

# اصلاح روش سکستون جهت رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده در تحلیل پوششی داده ها

لیدا حیوه داودی\*<sup>۱</sup>، هدی جهانشاهلو<sup>۲</sup>، محمدرضا معظمی گودرزی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد فیروزکوه

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

رسید مقاله: ۸۹/۴/۸

پذیرش مقاله: ۸۹/۶/۲۸

## چکیده

یکی از موضوعات مورد علاقه محققین تحلیل پوششی داده ها DEA، رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده  $DMU_s$  می باشد. تاکنون روش های زیادی در این زمینه ارائه شده است که یکی از آن ها روش سکستون می باشد. در این مقاله روش مذکور به گونه ای اصلاح شده است که مشکل ناشی از وجود جواب های بهینه چندگانه در مدل مضربی برطرف گردیده است. به عبارت دیگر رتبه های به دست آمده برای واحدها منحصر بفرد خواهد بود. به منظور نشان دادن درستی روش اصلاح شده و مقایسه نتایج حاصل از آن با روش رتبه بندی اندرسون-پیترسون چند مثال عددی ارائه نموده ایم.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده ها، رتبه بندی.

## ۱ مقدمه

پس از انتشار مقاله CCR در سال ۱۹۷۸ و گسترش آن توسط مقاله BCC، مساله ی رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده کارا ( $DMU_s$ )، که معمولاً تعداد آن ها در ارزیابی با مدل های DEA بیش از یکی می باشد، مطرح گردید. در این راستا مدل های متفاوتی ارائه شده که برای اطلاعات بیشتر می توان به مقاله ادلر [۱] مراجعه نمود. یکی از این روش ها روش سکستون می باشد که به دلیل منحصر بفرد نبودن جواب های بهینه ی مدل مضربی با مشکل روبرو می باشد. به عبارت دیگر براساس انتخاب جواب بهینه، جدول مربوط به روش سکستون و در نتیجه رتبه یک DEA تغییر خواهد کرد. در این مقاله با ارائه مدلی این ضعف برطرف می گردد. مدل سکستون این امتیاز را دارد که در آن واحدهای کارای غیررأسی نیز رتبه بندی می شوند.

<sup>©</sup>عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: [moazami77@gmail.com](mailto:moazami77@gmail.com)

حیوه داودی و بهنگارن، اصلاح روش سکستون جهت ترسبندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها

در قسمت بعد مروری بر مدل‌های CCR و BCC، اندرسون-پیترسون (AP) [۲] و سکستون خواهیم داشت. در قسمت سوم مدل اصلاح شده ارائه می‌گردد. در چهارمین قسمت مقاله با استفاده از چند مثال نتایج حاصل از مدل اصلاح شده را با مدل AP مقایسه می‌کنیم و بالاخره در آخرین قسمت نتایج و مطالب پیشنهادی برای ادامه تحقیقات پیش رو گذاشته می‌شود.

## ۲ مروری بر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید سیستم تحت ارزیابی شامل  $n$  واحد تصمیم‌گیرنده ی متجانس به صورت  $DMU_j (j=1, \dots, n)$  است که  $m$  ورودی  $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$  را برای تولید  $s$  خروجی  $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$  مصرف می‌نماید. علاوه بر این فرض کنید ورودی‌ها و خروجی‌های هر  $DMU$  همگی نامنفی اند و هر  $DMU$  حداقل یک ورودی مثبت و یک خروجی مثبت دارد. ماتریس از مرتبه  $m \times n$ ،  $X = [X_1, \dots, X_n]$  را به عنوان ماتریس ورودی‌ها و ماتریس از مرتبه  $s \times n$ ،  $Y = [Y_1, \dots, Y_n]$  را به عنوان ماتریس خروجی‌ها تعریف می‌کنیم. بعلاوه فرض کنید  $1$  برداری از  $1$ ها از بعد مقتضی باشد. برای ارزیابی  $DMU_0$  که در آن  $0 \in \{1, \dots, n\}$  مدل‌های زیر به کار می‌روند.

