

مجله تاریخ علم، شماره ۶، ۱۳۸۷، ص ۶۹-۱۰۴

رساله‌ای فارسی درباره محاسبه جیب یک درجه^۱

فاطمه سوادی

f_savadi@yahoo.com

کارشناس ارشد تاریخ و تمدن ملل اسلامی

چکیده

(تاریخ دریافت: ۸۷/۰۳/۱۲ تاریخ پذیرش: ۸۷/۰۸/۰۶)

در بیان استخراج جیب یک درجه رساله‌ای است به زبان فارسی از مصنفی ناشناس که ظاهراً به منظور تقریر و توضیح روش محاسبه جیب (سینوس) یک درجه بر اساس شرح قوشچی (د. ۸۷۹ ق) بر زیج الغ بیگ (فارسی) و رساله فی استخراج جیب درجه واحده (عربی) اثر قاضی‌زاده (د. حدود ۸۴۰ ق) تألیف شده است. اثری که مبدع اصلی این روش، غیاث‌الدین جمشید کاشانی (د. ۸۳۲ ق)، در این باره نوشته، تاکنون به دست نیامده، اما اثر قاضی‌زاده که در واقع تحریری است از روش کاشانی، در نسخه‌هایی متعدد برجای مانده است. قوشچی نیز بدون ذکر نام کاشانی، روش وی را شرح می‌دهد. در این مقاله بازنویسی رساله در بیان استخراج جیب یک درجه بر اساس نسخه منحصر به فرد کتابخانه دولتی برلین به گونه‌ای صورت گرفته که میزان و نحوه اقتباس مصنف رساله از آثار قاضی‌زاده و قوشچی مشخص شود.

کلید واژه‌ها: جیب یک درجه، کاشانی، قاضی‌زاده، الغ بیگ

مقدمه

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان و اخترشناس مشهور ایرانی، با ابداع یک روش تکرار برای حل معادله درجه سوم حاصل از تثلیث زاویه سه درجه، مقدار جیب یک درجه را در مبنای ۶۰ و در دایره مثلثاتی به شعاع ۶۰، برای نخستین بار با دقتی قابل توجه، برابر با ۱۶,۱۹,۱۶,۱۴,۴۴,۱۱,۱۴,۴۳,۱۱,۲,۴۹,۴۳ محاسبه کرد. کاشانی با آگاهی کامل از اهمیت ابداع خود، در حاشیه یکی از صفحات زیج خاقانی

۱. به یاد ب.آ. رزنفلد (B.A. Rosenfeld) که این نسخه را معرفی کرد.

گ ۲۶ پ)، که آن را به الغیبگ^۱ تقدیم کرده است، چنین می نویسد:

«و متقدمان طریقه نیافته اند کی مطلقاً جیب ثلث معلوم الجیب استخراج توان کرد، ما طریقه [ای] استنباط کردیم و در شرح آن رساله [ای] علی حده نوشتیم. جیب یک درجه به آن طریق بیرون آوردیم، بود: اب مط مج یا یدمد یو یط یو تاسعه. هذه حاشیة لمصنفه»

وی در مقدمه *مفتاح الحساب* (گ ۱ پ) - که آن را نیز به الغیبگ تقدیم کرده است - هنگام معرفی آثارش، از این اثر نیز با نام *رسالة الوتر و الجیب* یاد می کند. از این رساله که موضوع آن به گفته خود کاشانی روش کلی محاسبه سینوس و وتر یک سوم زاویه ای است که سینوس و وتر آن را می دانیم، تا کنون نسخه ای به دست نیامده است.

در قدیمی ترین نسخه خطی موجود از *مفتاح الحساب* (۳۱۸۰/۱) کتابخانه ملی (ملک) که به فاصله حدود دو ماه از تألیف و در زمان حیات کاشانی، به دست معین الدین کاشانی، همکار و احتمالاً خویشاوند کاشانی (← محیط، ص ۶)، کتابت شده، جایی که کاشانی می خواهد *رسالة الوتر و الجیب* را معرفی کند، حاشیه ای عربی به خط کاتب وجود دارد که ترجمه آن به شرح زیر است:

«جیب یک درجه را تا نه مرتبه شصتگانی، در نهایت درستی و دقت، به روش جبر و مقابله - اما بدون استفاده از مسائل شش گانه - محاسبه کرد، ولی موفق نشد رساله [اش در این باره] را تمام کند و حکیم فیلسوف قاضی زاده رومی بر اساس پیش نویس رساله کاشانی رساله ای مشروح نوشت که در این مجموعه کتابت شده است.»^۲

۱. نوه تیمور گورکانی که به سال ۷۹۶ ق در قلعه سلطانیة زنجان به دنیا آمد. الغیبگ از ۸۱۱ ق تا ۸۵۰ ق زیر نظر پدرش شاهرخ، امیر ماوراءالنهر بود، و پس از درگذشت وی در ۸۵۰ ق به سلطنت رسید. سمرقند، مرکز ماوراءالنهر، در زمان الغیبگ به قطب علمی فعالی تبدیل شد. از دوران او بناهای ارزشمندی در سمرقند به جا مانده است؛ از جمله مدرسه و خانقاهی که وی آن ها را به سال ۸۲۳ ق روبروی هم ساخت. مهم ترین فعالیت علمی الغیبگ تأسیس رصدخانه سمرقند و تدوین *زیج جدید سلطانی* است که به *زیج الغیبگ* شهرت دارد.

۲. «استخرج جیب درجه واحده الى التاسعة في غاية الصحة والدقة بطريق الجبر والمقابلة بغير المسائل الست لكن لا يوفق باتمام الرسالة وكتب الحكيم الفيلسوف قاضي زادة الرومي على سواده رسالة مشروحة وهي مكتوبة في هذا المجلد.»

رساله‌ای فارسی دربارهٔ محاسبهٔ جیب یک درجه ۷۱/

ضمناً در همین صفحهٔ نسخه توضیحات کاشانی دربارهٔ این که از نظر پیشینیان راهی برای حل مسألهٔ تثلیث به روش هندسی نبوده، ولی وی توانسته است وتر زاویهٔ یک درجه را با تقریب خوبی محاسبه کند، خط خورده است.^۱ این حاشیه و خط‌خوردگی قطعاً مربوط به پس از درگذشت کاشانی، و نزدیک به زمان کتابت *رساله فی استخراج جیب درجهٔ واحد* قاضی‌زاده^۲ به دست معین‌الدین در همین مجموعه (۳۱۸۰/۱۱) ملک)، یعنی ۸۳۶ ق است.

قاضی‌زاده که *رساله الوتر و الجیب* یا *حدافل* - اگر بتوان به گفتهٔ معین اعتماد کرد- پیش نویس آن را در دست داشت، *رساله فی استخراج جیب درجهٔ واحد* را همان طور که عنوان رساله نشان می‌دهد، با تمرکز بر محاسبهٔ سینوس یک درجه تألیف کرد و قاعدهٔ کلی محاسبهٔ سینوس یک‌سوم زاویه‌ای که سینوس آن معلوم است را در انتهای رساله در یک جمله از کاشانی نقل می‌کند. قاضی‌زاده در این رساله به شرح روش کاشانی در محاسبهٔ سینوس یک درجه می‌پردازد، اما پیش از آن روش خود را تبیین می‌کند. روش قاضی‌زاده در اصل همان روش کاشانی با اندکی تغییر است. برای این که مشخص شود این تغییر در چه حد و به چه صورت بوده، لازم است بدانیم این روش شامل دو بخش است:

• بخش هندسی - جبری: تشکیل معادله با استفاده از قضایای

۱. «رساله الوتر والجیب فی استخراجهما لثلث القوس المعلومة الوتر والجیب وذلك ایضاً مما صعب علی المتقدمین كما قال صاحب المجسطی فیہ ان [آغاز خط‌خوردگی] [ناخوانا] ان لیس الی معرفة وتر ثلث القوس المعلومة الوتر من جهة الخطوط طریق بوجه فلما کان الامر كذلك احتلتنا فی وجود وتر جزء واحد بتقریب دقیق وقال ایضاً قبل هذا فی وجود وتر نصف الجزء [پایان خط‌خوردگی] لیس الی تحصیلہ سبیل».

