهای کنترل چند متغیره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار‌اند. در میان نمودارهای کنترل چندمتغیره، نمودار کنترل T^2 هتلینگ به دلیل سادگی در فهم و به کارگیری آن برای اپراتورها و همچنین به دلیل شباهت زیاد آن به نمودار کنترل تک متغیره شوهارت از محبوبیت خاصی در نمودارهای کنترل چندمتغیره نسبت به MEWMA و MCUSUM برخوردار است [۸].

[*]عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: *k.chalaki@gmail.com*

فرآیند یا محصولی را با p مشخصه کیفی در نظر بگیرید که زمانی که فرآیند تحت کنترل است از توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}_0$ و ماتریس واریانس ـ کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ تبعیت می‌کنند. به‌عنوان تعمیمی از حالت یک متغیره، هتلینگ آماره زیر را معرفی کرد و این آماره به T^2 – هتلینگ معروف گشت:

$$T^2 = n(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \qquad (۱)$$

که در آن $\bar{\mathbf{X}}' = \{\bar{X}_1, ..., \bar{X}_p\}$ میانگین p مشخصه کیفی فرآیند در نمونه‌هایی به حجم n است. وی همچنین ثابت می‌کند که با فرض معلوم بودن بردار $\boldsymbol{\mu}_0$ و ماتریس واریانس–کواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$، آماره T^2 دارای توزیع خی‌دو با p درجه آزادی است و لذا صدک α – ام بالایی آن را می‌توان حد کنترل نمودار T^2 هتلینگ در نظر گرفت. لذا، فرآیند خارج از کنترل فرض می‌گردد اگر $T^2 \geq \chi^2_\alpha(p)$. معمولاً در عمل، بردار $\boldsymbol{\mu}_0$ و ماتریس $\boldsymbol{\Sigma}$ نامعلوم‌اند، از این‌رو باید برآورد شوند. لذا، زمانی که فرض می‌شود فرآیند تحت کنترل است، تعداد m نمونه مقدماتی به حجم n از فرآیند جمع‌آوری می‌شود و توسط آنالیز این نمونه‌های مقدماتی $\boldsymbol{\mu}_0$ و $\boldsymbol{\Sigma}$ برآورد می‌شوند. در چنین حالتی، آماره T^2 دارای توزیع F فیشر است [۱]. لوری و مونتگومری [۱۱] نشان دادند که درصورتی‌که مقدار m به اندازه کافی بزرگ باشد (معمولاً بیشتر از ۲۵ و در بعضی موارد ۵۰)، در آن صورت می‌توان حد کنترل دقیق بر پایه توزیع فیشر را به خوبی توسط صدک α – ام بالایی توزیع خی‌دو تقریب زد. به دلیل سادگی در سراسر مقاله فرض بر آن است که بردار $\boldsymbol{\mu}_0$ و ماتریس $\boldsymbol{\Sigma}$ معلوم‌اند یا توسط اندازه نمونه‌های بزرگ تقریب زده شده‌اند. حال هر زمان که از فرآیند نمونه‌گیری می‌شود، آمارهٔ T^2 محاسبه شده و با حد کنترل مقایسه می‌شود. مادامی که مقدار آماره نمودار کوچک‌تر از حد کنترل باشد، در سطح اطمینان $(1-\alpha)$ فرض می‌گردد که فرآیند تحت کنترل است. از این‌رو می‌توان فرآیند را در سطح خطای نوع I عمومی α به طور دقیق کنترل کرد. حال اگر تغییری در میانگین فرآیند رخ دهد به قسمی که میانگین جدید فرآیند برابر $\boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_0$ شود، آن‌گاه آماره T^2 دارای توزیع خی دو غیر مرکزی با p درجه آزادی و با پارامتر غیر مرکزی زیر است:

$$\eta = n(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0) = nd^2 \qquad (۲)$$

توان نمودار برای کشف چنین تغییری در میانگین فرآیند، به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$Power = \left[1 - F\left(\frac{kv}{p(m+1)(n-1)}, p, \eta = nd^2\right)\right] \qquad (۳)$$

که در آن $F(x,p,\eta)$ بیانگر مقدار تابع توزیع تجمعی خی دو در نقطه x با p درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی η است.