Min  $\theta$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & X\lambda \leq \theta X_0, \\ & Y\lambda \geq Y_0, \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Max  $\psi$

$$\begin{aligned} & X\lambda \leq X_0, \\ & Y\lambda \geq \psi Y_0, \\ & \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

مدل‌های فوق معروف به مدل CCR می‌باشند که (۱) در ماهیت ورودی و (۲) در ماهیت خروجی است. اگر به قیدهای مدل‌های (۱) و (۲) قید  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  افزوده شود، مدل BCC به ترتیب در ماهیت ورودی و خروجی حاصل می‌گردد.

دو آل مدل‌های (۱) و (۲) به ترتیب به صورت (۳) و (۴) می‌باشند.

Max  $u^t Y_0$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & u^t X_0 = 1 \\ & u^t Y - v^t X \leq 0 \\ & u \geq 0, v \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Min } & v^t X_0 \\ \text{s.t. } & u^t Y_0 = 1, \\ & v^t X - u^t Y \leq 0, \\ & u \geq 0, v \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

در ارزیابی DMU ها به وسیله مدل های DMU، از جمله مدل های فوق، معمولاً تعداد واحدهای کارا بیش از یکی می باشد. از این رو باید آن ها را رتبه بندی کنیم. یکی از مدل های پیشنهادی در این زمینه توسط اندرسون و پیترسون ارائه گردید که به مدل *AP* معروف و به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \text{Min } & \theta \\ \text{s.t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j X_j \leq \theta X, \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 0}}^n \lambda_j Y_j \geq Y_0, \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

این مدل و بیشتر مدل های پیشنهادی قادر نیستند DMU های کارای غیررسانی را رتبه بندی کنند. از این رو مدل سکستون به صورت زیر پیشنهاد گردید.

ابتدا  $DMU_j (j=1, \dots, n)$  را با یکی از مدل های DEA ارزیابی می کنیم. فرض کنید  $(u^{*p}, v^{*p}); p=1, \dots, n$  بردار وزنی بهینه حاصل از مدل زیر در ارزیابی  $DMU_p$  باشد.

$$\begin{aligned} \text{Max } & u^t Y_0 \\ \text{s.t. } & u^t X_0 = 1 \\ & u^t Y - v^t X \leq 0 \\ & u \geq 0, v \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

با استفاده از وزن های به دست آمده جدول زیر را می سازیم.

	DMU1	DMU2	...	DMUn
DMU1	$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	...	$\theta_{1n}$
DMU2	$\theta_{21}$	$\theta_{22}$	...	$\theta_{2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
DMUn	$\theta_{n1}$	$\theta_{n2}$	...	$\theta_{nn}$

جدول ۱

که در آن

$$\theta_{ij} = \frac{u^{*i} Y_j}{v^{*i} X_j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

واضح است که به ازای هر  $i$  و  $j$  داریم  $\theta_{ii} \geq \theta_{ij}$ .

با استفاده از مقادیر به دست آمده برای جدول (۱)، مقدار  $\theta_j^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_{ij}$  محاسبه می‌گردد. این مقدار به عنوان معیار رتبه بندی برای  $DMU_j$  در نظر گرفته می‌شود، به این صورت که هرچه این مقدار بیشتر باشد  $DMU_j$  نسبت به سایر  $DMU$ ها در رتبه ی بالاتری قرار می‌گیرد. همان طور که گفته شد مشکل روش فوق در وجود جواب های بهینه چندگانه می‌باشد. به عبارت دیگر با استفاده از جواب های بهینه ی متفاوت برای مدل مضربی  $\theta_j^*$  های متفاوتی به دست می‌آید. برای رفع این مشکل روش زیر پیشنهاد می‌گردد.