۲. صلاح‌الدین موسی بن محمد بن محمود قاضی‌زادهٔ رومی، منجم و ریاضی‌دان، در حدود ۷۶۶ ق در بورسا به دنیا آمد. وی پس از گذراندن مراحل اولیهٔ تحصیلات خود در بورسا، به توصیهٔ استادش، ملا شمس‌الدین محمد فنّاری (د. ۸۳۴ ق) به ماوراءالنهر - که مرکز علمی آن زمان بود- رفت. قاضی‌زاده احتمالاً در حدود ۸۱۳ ق به سمرقند وارد شد. الغیبیگ در مقدمهٔ زیچ‌اش (گ ۲) از او با عنوان «استاد» خود یاد می‌کند. قاضی‌زاده یکی از سه مدرس اصلی مدرسهٔ الغیبیگ در سمرقند بوده است (باقری، ص ۴۱-۴۲). از او آثاری چند در ریاضیات و هیأت بر جای مانده، که معروف‌ترین آن‌ها شرح *ملخص فی الهیئة چغمینی* (تألیف ۸۱۵ ق در سمرقند) است. وی حدود ۸۴۰ ق در سمرقند درگذشت.

هندسی و قواعد جبری

• بخش محاسباتی: حل معادله به روش تکرار

اختلاف روش کاشانی با قاضی زاده به بخش نخست برمی‌گردد: مجهول معادله کاشانی جیب یک درجه است، اما قاضی زاده وتر دو درجه را مجهول می‌گیرد. ولی این مسأله نمی‌تواند منجر به متفاوت شدن جواب دو معادله شود؛ زیرا: $\text{Ch } 2^\circ = 2 \text{ Sin } 1^\circ$ در حالی که جواب قاضی زاده دقیق‌تر از کاشانی است. قاضی زاده، خود علت تفاوت جواب‌ها را چنین بیان می‌کند:

«ولی تفاوت بین دو جیب در مرتبه‌ی ثامن و بعد از آن ... ناشی از تفاوت بین وتر شش درجه‌ای است که ما آن را بر اساس قوانین اهل فن محاسبه کردیم، و دو برابر جیب سه درجه‌ای که او نیز بر اساس همان قوانین به دست آورده است.»

قاضی زاده وتر شش درجه را $6;16,49,7,59,8,56,29,40$ ثامن محاسبه کرده است که نصف آن یعنی جیب سه درجه می‌شود: $3;8,24,33,59,34,28,14,50$ ثامن. در حالی که کاشانی جیب سه درجه را $3;8,24,33,59,34,28,14,29$ ثامن آورده است. یعنی اگر کاشانی همان جیب سه درجه دقیق‌تر مورد استفاده قاضی زاده را در معادله قرار داده بود، جواب‌ها یکسان می‌شد. در واقع اهمیت روش کاشانی بیشتر به حل معادله بازمی‌گردد و قاضی زاده هم در حل معادله روش کاشانی را به کار برده است.^۱

سال‌ها بعد الغیبگ در زیج خود (گ ۱۷ ر) ادعا کرد که برای نخستین بار جیب یک درجه را به روش علمی محاسبه کرده و در بیان این روش کتابی پرداخته است؛ در

۱. برای ترجمه و شرح فارسی ← سواد، فاطمه، «بررسی روش کاشانی در محاسبه جیب یک درجه بر اساس رساله فی استخراج جیب درجه واحد»، پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران، بهمن ماه ۱۳۸۴.

برای ترجمه و شرح انگلیسی رساله فوق از قاضی زاده رومی ←

Rosenfeld, Boris; Hogendijk, Jan P., "A Mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, vol. 15, 2002-3, pp. 25-65.

حالی که شواهد تاریخی نشان می‌دهد که وی از وجود اثر کاشانی مطلع بوده و چه بسا نسخه‌ای از آن را در اختیار داشته است. در نسخه‌ای از *زیج خاقانی* موجود در کتابخانهٔ ایندیا آفیس^۱ به شمارهٔ Ethé ۲۲۳۲، MS ۴۳۰ پشت برگ ۳۲ حواشی‌ای به خط کاتب وجود دارد که ظاهراً در زمان‌های مختلف و توسط افراد مختلف در نسخه‌های قبل وارد شده است. اولی همان حاشیهٔ کاشانی است که ذکر شد. ذیل این حاشیه به نقل از معین چنین آمده است:

«غالباً توفیق اتمام آن رساله نشده، بعد از وفات مصنف -علیه الرحمة-

این ضعیف کتابتی ایشان دید که استخراج این جیب یک درجه به طریق

جبر و مقابله به غیر مسائل سته فرموده بودند و بر حاشیهٔ آن نوشته که:

هذا جیب درجهٔ واحدة استخراجناه بالقوة الالهامية عن الحضرة الصمدية»

در ادامه کاتب می‌نویسد:

«این فقیر حقیر محمد کبیسه بعد از شهادت سلطان الغبیگ در

جزودان آن حضرت جزوی به خط مولانای مغفور (یعنی کاشانی) [دید]

با توجه به این که ادعای ناتمام ماندن *رساله الوتر و الجیب*، در حاشیهٔ *مفتاح الحساب* نیز دیده می‌شود، می‌توان احتمال داد که فرد یا افرادی برخلاف واقع قصد القاء موضوع ناتمام ماندن اثر کاشانی را داشته‌اند، در حالی که نه کاشانی خود به این مسأله اشاره‌ای کرده است، نه قاضی زاده. اگر ادعای الغبیگ در *زیج* اش را نیز بی‌ارتباط با این قرائن ندانیم، حتی می‌توان احتمال داد که الغبیگ قصد داشته افتخار ابداع روش محاسبهٔ جیب یک درجه را به نام خود تمام کند.

پیرو ادعای الغبیگ، در همهٔ شرح‌های موجود بر *زیج الغبیگ*، فصلی به بیان روش این محاسبه اختصاص داده شده است. مهم‌ترین شرح از ملا علی قوشچی (د. ۸۷۹ ق)^۲ به فارسی است. قوشچی در شرح باب دوم از مقالهٔ *دوم زیج الغبیگ تحت عنوان* «در معرفت جیب و سهم» به بیان روش‌های تقریبی متقدمان و «روش دقیق‌تر» ادعایی

1. India Office

۲. علاءالدین علی بن محمد سمرقندی، دانشمند قرن ۹ ق و از نزدیکان الغبیگ بود. وی ظاهراً قوشچی الغبیگ نیز بوده است (خواندمیر، ص ۳۸). قوشچی در تدوین *زیج الغبیگ* همکاری داشت.