آن‌چه که مسلم است، مطلوب آن است که نمودار کنترل از توان بالایی در شناسایی تغییرات در میانگین فرآیند برخوردار باشد. متاسفانه مانند نمودار $\bar{\mathbf{X}}$ شوهارت، توان نمودار T^2 در شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در میانگین فرآیند در مقایسه با نمودارهای MEWMA و MCUSUM نسبتاً پایین است. در حالت یک متغیره، جهت غلبه بر این کاستی، محققان با استفاده از روش نمونه‌گیری اندازه نمونه متغیر موفق به بهبود توان نمودار $\bar{X}$ شوهارت به طور چشمگیری شده‌اند. که در این راستا می‌توان به دستاوردهای علمی و پژوهشی بور [۳]، دادین

[۴]، پرابهو و همکاران [۶]، و کوستا[۷] اشاره کرد. در حالت چند متغیره، آپاریسی[۲] و فراز و مقدم [۸] به تعمیم این طرح به نمودار کنترل T^2 پرداختند. آن‌ها در مطالعات خود همواره از دو اندازه نمونه متغیر(2-VSS) استفاده کردند و تاکنون در خصوص بناسازی نمودار کنترل T^2 با سه اندازه نمونه تطبیقی تحقیقی صورت نگرفته است. در واقع این مقاله تعمیم مطالعات زیمر و همکاران [۱۲] به حالت چندمتغیره است و به بررسی این مساله می‌پردازد که در نمودار کنترل T^2 هتلینگ، آیا می‌توان با استفاده از سه اندازه نمونه متغیر توان نمودار را بهبود بخشید یا استفاده از دو اندازه نمونه متغیر (2VSS) کافی است؟

ساختار مقاله بدین شرح است: در بخش دوم مقاله، نمودار کنترل T^2 با طرح نمونه گیری سه اندازه نمونه متغیر (3VSS) طراحی می‌گردد. در بخش سوم، با استفاده از الگوریتم ژنتیک، پارامترهای نمودار به قسمی برآورد می‌شوند که توان نمودار بیشینه گردد و به مقایسه طرح 3VSS با طرح 2VSS پرداخته می شود. سرانجام، نتیجه‌گیری و پیشنهادات آخرین بخش مقاله را تشکیل می‌دهند.

۲ طرح نمونه‌گیری 3VSS

در طرح 3VSS از سه اندازه نمونه n_1، n_2 و n_3 استفاده می‌شود به قسمی که $n_1 < n_2 < n_3$. برای تعیین زمان تغییر در اندازه نمونه زیر گروه‌ها از دو حد هشدار w_1 و w_2 استفاده می‌شود که $0 < w_1 < w_2 < k$. این طرح به صورت زیر تعریف می‌گردد:

اگر مقدار آماره زیرگروه i-1 ام در ناحیه اول ($T_{i-1}^2 < w_1$) قرار گیرد، زیرگروه بعدی به حجم n_1 از فرآیند جمع آوری می‌شود. اما اگر T_{i-1}^2 در ناحیه دوم ($w_1 \le T_{i-1}^2 < w_2$) قرار گیرد، آنگاه، این احتمال وجود دارد که تغییری در میانگین فرآیند رخ داده شده باشد و لذا امکان اعلام یک هشدار از سوی نمودار در زیرگروه بعدی وجود دارد، لذا جهت اعمال کنترل بیشتر بر روی فرآیند، i– امین زیر گروه به حجم n_2 خواهد بود. سرانجام چنان‌چه T_{i-1}^2 در ناحیه سوم ($w_2 \le T_{i-1}^2 < k$) قرار گیرد، آنگاه احتمال وقوع یک تغییر در میانگین فرآیند قوت بیشتری می گیرد و لذا اندازه نمونه بعدی به مقدار n_3 افزایش می‌یابد. بنابراین، طرح نمونه‌گیری 3VSS به فرم زیر تعریف می گردد:

Control Limit: k

$$n_i = \begin{cases} n_3 & w_2 \le T_{i-1}^2 < k \\ n_2 & w_1 \le T_{i-1}^2 < w_2 \\ n_1 & T_{i-1}^2 < w_1 \end{cases} \qquad (۴)$$

در این مقاله فرض بر آن است که فرآیند از حالت تحت کنترل آماری (d=0) شروع به فعالیت می‌نماید و مدت زمانی که فرآیند در این حالت باقی می‌ماند، دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است. امروزه جهت مقایسه نمودارهای کنترل با طرح‌های نمونه‌گیری مختلف، از معیار AATS استفاده می‌شود که بیانگر متوسط زمان لازم از وقوع شیفت تا دریافت یک هشدار از سوی نمودار کنترل است. زمانی که فرآیند تحت کنترل است، مقدار

AATS بزرگی را آرزو می‌کنیم. اما زمانی که فرآیند خارج از کنترل بسر می‌برد، نموداری را قدرتمندتر می‌نامیم که دارای مقدار کوچکتری در AATS نسبت به سایر روش‌های دیگر باشد. بنا به تعریف مقدار AATS زمانی که تغییری به اندازه d در میانگین فرآیند رخ داده باشد، برابر است با:

$$AATS = ATC - \frac{1}{\lambda} \tag{۵}$$

که در آن ATC بیانگر متوسط زمان لازم از شروع فرآیند تا مشاهده اولین هشدار از سوی نمودار بعد از وقوع تغییر در فرآیند است. معیار ATC را می‌توان با توجه به ویژگی فقدان حافظه توزیع نمایی و خواص زنجیره مارکوف محاسبه نمود. آنچه مسلم است در هر بار نمونه‌گیری از فرآیند یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

حالت ۱. $T^2 < w_1$ و فرآیند تحت کنترل است.

حالت ۲. $w_1 \le T^2 < w_2$ و فرآیند تحت کنترل است.

حالت ۳. $w_2 \le T^2 < k$ و فرآیند تحت کنترل است.

حالت ۴. $T^2 < w_1$ و فرآیند خارج از کنترل است.

حالت ۵. $w_1 \le T^2 < w_2$ و فرآیند خارج از کنترل است.

حالت ۶. $w_2 \le T^2 < k$ و فرآیند خارج از کنترل است.

زمانی که $T^2 \ge k$، نمودار کنترل هشداری را مبنی بر خارج ازکنترل بودن فرآیند اعلام می‌دارد و فرآیند به منزله بررسی‌های بیشتر متوقف می‌شود. چنان‌چه فرآیند تحت کنترل باشد، این هشدار یک زنگ خطر اشتباهی است، در غیر این صورت، هشداری درست مبنی بر خارج از کنترل بودن فرآیند اعلام شده است و لذا اقدامات اصلاحی در خصوص یافتن عامل تغییر و رفع آن و در نتیجه اطلاح فرآیند آغاز می‌گردد. از آن‌جا که بعد از هر هشدار درست از سوی نمودار، فرآیند رسم نقاط بر روی نمودار کنترل متوقف می‌شود، بنابراین، این حالت را می توان حالت جاذب در زنجیرهای مارکوف در نظر گرفت [۸]. برای یک زنجیر مارکوف با شش حالت گذرا فوق و یک حالت جاذب، ماتریس احتمال تغییر وضعیت آن به فرم زیر است. مفاهیم اساسی زنجیرهای مارکوف به کارگرفته شده در این مقاله و چگونگی محاسبه احتمال‌های گذر را می‌توان به ترتیب در مقالات سینلار[۵] و فراز و سانیگا [۹] یافت.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} & p_{17} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} & p_{27} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} & p_{37} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & p_{46} & p_{47} \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & p_{56} & p_{57} \\ 0 & 0 & 0 & p_{64} & p_{65} & p_{66} & p_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن p_{ij} بیانگر احتمال تغییر وضعیت به حالت فعلی j از حالت قبلی i است. به‌علاوه در ادامه برای $i = 1,2,3$ داریم $\eta_i = n_i d^2$.