#### ۴ روش اصلاح شده

برای برطرف نمودن مشکل فوق ابتدا  $DMU_j (j=1, \dots, n)$  را با یکی از مدل های DEA ارزیابی می‌کنیم. فرض کنید  $(u^{*p}, v^{*p})$ ;  $p=1, \dots, n$  بردار وزنی بهینه حاصل از مدل (۳) در ارزیابی  $DMU_p$  باشد. در این صورت خواهیم داشت

$$\theta_{ii} = u^{*i} Y_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (۸)$$

برای محاسبه سایر عناصر جدول روش اصلاح شده (متناظر جدول ۱) به جز قطر اصلی، مثلاً سطر  $k$ ام  $(k=1, \dots, n)$  به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\theta_{kj} = \text{Max} \frac{u^t Y_j}{v^t X_j}, \quad j=1, \dots, n, j \neq k, \quad (۹)$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{u^t Y_k}{v^t X_k} = \theta_{kk},$$

$$\frac{u^t Y_i}{v^t X_i} \leq 1, \quad i=1, \dots, n,$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

در حقیقت  $n(n-1)$  مساله برای به دست آوردن اعضای جدول حل می‌شود و بدین صورت اعضای جدول منحصربفرد خواهند بود. با استفاده از تغییر متغیر و تبدیلات مناسب می‌توان مساله ی (۹) را به یک مساله ی برنامه ریزی خطی (LP) به صورت زیر تبدیل کرد.

$$\theta_{kj} = \text{Max} u^t Y_j \quad (۱۰)$$

$$\text{s.t.} \quad v^t X_j = 1,$$

$$u^t Y_k - \theta_{kk} v^t X_k = 0,$$

$$u^t Y_i - v^t X_i \leq 0, \quad i=1, \dots, n,$$

$$u \geq 0, \quad v \geq 0.$$

در واقع با استفاده از مدل (۱۰) عناصر تشکیل دهنده ی جدول بجز قطر اصلی محاسبه می‌شوند و ادامه روش همانند روش سکستون می‌باشد.

## ۵ مثال های عددی

در این بخش برای نشان دادن درستی روش ارایه شده و مقایسه نتایج حاصل از آن با روش AP از چند مثال عددی استفاده نموده ایم.

### مثال ۵-۱

جدول (۲) شامل اطلاعات مربوط به ۹ تا DMU است که هر کدام از آن ها دارای دو ورودی و دو خروجی می باشند.

DMU <sub>S</sub>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Input(I <sub>1</sub> )	1.5	2	1.2	3	0.5	2	3	3	4
Input(I <sub>2</sub> )	2	1	1.5	0	3	3	2.5	4	1
Output(O <sub>1</sub> )	3	1.5	2.5	4	3	4.8	3.5	4	5
Output(O <sub>2</sub> )	1	3	5.5	1	5.5	4	3	4	5

جدول ۲. ورودی و خروجی های ۹ واحد تصمیم گیرنده

با استفاده از روش پیشنهادی در مورد داده های فوق جدول اصلاح شده، متناظر جدول مربوط به روش سکستون، به صورت (۳) حاصل می شود.

	DMU <sub>1</sub>	DMU <sub>2</sub>	DMU <sub>3</sub>	DMU <sub>4</sub>	DMU <sub>5</sub>	DMU <sub>6</sub>	DMU <sub>7</sub>	DMU <sub>8</sub>	DMU <sub>9</sub>
DMU <sub>1</sub>	27/32	27/62	75/83	1	1	24/25	63/107	9/16	9/11
DMU <sub>2</sub>	24/175	18/25	1	4/5	132/245	24/65	36/115	48/175	1
DMU <sub>3</sub>	227/292	18/25	1	1	1	1912/2065	559/955	81/146	1
DMU <sub>4</sub>	27/32	9/13	1	1	1	24/25	63/107	9/16	1
DMU <sub>5</sub>	27/32	267/542	1	1	1	24/25	63/107	9/16	135/157
DMU <sub>6</sub>	27/32	27/62	75/83	1	1	24/25	63/107	9/16	9/11
DMU <sub>7</sub>	27/32	27/62	75/83	1	1	24/25	63/107	9/16	9/11
DMU <sub>8</sub>	27/32	27/62	75/83	1	1	24/25	63/107	9/16	9/11
DMU <sub>9</sub>	26/115	18/25	1	1	89/155	188/425	56/155	36/115	1

جدول ۳. داده های مربوط به روش سکستون

نتایج حاصل از روش اصلاح شده در مقایسه با رتبه های به دست آمده از روش AP را جهت مقایسه در جدول (۴) آورده ایم .