مصنف زیج در محاسبه جیب یک درجه پرداخته است. این قسمت از شرح قوشچی تا کنون تحقیق و بررسی نشده است. در این قسمت از شرح قوشچی سه روش بدون نام به موازات هم ذکر می‌شود که هر یک به معادلات مختلف با ضرایب مختلف ناشی از اختلاف دقت پارامترها می‌رسد. دو تا از روش‌ها دقیقاً روش قاضی‌زاده و کاشانی، و روش سوم احتمالاً روش الغیگ است.

میرم چلبی (د. ۹۳۱ ق)^۱ نیز در رساله فارسی دستورالعمل و تصحیح الجداول که شرحی است بر زیج الغیگ، مانند قوشچی ابتدا روش‌های تقریبی را به اختصار توضیح می‌دهد، سپس هنگام تبیین روش مصنف در محاسبه جیب یک درجه تلویحاً از کاشانی به عنوان مبدع روش یاد می‌کند و به شرح روش وی بر اساس رساله فی استخراج جیب درجه واحد و شرح قوشچی می‌پردازد؛ اما روش الغیگ را شرح نمی‌دهد. اغلب پژوهش‌های جدید در موضوع محاسبه جیب یک درجه، بر مبنای شرح چلبی انجام گرفته و حتی این بخش از آن به زبان‌های مختلف ترجمه شده است.^۲

۱. محمود بن محمد بن موسی معروف به میرم چلبی، دانشمند ترک در قرن ۱۰ ق که قاضی‌زاده رومی و علی قوشچی به ترتیب جد پدری و مادری وی بودند (← قربانی، زندگینامه، ص ۴۷۵-۴۷۶).

۲. ترجمه فرانسوی سدویو:

Sédillot, L.A., "De l'algèbre chez les Arabes", *Journal Asiatique*, 5ème Série, tome II, 1853, pp. 323-356.

ترجمه آلمانی مختصر از شوی:

Schoy, Carl, "Beiträge zur arabischen Trigonometrie", *ISIS*, vol. V, 1922-23, pp. 364-399.

ترجمه روسی رزنفلد در:

Jamshīd al-Kāshī, *Mifāh al-ḥisāb, Risāla al-muḥīṭīyya - Klyuch arifmetiki. Traktat ob okružnosti* (Arabic and Russian translation by B.A. Rosenfeld), Moscow 1956.

ویکه نیز در مقاله زیر بر اساس شرح چلبی، روش کاشانی را تحت عنوان روش چلبی مورد بحث قرار داده است:

Woepcke, F., "Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de $\sin 1^\circ$ ", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome 19, 1854, pp. 153-176, 301-303.

هانکل هم در کتاب زیر به روش کاشانی اشاره می‌کند:

Hankel, H., *Zur Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1874, pp. 289-293.

آبو در مقاله زیر به تبیین روش کاشانی با استفاده از شرح چلبی پرداخته است:

Aboe, Asger, "Al-Kashi's Iteration Method for the Determination of $\sin 1^\circ$ ", *Scripta Mathematica*, vol. 20, 1954, pp. 24-29.

ترجمه فارسی این مقاله: أبو، اسگر، «روش تکراری جمشید کاشانی برای محاسبه سینوس زاویه یک درجه» ترجمه محمد باقری، میراث جاویدان، سال ۴، شماره ۳ و ۴ (ویژه تاریخ علم)، پاییز و زمستان ۱۳۷۵، ص ۳۵-۳۸.

عبدالعلی بیرجندی (د. ۹۳۴ ق) نیز در شرحش بر *زیج الغیبیگ* هنگام رسیدن به باب «در معرفت جیب و سهم» از مقالهٔ دوم *زیج*، پس از بیان روش‌های تقریبی، ابتدا روش کاشانی را شرح می‌دهد و سپس به روش الغیبیگ می‌پردازد؛ اما بیرجندی به جای روش کاشانی، روش قاضی‌زاده را شرح داده و این قسمت از شرح بیرجندی که قربانی در کتاب *کاشانی‌نامه* چاپ و شرح کرده (ص ۱۵۸-۱۶۷)، در واقع خلاصه‌ای از *رساله فی استخراج جیب درجهٔ واحد* است.

منبع اصلی چلبی - به تصریح خود وی - و بیرجندی، شرح قوشچی و *رساله فی استخراج جیب درجهٔ واحد* است (← سواد، ص ۹۲، ۹۴-۹۵).

مطالعهٔ شرح بیرجندی و شرح قوشچی نشان می‌دهد که الغیبیگ برای تشکیل معادله، دقیقاً مشابه کاشانی و قاضی‌زاده عمل می‌کند؛ ولی آن را به روشی متفاوت حل می‌کند. او یک بار با مجهول فرض کردن جیب یک درجه، به معادلهٔ کاشانی و دیگر بار با مجهول گرفتن وتر دو درجه، به معادلهٔ قاضی‌زاده می‌رسد. روش الغیبیگ برای حل دو معادلهٔ فوق - که در واقع یکسانند - از دقتی کمتر نسبت به روش تکرار کاشانی برخوردار است. به کارگیری این روش و نیز مقدار غیردقیق جیب سه درجه، سبب شده است که جواب الغیبیگ دقتی کمتر از جواب کاشانی و قاضی‌زاده داشته باشد.

در بیان استخراج جیب یک درجه

رساله‌ای فارسی با عنوان *در بیان استخراج جیب یک درجه* از مؤلفی ناشناس که با استفاده از شرح قوشچی و رسالهٔ قاضی‌زاده به تبیین روش محاسبهٔ جیب یک درجه پرداخته، در کتابخانهٔ دولتی برلین (نسخهٔ خطی به شمارهٔ ۱۴۴ Landberg ← پرچ^۱، ۱۰۵۷-۱۰۵۸) موجود است.

این رساله شامل دو بخش است:

۱. شرح مزجی شرح قوشچی که در آن عبارات قوشچی با توضیحات مصنف ناشناس درهم آمیخته است. در این بخش مصنف، قسمت‌های مربوط به

روش قاضی زاده و کاشانی را از بین سه روش مذکور در شرح قوشچی برگزیده است.

۲. ترجمه فارسی تلخیص شده‌ای از رساله فی استخراج جیب درجه واحد.

روش تصحیح

از آن جا که نسخه یکتای این رساله چندان خوش خط نیست، در بازنویسی نسخه از شرح قوشچی و رساله فی استخراج جیب درجه واحد برای مقابله و رفع ابهام استفاده شد.

عبارات قوشچی و قاضی زاده با حروف سیاه متمایز شده است. اختلاف عبارات رساله با شرح قوشچی بر اساس نسخه خطی شماره ۳۴۲۰ کتابخانه ملی ملک - که با حرف «ق» مشخص شده - و اصل عربی عبارات قاضی زاده بر اساس نسخه ۳۱۸۰/۱۱ همان کتابخانه - که با حرف «ر» مشخص شده - در حاشیه آورده شده است. افتادگی های متن حتی الامکان از شرح قوشچی و بین دو قلاب اضافه شده است.

در بیان استخراج جیب یک درجه

تألیف قاضی‌زادهٔ رومی

در بیان استخراج جیب یک درجه بر وجهی که مصنف به آن ملهم شده؛ آنچه از شرح زیچ مفهوم شده از جهت به تقریر^۱ و توضیح در صفحه مذکور و مسطور خواهد آمد^۲ - ان شاء الله که مطابق واقع باشد.