$$p_1 = p_{i1} = \Pr(T^2 < w_1 \mid T^2 < k) \times e^{-\lambda h}$$
$$= \frac{F(w_1, p, 0)}{F(k, p, 0)} \times e^{-\lambda h}$$
$$p_2 = p_{i2} = \Pr(w_1 \le T^2 < w_2 \mid T^2 < k) \times e^{-\lambda h}$$
$$= \frac{F(w_2, p, 0) - F(w_1, p, 0)}{F(k, p, 0)} \times e^{-\lambda h}$$
$$p_3 = p_{i3} = \Pr(w_2 \le T^2 < k \mid T^2 < k) \times e^{-\lambda h}$$
$$= \frac{F(k, p, 0) - F(w_2, p, 0)}{F(k, p, 0)} \times e^{-\lambda h}$$
$$p_{i4} = \Pr(T^2 < w_1) \times (1 - e^{-\lambda h})$$
$$= F(w_1, p, \eta_i) \times (1 - e^{-\lambda h})$$
$$p_{i5} = \Pr(w_1 \le T^2 < w_2) \times (1 - e^{-\lambda h})$$
$$= \left[F(w_2, p, \eta_i) - F(w_1, p, \eta_i)\right] \times (1 - e^{-\lambda h})$$
$$p_{i6} = \Pr(w_2 \le T^2 < k) \times (1 - e^{-\lambda h})$$
$$= \left[F(k, p, \eta_i) - F(w_2, p, \eta_i)\right] \times (1 - e^{-\lambda h})$$

and for $j = 4, 5, 6$
$$p_{j4} = F(w_1, p, \eta_{j-3})$$
$$p_{j5} = F(w_2, p, \eta_{j-3}) - F(w_1, p, \eta_{j-3})$$
$$p_{j6} = F(k, p, \eta_{j-3}) - F(w_2, p, \eta_{j-3})$$

حال با توجه به خواص زنجیر مارکوف، امید ریاضی مدت زمان لازم از شروع فرآیند تا رسیدن به حالت جاذب، از فرم زیر به دست می‌آید:

$$ATC = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{h} \tag{۶}$$

که در آن Q همان ماتریس تغییر وضعیت P است که سطر و ستون مربوط به حالت جاذب، حذف شده است و I ماتریس همانی از درجه شش و $\mathbf{h}' = (h,\ h,\ h,\ h,\ h,\ h)$ بردار فواصل زمانی نمونه‌گیری است. همچنین به منظور اعمال کنترل بیشتر بر روی فرآیند در لحظه شروع به فعالیت آن و همچنین جلوگیری از بروز مشکلات احتمالی که در تنظیم اولیه هر فرآیندی رخ می‌دهد، بردار احتمال‌های آغازین را برابر $\mathbf{b}' = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ در نظر می گیریم.

در طرح نمونه‌گیری متغیر 3VSS، مقادیر n_2, n_1 و n_3 به قسمی تعیین می‌گردند که دو نمودار کنترل -T^2 3VSS و T^2-FRS زمانی که فرآیند تحت کنترل است، به طور متوسط دارای مقادیر یکسانی در اندازه نمونه باشند. در واقع، به طور متوسط هر دو طرح زمانی که فرآیند تحت کنترل است، به یک میزان از فرآیند نمونه جمع‌آوری می کنند و لذا این شرط تضمین کننده آن است که مقایسه میان دو طرح 3VSS و FRS کاملاً عادلانه

است. بنا به خواص مقدماتی زنجیره مارکوف، مقدار متوسط نمونه هـای جمـع آوری شـده از فرآینـد زمـانی کـه فرآیند تحت کنترل است، برابر است با

$$ANI = \mathbf{b}'(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(n_1,\ n_2,\ n_3,\ ,0\ ,\ 0,\ 0) \tag{۷}$$