DMU <sub>S</sub>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MA ranking	0.6892	0.5652	0.9571	0.9778	0.9014	0.8330	0.5325	0.5019	0.9036
AP ranking	6	7	2	1	4	5	8	9	3
MA ranking	0.84	0.72	1.56	Unb	2.78	0.96	0.59	0.56	1.06
AP ranking	6	7	3	1	2	5	8	9	4

جدول ۴. نتایج حاصل از روش اصلاح شده

در مدل AP هر چقدر مقدار بهینه‌ی تابع هدف بیشتر باشد واحد تحت ارزیابی در رتبه‌ی بالاتری قرار می‌گیرد. و چون در مورد DMU4 مقدار بهینه‌ی تابع هدف نامتناهی است در واقع این واحد در رتبه‌ی اول قرار می‌گیرد. در صورتی که در مورد چند DMU این اتفاق رخ دهد روش AP راهکاری ندارد در صورتی که در روش اصلاح شده با این مشکل روبرو نیستیم و این یکی از نقاط قوت روش اصلاح شده می‌باشد. در مثال بعد توانایی روش اصلاح شده جهت رتبه‌بندی DMU های کارای غیررأسی را در مقایسه با روش AP ارایه نموده ایم.

## مثال ۵-۲

در این مثال ۱۴، DMU در نظر گرفته ایم که هر کدام از آن‌ها دارای دو ورودی و یک خروجی می‌باشند. خروجی همه‌ی DMU ها به طور ثابت عدد یک در نظر گرفته شده است. جدول (۴) حاوی مختصات مربوط به DMU های مذکور می‌باشد. اگر با استفاده از مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی این ۱۴ DMU را مورد ارزیابی قرار دهیم معلوم می‌شود DMU11, DMU12, DMU13, DMU14 ناکارا و بقیه کارا می‌باشند. از بین DMU های کارا DMU1, DMU4 و DMU8 رأسی می‌باشند. نتایج حاصل از مدل AP در جدول (۷) آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود این مدل فقط می‌تواند در این مثال DMU های رأسی را رتبه‌بندی نماید و در مورد بقیه راهکاری ارایه نمی‌کند.

جدول (۶)، جدول مربوط به روش اصلاح شده می‌باشد. با استفاده از اطلاعات موجود در این جدول نتایج رتبه‌بندی با استفاده از روش اصلاح شده را برای مقایسه با مدل AP در جدول (۶) آورده ایم. همان طور که ملاحظه می‌شود روش اصلاح شده توانایی رتبه‌بندی همه‌ی DMU ها را دارد. و این یکی از نقاط قوت این روش می‌باشد.

DMU <sub>S</sub>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Input (I <sub>1</sub> )	2	5/2	11/4	3	4	6	7	9	2	11	3	5	7	13
Input (I <sub>2</sub> )	6	9/2	15/4	3	8/3	2	5/3	1	7	1	12	5	3	3/2
Output (O)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