در این مقصود به تمهید دو مقدمه محتاجند: [۱] یکی مقدمه‌ای است که در مجسطی مبین است، و دیگری در اقلیدس. اما مقدمهٔ مجسطی آن است که ذی‌اربعه‌اضلاعی که در دایره‌ای واقع شود، مجموع مسطح ضلعین متقابلین او مساوی مسطح قطرین او است؛^۳ یعنی از چهار ضلع ذی‌اربعه‌اضلاع هر دو ضلع متقابل را در یکدیگر ضرب کنند چنانچه دو حاصل‌ضرب شود، مجموع حاصل‌ضربین مساوی حاصل‌ضرب دو قطر ذی‌اربعه‌اضلاع است در یکدیگر. [۲] و اما مقدمهٔ اقلیدس آن است که هر دو وتر که در دایره‌ای تقاطع کنند، مسطح دو قسم یک وتر مساوی بود [با] مسطح دو قسم وتر دیگری. حاصلش آن است که از تقاطع وترین لازم آید که هر وتری به دو قسم شده باشد، پس حاصل‌ضرب دو قسم هر وتری مساوی حاصل‌ضرب دو قسم وتری دیگر است.

[۳] بعد از تمهید^۴ این دو مقدمتین^۵، دایرهٔ ا ب ج د بر مرکز م رسم کنیم و هر یک از قوس ا ب ج ج د به قدر دو درجه فصل کنیم و اوتار ا ب ب ج ج د ا ج اد وصل کنیم // و قطر ا م اخراج کنیم [۴] و بر منتصف ا م، اعنی

گ ۷۵ ر

۱. در اصل: بتقریر

۲. در اصل: خواهد

۳. ق: هر دو اربعه اضلاع که در دایره واقع شود، چون متقابلین ازین چهار ضلع را مسطح کنند، مجموع این دو مسطح مساوی باشد با مسطح دو قطر این ذی اربعه اضلاع.

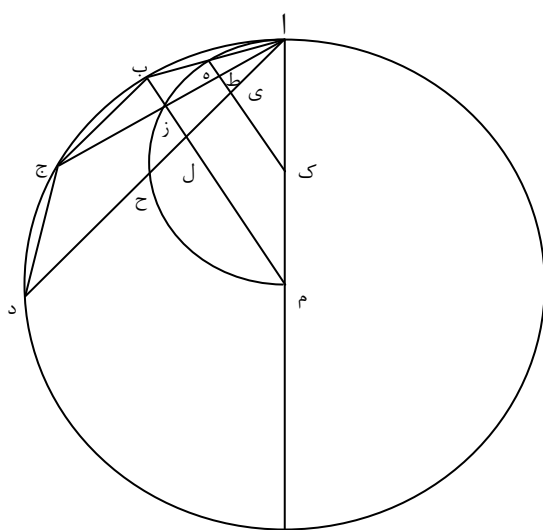
۴. ق: تقدیم

۵. ق: مقدمه

۶. ق: - و

بر نقطه ک، نصف دایره ام رسم کنیم. لا محاله^۱ اب اج اد را تنصیف کند بر نقطه [های] ه ز ح^۲؛ به جهت آن که اقطاری که از نقطه م بر این نقطه های^۳ سه گانه می آید^۴، عمود باشد بر هر یک از این اوتار سه گانه به شکل سی ام از مقاله سیم. مدعی شکل سی ام این است که: «کل زاویه فی قطعة فهی قائمة ان کانت القطعة نصف دائرة» و در این صورت در نزد هر یک از نقطه های سه گانه زاویه فی القطعة حادث می شود، و قطعه نصف دایره است، پس زاویه قائمه می باشد؛ اما آن که قطعه نصف دایره است آن خود بالعمل است، و اما آن که زوایا در نزد نقاط ثلثه فی القطعة اند از این جهت است که زاویه فی القطعة آن است که حادث شود در نزد نقطه [ای] از قوس قطعه از خطین خارجین از دو طرف قاعده قطعه. پس هر گاه که از م بر نقطه های سه گانه

خطوط اخراج کنند هر یک از آن خطها با هر وتری که ملاقی می شوند صادق است که خطین خارجین اند از دو طرف قاعده که احداث زاویه کرده اند بر نقطه [ای] از قوس و چون این دوایر محقق شود، حکمش آن است که زاویه قائمه باشد بالبرهان الثابت فی موضعه و چون ثابت شد که انصاف اقطار عمود بر اوتار کشد، تنصیف اوتار حاصل شود از منصف الاوتار هو الاقطار القائمة علیها.



۱. ق: + اوتار

۲. ق: را بر نقطه ه ز ح تنصیف کند

۳. ق: نقط

۴. ق: آید

بعد ذلک می‌گوییم [۵] هر یک از سه قوس $\overline{اه}$ $\overline{هز}$ $\overline{زح}$ از دایرهٔ صغیره دو درجه‌اند؛ زیرا که نسبت اوتار^۲ قوسی دایرهٔ صغیره^۳ با نصف قطر دایرهٔ صغیره^۴ چون نسبت اوتار قوسی دایرهٔ کبیره^۵ است با نصف قطر دایرهٔ کبیره^۶. و چون اوتار اوتار قوسی دایرهٔ کبیره هر یک وتر دو درجه بودند به حسب اجزاء قطر دایرهٔ کبیره، پس همچنین هر یک از اوتار قوسی دایرهٔ صغیره وتر دو درجه باشند به حسب اجزاء قطر دایرهٔ صغیره.

پس دو چیز ثابت شد: یکی انتصاف اوتار قوسی ثلثه از دایرهٔ بزرگ در نزد نقطه‌های $\overline{ه}$ $\overline{ز}$ $\overline{ح}$ ؛ و دیگر آن که هر یک از قوس‌های سه‌گانه از دایرهٔ خرد نیز به قدر دو درجه‌اند.

[۶] بعده، نصف قطر $\overline{بزم}$ اخراج می‌کند^۷ تا وتر $\overline{اد}$ را بر $\overline{ل}$ قطع کند و همچنین نصف قطر $\overline{که}$ اخراج // می‌کند^۸ تا وتر $\overline{از}$ را بر $\overline{ط}$ تنصیف کند؛ زیرا زیرا که از مرکز $\overline{به}$ منتصف $\overline{اقوس}$ آمده، پس منصف وتر $\overline{از}$ ، $\overline{اح}$ را بر $\overline{ی}$ قطع قطع کند $\overline{او}$ $\overline{هط}$ مساوی $\overline{طی}$ [باشد و $\overline{بزا}$ مساوی $\overline{زل}$ ؛^۹ زیرا که دو زاویهٔ $\overline{باج}$ و $\overline{جاد}$ متساویان‌اند به شکل بیست و ششم^{۱۱} از *ثالثهٔ اصول*^{۱۲} المدعی

گ ۷۵ پ

۱. ق: دو درجه از دایرهٔ خرد باشد

۲. ق: + این

۳. ق: - دایرهٔ صغیره

۴. ق: خرد

۵. ق: بزرگ

۶. ق: او

۷. ق: کنیم

۸. ق: کنیم

۹. ق: به جای « پس منصف وتر از » و وتر

۱۰. کلمات بین دو قلاب در این جمله در اصل دیده نمی‌شود و از شرح قوشچی اضافه شده است.

۱۱. در اصل: هشتم (در ق، ششم آمده، که صحیح است)

۱۲. ق: مقالهٔ سیم

الزوايا التي يقع على قسي متساوية من دوائر متساوية، متساوية، محيطية كانت او مركزية و درين صورت زاويتين على القوس محيطيين اند، چنان که ظاهر است و تعريف زاوية على القوس آن است که حادث شود از دو خط که هر خطی خارج باشد از نقطه [ای] مفروضه بر قوس. و خط از عمود است بر هر یک از دو خط ه ک ب م به شکل سیم از مقاله سیم و هو کل وتر خارج اليه من المركز خط فان نصفه فهو عمود عليه و ان كان عموداً عليه قد نصفه. و اکنون معلوم شد که آ ج بر نقطه ز منصف شده و همچنین از بر نقطه ط.