زمانی که $n_1 = n_2 = n_3 = n_0$ و $w_1 = w_2 = 0$ آن‌گاه طرح 3VSS، طرح کلاسیک را نتیجه می‌دهد. در این حالت، به راحتی می‌توان نشان داد که ANI برای نمودار T^2 کلاسیک به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$ANI = \frac{n_0}{1-e^{-\lambda h_0}} \tag{۸}$$

حال با تساوی قرار دادن معادلات (۷) و (۸) و حل آن نسبت به w_2 ، داریم:

$$w_2 = F^{-1}\left(\frac{F(k,p,v,0)(n_3 - n_0/e^{-\lambda h}) - F(w_1,p,v,0)(n_2-n_1)}{(n_3-n_2)}, p, v, 0\right) \tag{۹}$$

حال از آن‌جا که می‌خواهیم در صورت بروز تغییری به اندازه d در میانگین فرآیند، معیار AATS به حداقل مقدار خود برسد، لذا باید مقدار AATS را در معادله (۵) با داشتن مقادیر n_0، h ، p ، d ، w_1، n_1، n_2 و k کمینه کنیم. بنابراین هدف از طراحی آماری نمودار کنترل T^2-3VSS انتخاب بهینه پارامترهای طراحی نمودار (w_1, w_2، n_1, n_2 و n_3) به قسمی است که توان نمودار برای شناسایی تغییری به مقدار d در میانگین فرآیند بیشینه گردد. معادله توازن‌گر (۹) منجر به طراحی نمودار کنترل T^2-3VSS به گونه‌ای می‌گردد که وقتی فرآیند تحت کنترل است، اندازه نمونه هر سه طرح 2VSS ، 3VSS و FRS به طور متوسط با هم مساوی و برابر مقدار n_0 است. این معادله تضمین می‌کند که کلیه مقایسات بین سه طرح مذکور کاملاً عادلانه بوده و بدون حمایت از یک طرح خاص صورت گرفته است.

۳ فرآیند کمینه سازی و الگوریتم ژنتیک

مساله طراحی نمودار کنترل T^2-3VSS به فرم زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned} & Min(AATS) \\ & s.t. \\ & 0 < w_1 < w_2 < k, \\ & n_1 < n_2 < n_3 \\ & n_1, n_2, n_3 \in N \end{aligned} \tag{۱۰}$$

حل کردن مساله بهینه سازی (۱۰) با توجه به قیود آن از روش تحلیلی امکان پذیر نمی‌باشد. در این مقاله برای حل مساله فوق از تکنیک الگوریتم ژنتیک موجود در بسته نرم افزاری MATLAB 2008a استفاده می‌کنیم. در این راستا، کروموزوم ها به صورت بردار $(k, w_1, w_2, n_1, n_2, n_3, h)$ تعریف می‌شوند که ژن های h و k به ترتیب همان مقادیر طرح کلاسیک را به خود می‌گیرند ومقدار ژن w_2 نیز با توجه به معادله (۹) تعیین می گردد.

بنابراین، هدف از طراحی نمودار T^2-3VSS انتخاب بهینه چهار پارامتر w_1، n_1, n_2 و n_3 به قسمی است که مقدار AATS را کمینه می کنند.

الگوریتم ژنتیک یک روش جستجو فرا ابتکاری است که توسط هلند در سال ۱۹۷۵ معرفی گردید. الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی تابع هدف نیازی به تجزیه و تحلیل ریاضی و پیچیده تابع مورد نظر ندارد و در بسیاری از زمینه‌های بهینه‌سازی به طور وسیعی استفاده می‌شود و دارای پارامترهای کلیدی زیر است:

جمعیت: الگوریتم ژنتیک با تعدادی از جواب های اولیه شدنی بنـام جمعیـت اولیـه شـروع بـه کـار مـی‌کنـد. هـر جمعیت دارای N_{pop} کروموزوم می‌باشد که به طور کاملاً تصادفی از فـضای جـواب مـساله مـورد بررسـی تولیـد می‌شوند. هرچه این کمیت مقدار بزرگتری باشد، در هر نسل محدوده‌ی بزرگتری از فـضای پاسـخ مـورد بررسـی قرار می‌گیرد.