جدول ۵

DMU <sub>S</sub>	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14
DMU <sub>1</sub>	1	1	1	1	9/11	3/5	9/17	3/7	1	6/17	2/3	3/5	1/2	8/27
DMU <sub>2</sub>	1	1	1	1	9/11	3/5	9/17	3/7	12/3	6/17	4/7	3/5	1/2	8/27
DMU <sub>3</sub>	1	1	1	1	9/11	3/5	9/17	3/7	12/3	6/17	4/7	3/5	1/2	8/27
DMU <sub>4</sub>	1	1	1	1	1	1	1	1	12/3	6/7	4/7	3/5	3/4	24/35
DMU <sub>5</sub>	3/5	3/4	6/7	1	1	1	1	1	12/3	6/7	4/13	3/5	3/4	24/35
DMU <sub>6</sub>	3/5	3/4	6/7	1	1	1	1	1	12/2 3	6/7	4/13	3/5	3/4	24/35
DMU <sub>7</sub>	3/5	3/4	6/7	1	1	1	1	1	12/2 3	6/7	4/13	3/5	3/4	24/35
DMU <sub>8</sub>	3/5	3/4	6/7	1	1	1	1	1	12/2 3	1	4/13	3/5	3/4	24/35
DMU <sub>9</sub>	1	4/5	8/11	2/3	1/2	1/3	2/7	2/9	1	2/11	2/3	2/5	2/7	2/13
DMU <sub>10</sub>	1/6	2/9	4/15	1/3	3/8	1/2	3/5	1	1/7	1	1/12	1/5	1/3	2/3
DMU <sub>11</sub>	1	4/5	8/11	2/3	1/2	1/3	2/7	2/9	1	2/11	2/3	2/5	2/7	2/13
DMU <sub>12</sub>	1	1	1	1	1	1	1	1	12/1 3	6/7	4/7	3/5	3/4	24/35
DMU <sub>13</sub>	3/5	3/4	6/7	1	1	1	1	1	12/1 3	6/7	4/13	3/5	3/4	24/35
DMU <sub>14</sub>	3/5	3/4	6/7	1	1	1	1	1	12/1 3	6/7	4/13	3/5	3/4	24/35

جدول ۶

DMU <sub>S</sub>	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14
MA	10.7666	11.3222	11.8639	12.6666	11.8295	10.9666	10.7596	10. 730	11. 450	9.42 24	6.21 51	5.6	8.40 47	7.34 88
ranking	7	5	2	1	3	6	8	9	4	10	13	14	11	12
AP	1.0625	1	1	1.0952	1	1	1	1.1 333	1	1	0.66 66	0.60 00	0.75 00	0.68 57
ranking	3	-	-	2	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-

جدول ۷

## ۶ نتایج و پیشنهادها

رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده یکی از مهمترین مفاهیم در تحلیل پوششی داده ها می باشد و سهم عمده ای از تحقیقات در زمینه *DEA* را به خود اختصاص داده است. تاکنون محققین روش های مختلفی برای رسیدن به این هدف ارائه کرده اند، که در طول مقاله به چند روش از آن ها اشاره شد. اغلب روش های ارائه شده راهکاری برای رتبه بندی واحدهای کارای غیررأسی ارائه نداده اند. یکی از روش هایی که فاقد این مشکل است روش سکستون می باشد که خود این روش با مشکل وجود جواب های بهینه ی چندگانه برای مدل مضربی روبرو است. در این مقاله روشی ارائه کردیم که همه ی مشکلات فوق الذکر در آن مرتفع گردیده. برای نشان دادن درستی روش ارائه شده چند مثال آوردیم و نتایج آن را با مدل *AP* مقایسه نمودیم، که نتایج هر دو مثال حکایت از تأیید و برتری روش ارائه شده داشتند. در پایان توسیع روش برای حالتی که داده ها به صورت بازه ای، فازی و تصادفی می باشند برای تحقیقات آتی توصیه می شود.

## منابع

- [1] Adler, N. Friedman, L. Sinuany-Stren, Z. 2002. Review of ranking methods in the envelopment analysis. *European journal of operational research* 140, 249-265.
- [2] Anderson, P. Peterson, N.C. 1993. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management science* 39(10), 1261-1264.
- [3] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*. 2, 429-444.
- [4] Shanling, L. Jahanshahloo, G.R. Khodabakhshi, M. 2007. super-efficiency model for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Appl. Math. Cpmput.* 184 638-648.
- [5] Jahanshahloo, G.R. Junior, H.V. Hosseinzadeh Lotfi, F. Akbarian, D. 2007. A new DEA ranking system based on changing the reference set, *Eur. J. Oper. Res.* 181 133-337.
- [6] Cooper, W.W., Ruiz, J.L., Sirvent, I., 2007. Choosing weight from alternative optimal solution of dual multiplier models in DEA. *European Journal of Operation Research* 180, 443-458.