[۷] پس در دایره خرد به وصل ه ز [و] زح ذی اربعه اضلاع آه زح واقع

شود. و آ ه^۱ جیب یک درجه باشد؛ زیرا که نصف وتر قوس دو درجه است، یعنی قوس اب. و آ ح که ضلع دیگر است، جیب سه درجه است؛ زیرا که نصف وتر شش درجه است. [۸] پس به حکم مقدمه مجسطی سطح آه در ضلع مقابلش که زح است و مساوی آه است، زیرا که هر دو وتر دو قوس متساوی اند، اعنی مربع آه با سطح آح که احد الاضلاع است در ه ز - ضلع مقابلش^۲ مساوی بود با مربع آه که که قطر ذی اربعه اضلاع است. اصلش آن بود که بگفتی با سطح قطری ذی اربعه اضلاع، لیکن چون از مساوی قطری مقدر دیگر است که آن ه ح خواهد بود و از این جهت گفته با مربع از.

[۹] و چون جیب یک درجه را^۳ شیء فرض کنند، گویم در ذی اربعه اضلاع

آه زح سطح آه در زح مال بود؛ زیرا که شیء در شیء مال است. و سطح ه ز - که نیز شیء است از این جهت بعینه مثل آن دو ضلع مذکور است^۴ - در آح - که جیب سه درجه است و معلوم العدد است - اشیاء بود؛ زیرا که شیء در عدد همان شیء

۱. + احد الاضلاع ذی اربعه است (حاشیه)

۲. ق: + مجموع این هر دو

۳. + یعنی آه را (بین سطرها)

۴. + و جیب یک درجه است (بین سطرها)

است، و جیب سه درجه ج کد لچ نط لد کح یه سابعه است^۱. پس
 محصلش آن شد که یک مال و این اشیاء مذکوره^۲ مساوی شد^۳ با مربع خط
 از^۴ باز [۱۰] به حکم همین مقدمهٔ مجسطی^۵ در ذی اربعه اضلاع اب ج د چون
 وتر دو درجه را یعنی اب را شیء فرض کنند،^۶ گفتم سطح اب در ج د مال بود
 // و سطح ب ج در اد اشیاء بود به عدد وتر شش درجه، اعنی
 و یومط ز نط ح نول سابعه. و مجموع آن هر دو مسطح یعنی مال و این اشیاء
 مذکوره مساوی بود با مربع قطر اج^۷، علی قیاس ما تقدم این را محفوظ داشتیم.
 اکنون می‌گوییم [۱۱] به حکم مقدمهٔ اقلیدس مربع اط مساوی بود با سطح
 ه ط در تمام او از قطر دایرهٔ صغیره^۸؛ زیرا که قطر دایرهٔ صغیره و آن دو وترند که در
 در دایرهٔ صغیره متقاطع شده‌اند و از هر یک دو قسم پیدا شده: از وتر از، اط ط ز که
 متساویان‌اند؛ و از قطر ه ط و تمامش. و چون حکم این مقدمه آن است که مسطح دو
 قسم یک وتر مساوی مسطح دو قسم وتر دیگر باشد، پس مسطح دو قسم از یعنی مربع
 اط مساوی باشد با مسطح ه ط در تمامش از قطر. و مربع اه که جیب یک درجه
 است - که مال فرض کرده‌ایم - مساوی بود با سطح ه ط در قطر دایرهٔ خرد به
 جهت آن که مربع اه به حکم^۹ عروس مساوی بود با مجموع مربع اط و مربع
 ه ط.

۱. ق: به عدد جیب سه درجه، اعنی ج کد لچ نط لد کح یه سابعه

۲. ق: و مجموع این هر دو مسطح

۳. ق: بود

۴. +مربع قطر از مشتمل شد بر یک مال و اشیاء مذکوره که ج کد الخ (حاشیه)

۵. ق: - مجسطی

۶. چون وتر دو درجه را شیء فرض کنند، در ذی اربعه اضلاع اب ج د

۷. +در ذی اربعه اضلاع بزرگ قطر اج مشتمل است بر یک مال و اشیاء مذکوره و یومط الخ (حاشیه)

۸. ق: خرد

۹. ق: + شکل

حاصل آن که این مدعی، یعنی تساوی مربع $\overline{اه}$ که جیب یک درجه است با مسطح $\overline{ه ط}$ در نفس قطر دایره صغیره، به قوه سه مقدمه از اقلیدس اتمام می‌یابد: یکی مقدمه مذکوره، یعنی تساوی مسطح هر یک از قسمین وترین متقاطعین در دایره با مسطح قسمین وتر دیگر، تا از آن لازم آید تساوی مربع $\overline{اط}$ با مسطح $\overline{ه ط}$ در تمامش از قطر.

مقدمه دیگر شکل عروس است و از آن لازم می‌آید که مربع $\overline{اه}$ که وتر زاویه قائمه است یعنی جیب یک درجه - که مال فرض کرده‌اند - مساوی مربعین ضلعی قائمه باشد؛ یعنی مساوی به مجموع مربع $\overline{اط}$ - که آن مساوی سطح $\overline{ه ط}$ است در تمامش از قطر - و مربع $\overline{ه ط}$.

و مقدمه دیگر که شکل سیم است از مقاله *ثالثه / اصول* و آن آن است که: «سطح الخط^۱ فی أحد قسمیه یساوی مجموع مربع^۲ ذلک القسم و سطحه^۳ فی القسم الآخر». پس به موجب این مدعی، حاصل ضرب قطر در $\overline{ه ط}$ - که یکی // از دو قسم قطر است - مساوی باشد مر مجموع مربع $\overline{ه ط}$ را و حاصل ضرب $\overline{ه ط}$ در قسم دیگر - که تمام او است از قطر.

گ ۷۶ پ

و معلوم است که مربع $\overline{ه ط}$ مربع یکی از دو ضلع قائمه است. پس ظاهر شد که مربع $\overline{اه}$ که وتر قائمه است و جیب یک درجه است و مال فرض کرده‌ایم، مساوی باشد مسطح $\overline{ه ط}$ را در نفس قطر دایره صغیره. این را محفوظ داشتیم که مربع جیب یک درجه که مال است مساوی است با مسطح $\overline{ه ط}$ در $\overline{س}$.