روش انتخاب در این مرحله بر اساس روشـی خـاص دو کرومـوزوم بـه عنـوان والـد بـرای نـسل کـشی انتخـاب می‌شوند. روش‌هـای انتخـاب متفـاوت منجـر بـه نـسل‌هـای متفـاوت خواهنـد شـد. چـرخ رولـت و روش انتخـابی تورنامنت، روش‌های انتخاب استانداردی برای الگوریتم ژنتیک می‌باشند. معمولاً برای کروموزوم‌هـای هـر نـسل، مقدار تابع هزینه آن‌ها محاسبه می‌شود و به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. آنگاه بهترین‌های هر نسل بـرای عمـل جفت گیری انتخاب می‌شوند و مابقی حذف می‌گردند. نرخ انتخاب (X_{rate}) کسری از جمعیت است.

عملگر تلاقی عملگر تلاقی استاندارد برای تولید نسل جدید، بدین صورت است که دو والد به عنوان پدر و مادر انتخاب می‌شوند و حاصل جفت‌گیری دو فرزند است.

عملگر جهش برای آن که ژنتیک الگوریتم سریعاً به یک مقدار بهینه محلی همگرا نشود عملگر جهـش صـورت می گیرد تا آزادی عمل الگوریتم در بررسی نقاط مختلف فضای جواب افزایش یابد. در این‌جا عددی تصادفی از توزیع خاصی به مقدار ژن کروموزوم انتخابی اضافه می‌شـود. البتـه معمـولاً کرومـوزوم هـایی بـرای عمـل جهـش انتخاب می‌شوند که جزو بهترین کروموزوم‌های هر نسل نباشند.

عملگر نخبگی استفاده از دو عملگـر الگـوریتم ژنیتیـک ممکـن اسـت بـه از دسـت دادن بهتـرین کرومـوزوم‌هـا بیانجامد. لذا لازم است که به منظور حفظ بهترین اطلاعات هر نسل، نخبگان هر نسل مستقیماً به نسل بعدی انتقـال یابند. مکانیزم فوق الگوریتم ژنتیک را مجبور می‌سازد تا همواره تعدادی از بهترین‌ها را در هر نـسل نگـه دارد. بـه تجربه ثابت شده است که این مکانیزم عملگر الگوریتم ژنتیک را بهبود داده و در ضمن زمان همگرایـی را کوتـاه می‌نماید.

بعد از تولید هر نسل، میزان تابع مطلوبیت برای هر کروموزوم محاسبه می‌شود. کروموزوم‌ها رتبه بندی می‌شـوند و مجدداً بهترین ها انتخاب می‌شوند، معیار توقف بررسی می‌شود و مجدداً این حلقه تا رسیدن به جواب بهینـه ادامـه مـی‌یابـد. مقـادیر پارامترهـای الگـوریتم ژنتیـک در ایـن مقالـه $N_{POP} = ۳۵, \quad N_{elit} = ۳$ و $X_{rate} = ۰/۵$ تعیـین گردیده‌اند. در واقع، در هر نسل تعداد ۳۵ کروموزوم بـه طـور تـصادفی تعیـین مـی شـوند و مقـدار AATS بـرای هرکدام از آن ها تعیین می‌گردد. سپس، سه کروموزوم برتر که دارای بهترین جواب هـا هـستند مـستقیماً بـه نـسل بعدی راه می‌یابند. در ادامه تعداد ۱۶ کروموزوم توسط عملگر تلاقی و ۱۶ کروموزوم توسط عملگر جهش تولیـد

می‌شوند و مجموع این ۳۵ کروموزوم جدید، نسل بعدی را تشکیل می دهند. جداول ۱ و ۲ نتایج این فرآیند کمینه سازی را برای حالت‌های دو و چهار متغیره نشان می‌دهند. طرح‌هایی که دارای کمترین مقدار AATS می باشند، با ستاره مشخص شده‌اند. چنان‌چه ملاحظه می‌شود، نتایج مقایسه حاکی از آن است که طرح 3VSS نسبت به طرح FRS از توان بسیار بالاتری در شناسایی تغیرات در میانگین فرآیند برخوردار است و این بهبود در توان به ازاء مقادیر کوچک تا متوسط از d به وضوح نمایان است. به‌علاوه به ازاء مقادیر کوچکی از d ، پارامترهای n_2 و n_3 مقادیر بزرگی را اختیار می کنند، اما اگر فرآیند تحت کنترل باشد، به سبب آن که خطوط هشدار نزدیک خط کنترل می‌باشند، فراوانی نمونه‌های بزرگ نیز کاهش می‌یابد. اما اگر فرآیند خارج از کنترل باشد و تغییری در میانگین فرآیند رخ دهد، این اندازه نمونه های بزرگ منجر به تشخیص هرچه سریع‌تر تغییر رخ داده شده می گردند. همچنین، ملاحظه می‌شود که توان طرح نمونه‌گیری 3VSS حتی برای شناسایی تغییرات بزرگ در میانگین فرآیند (d=۲) نیز بیشتر از طرح کلاسیک است، اما این اختلاف چندان معنی‌دار نمی‌باشد. با مقایسه‌ای میان دو طرح 2VSS و 3VSS به این نتیجه دست می‌یابیم که گرچه نتایج جدول حاکی از آن است که طرح سه اندازه نمونه متغیر نسبت به طرح دو اندازه نمونه متغیر ارجحیت دارد، اما این بهبود چندان معنی دار نیست. درواقع، طرح حاضر در مقایسه با طرح 2VSS از پیچیدگی های کاربردی بیشتری برخوردار است و از آنجا که اختلاف دو طرح به طور متوسط در حدود ۱٪ است، لذا می توان اذعان داشت که در طرح نمونه گیری متغیر استفاده از دو اندازه نمونه کافی است.

٤ نتیجه گیری

در این مقاله، نمودار کنترل چند متغیره T^2-3VSS ارایه گردید. نتایج مقایسات عددی میان سه طرح FRS، 2VSS و 3VSS حاکی از آن است که طرح کنترل 3VSS نسبت به دو طرح دیگر منجر به شناسایی زودتر تغییرات در میانگین فرآیند می گردد و لذا از دیدگاه تئوری طرحی کاراتر از دو طرح دیگر است. اما با در نظر گرفتن ملاحضات کاربردی طرح پیشنهادی می توان اذعان داشت که در طرح نمونه گیری متغیر استفاده از دو اندازه نمونه کافی است. در واقع بهبود تقریبی ۱٪ طرح مذکور در مقایسه با طرح دو اندازه نمونه متغیر چندان معنی دار نیست که مشوق به کارگیری آن در صنایع تولیدی باشد.

منابع

[1] Alt, FB, (1973), Aspects of Multivariate Control Charts. M. S. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta GA.
[2] Aparisi, F, (1996), Hotelling's T2 Control Chart With Adaptive Sample Sizes, International Journal of Production Research, Vol. 34, No. 10, 2853-2862.
[3] Burr, IW, (1969), Control Charts For Measurements With Varying Sample Sizes. Journal of Quality Technology, No. 1, 163-167.
[4] Cinlar, E, (1975), Introduction to Stochastic Processes. PrenticeHall, Englewood Cliffs, NJ.
[5] Costa, AFB, (1994), Xbar Charts With Variable Sampling Size. Journal of Quality Technology, No. 26, 155-163.
[6] Daudin, JJ, (1992), Double Sampling Xbar Charts. Journal of Quality Technology, 24, 78-87.