اکنون [۱۱] چون آن^۴ مقدمات مقرر شد، در طریق عمل می‌فرماید^۵ که جیب

۱. و فی هذه الصورة: سطح القطر فی احد قسمیه اعنی $\overline{ه ط}$ (حاشیه)

۲. اعنی مربع $\overline{ه ط}$ (بین سطرها)

۳. یعنی سطح $\overline{ه ط}$ فی تمام القطر (حاشیه)

۴. ق: این

۵. ق: آن که گفته است در طریق اول

جیب یک درجه را که شیء فرض کرده بودیم پس مربع او^۱ را که مال است بر $\overline{س}$ ^۲ قسمت کنیم و مربع خارج قسمت که یک ثانیه مال مال بود، مساوی ثلثه ارباع مال باشد الا این قدر اشیاء: مزوح کط نج لزج مه ثامنه. بنابر تقریرات سابقه وجه این عمل^۳ آن است که [۱۲] مبین شده که مربع آه مساوی سطح ه ط است در قطر دایرهٔ صغیره^۴، و قطر دایرهٔ صغیره^۵ مساوی نصف قطر دایرهٔ کبیره^۶ است، پس $\overline{س}$ ^۷ درجه باشد. و از قسمت مال بر $\overline{س}$ ، یک دقیقه مال خارج شود و آن آن مقدار خط ه ط باشد.^۹ دلیل بر این آن که مربع آه به عینه حاصل الضرب ه ط است در $\overline{س}$ ، و مقرر است که اگر حاصل الضرب را بر احدالمضروبین قسمت کنند خارج قسمت، مضروب دیگر می‌باشد، پس مربع آه که مال است به مثابهٔ حاصل الضرب است و مضروبین که یکی ه ط است و دیگری $\overline{س}$ ؛ پس از قسمت [مربع] آه بر $\overline{س}$ ، خارج ه ط باشد و یک دقیقه مال باشد. و چون خارج // را - یعنی [۱۳] ه ط را- که یک دقیقه مال است، مربع کنند، مال مال شود و یک ثانیه باشد؛^{۱۰} چون او را با مربع ضلع دیگر از قائمه که مربع اط است ملاحظه نمایند، مساوی مربع وتر قائمه باشد که جیب یک درجه است و مال است به حکم^{۱۱} عروس. لیکن معلوم است که اط نصف از است و از قطر ذی‌اربعه اضلاع آه زح است. و معلوم شد که مربع او^{۱۲} مشتمل است

گ ۷۷ ر

۱. ق: جیب یک درجه

۲. ق: شصت

۳. ق: وجهش

۴. ق: مساوی سطح ه ط در قطر دایرهٔ خرد است

۵. ق: خرد چون

۶. ق: بزرگ

۷. ق: - پس

۸. ق: شصت

۹. ق: پس خارج قسمت مال بر شصت که یک دقیقه مال باشد، مقدار خط ه ط باشد.

۱۰. ق: و مربع خط ه ط که یک ثانیه مال مال باشد

۱۱. ق: + شکل

۱۲. + یعنی مربع قطر (حاشیه)

بر مال و اشیاء مذکوره که ج کد لچ نط الی اخره. و نیز این مقرر است مربع نصف چیزی^۱ مساوی ربع مربع این چیز است؛^۲ پس مربع $\overline{ا\text{ط}}$ مساوی بود با ربع ربع مال و ربع عدد اشیاء مذکوره، و ربع عدد اشیاء مذکوره مزوح کط نج لزج مه ثامنه است.^۳ چون اشیاء مذکوره را بر $\overline{د}$ - چهار - قسمت کنند، مز الی اخره بیرون می آید. و چون مربع $\overline{ا\text{ط}}$ یعنی ربع مال و مزوح الی اخره^۴ از مال که مربع جیب یک درجه است،^۵ یعنی مربع $\overline{ا\text{ه}}$ نقصان کنند، مربع ضلع دیگر^۶ قائمه که مربع خط $\overline{ه\text{ط}}$ است بماند، و مقدار او^۷ ثلثه ارباع مال باشد الا اشیاء مذکوره^۸ که آن مزوح الی اخره است. پس کلام بدان انجامید که مربع خط $\overline{ه\text{ط}}$ که یک ثانیه مال مال است، مساوی است با ثلثه ارباع مال الا اشیاء مذکوره یعنی مزوح الی اخره.

[۱۴] بعد ذلک می فرماید که یک ثانیه مال مال و این مقدار اشیاء معادل^۹ ثلثه ارباع ارباع مال باشد. اکنون بعد از این اعمال ارباب جبر و مقابله است. از جمله قواعد ایشان آن است که چون در احد المتعادلین استثنائی باشد، حذف کنند و مستثنی را بر معادل دیگر افزایند و این را جبر گویند. پس در این // صورت متعادلین یکی یک ثانیه مال مال است [و] معادل دیگر ثلثه ارباع مال الا اشیاء مذکوره. پس به حکم جبر چنین شد که یک ثانیه مال مال و اشیاء مذکوره معادل باشد با ثلثه ارباع مال.

[۱۵] و از جمله قواعد ایشان تکمیل است، یعنی چون در جنسی از اجناس کسری

گ ۷۷ پ

۱. + که این مربع جیب یک درجه است (بین سطرها)

۲. ق: مربع $\overline{ا\text{ط}}$ ربع مربع $\overline{ا\text{ز}}$ است

۳. ق: اشیائی که مربع $\overline{ا\text{ز}}$ مشتمل بر آن است، اعنی مزوح کط نج لزج مه ثامنه

۴. + که ربع اشیاء مذکوره است (بین سطرها)

۵. + که مربع ضلع قائمه است (بین سطرها)

۶. + زاویه (بین سطرها)

۷. ق: مربع خط $\overline{ه\text{ط}}$ مساوی

۸. ق: مذکور

۹. در اصل: معادله

باشد آن را تکمیل کنند و بر طرف دیگر به همان نسبت بیفزایند. پس به حکم تکمیل ثلثه ارباع مال را تکمیل کردیم، یک مال شد و بر طرف دیگر که یک ثانیه مال مال است و عدد اشیاء مذکوره، ثلث افزودیم، چه در آن طرف ثلث ثلثه ارباع افزوده بودیم تا مکمل شده بود؛^۱ پس چنین شد:

معادل دیگر

یک مال

معادل

یکی ثانیه و ک ثالته مال مال و
اشیاء مذکوره مزیداً علیه الثلث اعنی
اب مح یا یط نا کط که سابعه

[۱۶] و چون نزد ارباب جبر و مقابله مقرر^۲ شده که اجناس باعتبار کونها فی المنازل متناسباند - مثل آن که نسبت واحد با شیء همچون نسبت شیء است به مال، و همچون نسبت مال با کعب، و همچون نسبت کعب با مال^۳ الی ما لا نهایه له. پس جایز باشد که هر یک از اجناس را بمنزله واحد منحنی گردانند و همان نسبت باقی باشد. پس بنابراین هر یک از متعادلین را به یک مرتبه منحنی اعتبار کنیم تا چنین شود:

معادل باشد

با یک شیء

معادل

یکی ثانیه و ک ثالته
مکعب با عدد مذکور

[۱۷] و اگر خواهیم وتر دو درجه را شیء فرض کنیم و مربع او را بر $\overline{\text{س}}$ قسمت کنیم، مربع نصف خارج قسمت که $\overline{\text{یه}}$ ثالته مال مال است، مساوی ثلثه //

گ ۷۸ ر

۱. +مخطوط: پس چنین شد که یک ثانیه و ک ثالته مال مال و اشیاء مذکوره مزیداً علیه الثلث که هست
[...]^۱ اب مح یا یط نا کط که سابعه (حاشیه)

۲. در اصل: برر

۳. در اصل: مال کعب، که صحیح نیست.

۴. ق: شصت

ارباع مال باشد الا این قدر اشیاء: \overline{ald} \overline{yib} \overline{yio} \overline{nyb} \overline{yidz} ^۱ **سابعه**.

[۱۸] شرح این کلام آن است که در ذی اربعه اضلاع \overline{ab} \overline{cd} ، وتر دو درجه را - یعنی \overline{ab} - شیء فرض کنیم. پس حاصل ضرب او در ضلع مقابلش یعنی مربع \overline{ab} مال باشد و این مال مساوی مسطح خط \overline{bz} است در نفس قطر دایره کبیره بر همان قیاس که در عمل سابق مذکور شد. و محصل آن اعمال سابقه تا بدین جا که **مال یعنی مربع \overline{ab} مساوی سطح خط \overline{bz} است در نفس قطر دایره بزرگ**، بدین وجه است که به حکم مقدمه مجسطی، مربع \overline{ab} یعنی مال با سطح \overline{ad} در \overline{b} ج یعنی با اشیاء که به عدد وتر شش درجه ^۴ است، مساوی است با مربع قطر \overline{ac} ؛ و به حکم مقدمه اقلیدس، مربع \overline{az} مساوی است با سطح \overline{bz} در تمام او از قطر دایره بزرگ، و مربع \overline{ab} که وتر ^۵ دو درجه است و مال فرض کرده ایم، مساوی است با سطح \overline{bz} در نفس قطر دایره بزرگ به استعانت شکل عروس و شکل سیم از مقاله ثالثه همچنان که مشروح گذشت.

[۱۹] چون این معانی متمهد شد، مربع وتر دو درجه که مال است بر \overline{cs} قسمت می کند تا یک دقیقه مال بیرون آید: یعنی یک جزء از مال مقسوم به شصت قسم که بالحقیه یک دقیقه مال باشد. اما اصلش آن بود که بر \overline{ck} که اجزاء قطر دایره است، قسمت کنند تا خط \overline{bz} بیرون آید؛ زیرا که بر قیاس ما تقدم مربع وتر دو درجه مساوی حاصل الضرب قطر دایره بزرگ است در \overline{bz} . و چون حاصل الضرب را بر احد المضروبین قسمت می کند، مضروب دیگر بیرون می آید، پس بایستی که مربع وتر دو درجه را بر احد المضروبین که قطر دایره // بزرگ است، یعنی \overline{ck} قسمت کردی تا خط \overline{bz} بیرون آمدی لیکن مصنف بر \overline{cs} قسمت می کند و خارج قسمت را تنصیف

گ ۷۸ پ

۱. ق: \overline{ald} \overline{nyb} \overline{yio} \overline{nyb} \overline{yidz} ، عدد صحیح: \overline{ald} \overline{yib} \overline{yio} \overline{nyb} \overline{yidz}

۲. ق: مربع خط \overline{ab} که مال است

۳. ق: - نفس

۴. + که در [ناخوانا] هست و \overline{yom} الی آخره (بین سطرها)

۵. در اصل: جیب؛ که اشتباه بود.

می‌کند^۱ که $\bar{و}$ همان باشد که بر $\bar{قک}$ قسمت کرده است، زیرا که خارج قسمت عددی بر عددی مثل نصف خارج قسمت همان عدد است بر نصف مقسوم‌علیه اول؛ مثلاً قسمت ۸ بر ۴، ۲ بیرون می‌آید و از قسمت ۸ بر نصف چهار یعنی ۲، چهار بیرون می‌آید؛ نصفش همان خارج اول است.

بعد ذلک^۲ $\bar{ل}$ ثانیه مال را مربع کردیم، حاصل می‌شود $\bar{یه}$ ثلثه مال مال. این مربع خط $\bar{ب ز}$ باشد، این مساوی ثلثه ارباع مال باشد الا این قدر اشیاء $\bar{ا لد یب یو نط م ب ید ز سابعه}$ ^۳. اما تعلیل بر آن که مربع خط $\bar{ب ز}$ که $\bar{یه}$ ثلثه مال مال است مساوی ثلثه ارباع مال مال است الا این قدر اشیاء مذکوره، علی قیاس ما تقدم آن است که چون این مربع را با مربع از جمع کنند، مساوی باشد به حکم عروس با مربع $\bar{اب}$ که یعنی مربع وتر دو درجه که مال فرض کرده‌ایم. پس چون مربع از را از مال نقصان کنند آنچه بماند^۴ مساوی مربع $\bar{ب ز}$ باشد. لیکن مربع از ربع مربع $\bar{ا ج}$ است^۵ - $\bar{کما سبق توضیحه}$ - و مربع $\bar{ا ج}$ مشتمل است بر مال و عدد اشیاء به عدد وتر شش درجه. پس ربع مال و ربع عدد اشیاء از مربع $\bar{اب}$ چون کم شود، مربع $\bar{ب ز}$ بماند به قدر ثلثه ارباع مال الا اشیاء مذکوره. پس ثابت شد^۶ که $\bar{[مربع] ب ز}$ که به قدر^۸ $\bar{یه}$ ثلثه مال مال است معادل ثلثه ارباع مال است الا این قدر^۱ اشیاء مذکوره^۲.

۱. +مخطوط: خارج قسمت مال بر $\bar{س}$ که یک دقیقه مال است تنصیف کردیم (حاشیه)

۲. + $\bar{ل}$ ثانیه، مال باشد و آن مقدار خط $\bar{ب ز}$ باشد (حاشیه)

۳. + این مقدار حاصل شده است از قسمت وتر شش درجه بر چهار یعنی ربع وتر شش (بین سطرها)

۴. ق: ماند

۵. ق: + پس مساوی بود با ربع مال و ربع عدد اشیائی که مربع $\bar{ا ج}$ مشتمل بر آن است

۶. ق: پس لازم آید

۷. از شرح قوشچی اضافه شد.

۸. ق: - به قدر

[۲۰] قوله: پس یه ثالثه مال مال و این مقدار اشیاء معادل ثلثه ارباع مال باشد. این عمل را جبر می‌گویند که مستثنی را از احدالمتعادلین حذف می‌کنند و بر معادل دیگر می‌افزایند، آن‌چه حاصل شود از طرفین متعادلین // باشند. قوله: و چون^۳ ثلث هر یک از معادلین را بر وی افزاییم و یک مرتبه منحط گیریم ک ثالثه مکعب و این عدد ب ه لو کب لط مب نح ن سابعه معادل یک شیء شود. یعنی به حکم تکمیل طرفی که فیه الکسر تکمیل کردیم و طرفی دیگر را بر همان نسبت افزودیم. حاصل که ثالثه ارباع مال را ثلث وی - جهتی تا مکمل شود - که یک ربع باشد برافزودیم پس یک مال شد. و بر جانب دیگر که یه ثالثه مال مال است و اشیاء مذکوره، ایضاً ثلث ایشان بر ایشان افزودیم. ثلث یه، ه باشد، برافزودیم، ک ثالثه مال مال باشد. و ثلث اشیاء مذکوره گرفتیم - یعنی بر ج قسمت کردیم - و خارج قسمت را با مقسوم ضم کردیم، شد ب ه لو الی اخره. پس ک ثالثه مال مال مع الاشیاء و هی ب ه لو کب الخ معادل یک مال باشد. چون هر یک را یک مرتبه منحط گرفتیم چنین شد که ک مکعب باشد و تلك العدد معادل یک شیء باشد.

[۲۱] طریقی دیگر: جیب یک درجه را شیء فرض کنیم و ربع مال و این قدر اشیاء را مزوج کط نح لزج مه ثامنه از مال نقصان کنیم، ثالثه ارباع مال الا اشیاء مذکوره^۴ باقی ماند. وجهش آن است که مربع خط اط مساوی ربع مربع از است، و مربع از مشمتمل بر یک مال و این قدر اشیاء ج ح کد لج نط لد کح یه سابعه^۵ چنانچه سابقاً مذکور شد، به حکم مقدمه مجسطی. پس ربع مال و این قدر

۱. ق: - این قدر

۲. ق: + باشد

۳. در اصل: جیب؛ از شرح قوشچی اصلاح شد.