[7] Prabhu, SS, Runger, GC, and Keats, JB, (1993), Xbar Chart With Adaptive Sample Sizes. International Journal of Production Research, Vol. 31, 2895-2909.
[8] Faraz, A, and Moghadam, MB, (2008), Hotelling's T^2 Control Chart With Two-State Adaptive Sample Sizes, Quality & Quantity, International Journal of methodology, DOI 10.1007/s11135-008-9167-x.
[9] Faraz, A, and Saniga, E, (2009), Some Corrections on the Markov Chain Approach to Develop Variable Ratio Sampling Scheme Control Charts, Statistical Papers, DOI 10.1007/s00362-009-0288-7.
[10] Hotelling H, (1947), Multivariate Quality Control - Illustrated by the air testing of sample bombsights. Techniques of Statistical Analysis, Eisenhart, C, Hastay, MW, Wallis, WA, (eds), New York: MacGraw-Hill, pp. 111-184.
[11] Lowry CA, Montgomery DC., (1995), A Review Of Multivariate Control Charts. IIE Transactions, 27: 800-810.
[12] Zimmer, LS, Montgomery, DC, and Runger, GC, (1998), Evaluation of a Three-State Adaptive Sample Size $\overline{X}$ Control Chart. International Journal of Production Research, Vol. 36, 733-743.

جداول

n_0	d	w_1	w_2	n_1	n_2	n_3	3VSS	2VSS	FRS
2	0.5	6.82	8.32	1	32	44	30.05*	30.28	76.36
	1.0	4.52	10.55	1	11	29	5.31*	5.39	17.98
	1.5	2.26	4.70	1	3	7	2.17*	2.24	5.27
	2.0	1.69	5.11	1	3	5	1.32*	1.32	2.01
3	0.5	5.35	7.42	1	27	44	16.53*	16.89	54.82
	1.0	2.62	5.79	1	7	15	3.26*	3.42	10.01
	1.5	2.69	5.54	2	5	9	1.55*	1.57	2.68
	2.0	0.37	5.57	2	3	6	0.93*	0.90	1.06
4	0.5	4.42	6.85	1	24	45	11.25*	11.72	41.42
	1.0	3.46	7.74	2	13	19	2.55*	2.57	6.38
	1.5	2.64	5.73	3	6	10	1.21*	1.22	1.66
	2.0	0.13	6.58	3	4	6	0.70*	0.70	0.73
5	0.5	3.61	6.09	1	19	45	8.53*	8.99	32.44
	1.0	2.93	5.75	3	10	18	2.02*	2.09	4.43
	1.5	2.52	6.19	4	7	11	0.99*	1.00	1.17
	2.0	1.39	10.17	4	6	11	0.61*	0.61	0.60

جدول ۱. مقایسه میان نمودارهای کنترل T^2 با طرح نمونه گیری کلاسیک (FRS)، 2VSS و 3VSS با معیار AATS برای حالت $p=2$، $\alpha = 0.005$ و $\lambda = 0.0001$.

n_0	d	w_1	w_2	n_1	n_2	n_3	3VSS	2VSS	FRS
2	0.5	11.13	11.13	1	2	50	40.50*	40.51	100.77
	1.0	7.61	10.56	1	9	15	7.34*	7.44	28.20
	1.5	5.54	9.06	1	4	8	2.80*	2.84	8.32
	2.0	4.15	8.17	1	3	6	1.58*	1.60	3.00
3	0.5	9.86	9.86	1	2	54	22.66*	22.67	76.87
	1.0	5.65	9.31	1	8	17	4.32*	4.41	15.96
	1.5	4.30	8.26	1	5	9	1.88*	1.93	4.09
	2.0	3.51	8.21	2	4	6	1.10*	1.11	1.46
4	0.5	8.39	11.28	1	37	56	15.16*	15.60	60.46
	1.0	4.52	8.58	1	8	18	3.19*	3.28	10.13
	1.5	4.56	8.41	2	6	11	1.49*	1.49	2.43
	2.0	0.00	8.69	3	4	7	0.82*	0.83	0.92
5	0.5	7.56	10.74	1	34	57	11.41*	11.84	48.69
	1.0	4.29	8.35	2	9	19	2.49*	2.61	100.77
	1.5	5.26	8.95	4	7	11	1.22*	1.23	28.20
	2.0	0.00	9.84	4	5	7	0.67*	0.68	8.32

جدول ۲. مقایسه میان نمودارهای کنترل T2 با طرح نمونه گیری کلاسیک (FRS)، 2VSS و 3VSS با معیار AATS برای حالت $p=4$ ، $\alpha = 0.005$ و $\lambda = 0.0001$.