۴. ق: مذکور

۵. +به عدد جیب سه درجه است (بین سطرها)

۶. +مخطوط: که مربع قطر از مشتمل است بر یک مال و عدد اشیاء به عدد جیب سه درجه اعنی ج ح الی

اشیاء که مزوح کط الی اخره^۲ - که این اشیاء ربع ج ح کد الی اخره است - از مال // - یعنی از مربع جیب آه [که] مربع جیب یک درجه است - نقصان کنند، ثلثه ارباع مال الا اشیاء مذکوره^۳ - که آن مزوح الی اخره است - می‌ماند^۴ و این مساوی [مربع] خط ه ط باشد به استعانت عروس.

[۲۲] قوله: ^۶ و چون این مقدار^۷ را یعنی ثلثه ارباع مال الا اشیاء مذکوره در چهار ضرب کنند، سه مال الا این اشیاء ج ح کد ل ج نط لد کح یه سابعه حاصل می‌شود. اما بیان کیفیت ضرب آن که اولاً ثلثه ارباع مال را در چهار ضرب کردیم، دوازده ربع حاصل شد، یعنی سه مال. دیگر مزوح الی اخره در چهار ضرب [کردیم] ج ح الی اخره که همان اشیاء باشد به عدّه جیب سه درجه بیرون آید.^۸ و در عمل ضرب آن چه مضروب شود در مستثنی، حاصلش را ناقص می‌گویند و حاصل مضروب در مستثنی منه را زاید؛ پس حاصل الضرب مضروب در مستثنی منه باشد منقوصاً منه المضروب فی المستثنی^۹ مال است الا ج ح کد الی اخره. بعده می‌فرماید که حاصل الضرب مساوی مربع ه ی است^{۱۰}؛ این بنا بر آن قاعده است که چون خواهند

اخره و مقرر است که مربع آط مشتمل بر ربع آن چه مشتمل است بر [...] مربع از (حاشیه)

۱. ق: + چون

۲. ق: و ربع اشیاء مذکور اعنی مزوح کط نج لزج مه ثامنه را

۳. ق: مذکور

۴. ق: باقی ماند

۵. مطابق شرح قوشچی اضافه شد.

۶. در اصل: و له

۷. ق: باقی

۸. +مخطوط: و مقرر است که مربع مستثنی ناقص است، پس آن چه مضروب شود در مستثنی ناقص باشد آن را. از و مستثنی منه زاید ما حصل منه زاید است، و در حاصل الضرب، ناقص را، استثنا می‌باید کرد؛ پس حاصلش چنین شد که حاصل (حاشیه).

۹. در اصل: المستثنی منه

۱۰. ق: و این مربع خط ه ی باشد.

که مربع عددی مساوی مربع ضعف همان عدد گردانند، در چهار ضرب می‌باید کرد تا حاصل مربع ضعف عدد مفروض باشد.

[۲۳] قوله: و چون این مبلغ^۱ را در^۲ یه مرفوع مره ضرب کنی^۳ مه مرفوع مره مال شود الا این اشیاء مزوح کط نج لزج مه سادسه^۴ و این معادل با^۵ مال مال باشد. یعنی چون سه مال الا این اشیاء که ج ح کد است الی آخره که عبارت است از مربع ه ی است در یه مرفوع مره یعنی در مربع ل درجه ضرب کند، مه مرفوع مره مال شود الا این // اشیاء مزوح الی آخره. این قیاس بر آن است که خط ه ط که نصف ه ی است در سه مساوی مال بود پس ه ی که ضعف ه ط است در نصف نصف یعنی در ل مساوی مال باشد.^۶ و مدعی آن است که مربع ه ی در مربع ل مساوی مال است از این جهت است که ه ی در ل مال است و مقرر است که شیء در شیء مال می‌باشد پس هریک از ه ی و ل به مثابه^۷ شیء باشد و مربع شیء مال می‌باشد، پس مربع هر یک که مال باشد، در یکدیگر ضرب کنی مال مال شود.^۸ پس سخن بدین جا رسید مه مرفوع مره مال الا این اشیاء مزوح کط نج لزج مه

گ ۸۰ ر

۱. ق: مربع ه ی

۲. ق: + مربع سی درجه اعنی

۳. ق: کنند

۴. در اصل: + باشد؛ که زائد بود و حذف شد.

۵. ق: و این مبلغ مساوی

۶. +مخطوط: و چون اه ه ی یعنی سه مال الا این اشیا که ج ح است [الی] آخره و مقرر است که مال حاصل الضرب شیء در شیء است، پس ه ی و ل هر یک به مثابه شیء باشد، و چون مربع ه ی که مال باشد و آن یه است سه مال است و آن اشیا که ج ح الی آخره است در مربع ل که هم مال باشد و آن یه مرفوع است ضرب کنی حاصل مال مال شود و آن مه مرفوع مره باشد الا ان اشیا مزوح الی آخره (حاشیه)

۷. در اصل: + ما

۸. + مخطوط: پس سخن بدین جا رسید مه مرفوع مال مال است. با یکی مال مال و این اشیاء مذکوره که مزوح کط نج لزج مه سادسه است. تا به این جا از شرح فهم کردیم آنچه نوشتیم، اکنون به وجهی که از رساله حضرت مرحوم قاضی زاده فهم کردیم منقول از مولانا غیاث الدین جمشید محصل این است که به حکم الجبر (حاشیه).

سادسه معادل است با مال مال.

تا به این جا از شرح فهم کردیم آن چه نوشتیم، اکنون به وجهی که از رسالهٔ حضرت قاضی زاده منقول از مولانا غیاث الدین جمشید مفهوم شد، این است که مذکور می‌شود:

[۲۴] پس به حکم الجبر حذف کردیم استثنا را، و بر طرف دیگر افزودیم،

چنین شد مه مرفوع مال معادل است با مال مال و اشیاء مذکوره یعنی مزوح الی آخره. هر یک از معادلین^۱ یک مرتبه منحط ساختیم، چنین شد: مه مرفوع مره شیء معادل است با مکعب و این اعداد که مزوح کط نج الی آخره.^۲

[۲۵] پس قاضی [زاده] می‌فرماید وبعد هذه التصرفات^۳ انتهى المسئلة الی

اشیاء تعدل عدداً وكعباً وليست هذه من المسائل الست المشهورة، لكن لا

يخفى انه لو قسم العدد والكعب على عدد الاشياء لخرج الشيء؛ فاحتمال رحمه

الله حيلة لطيفة في تحصيل الكعب ليدخله في القسمة. فقسم اولاً بعض العدد

على عدد // الاشياء وحصل مكعب الخارج وضمه الی الباقي من العدد، ثم قسم

بعضاً آخر من المجموع وحصل مكعب^۴ الخارجين وضمه فضلته على مكعب الخارج

الخارج الاول الی الباقي من المجموع ومثاله هكذا [...]

۱. در اصل: معادلست

۲. قاضی زاده در رسالهٔ فی استخراج جیب درجهٔ واحدة به نقل از کاشانی چنین می‌گوید: «قال: فبعد الجبر والمقابلة يكون مه مالا يعادل مزوح کط نج لزج لزیه سابعة شيئاً ومال مال حططنها بمنزلة، فصار مه شيئاً معادلاً لمكعب وهذا العدد: مزوح کط نج لزج لزیه سابعة».

۳. ر: + کلها

۴. ر: + مجموع

بسم الله الرحمن الرحيم

گ ۸۱ ر

استخراج جیب یک درجه بر وجهی برهانی که ارباب رصد سمرقند فرموده‌اند، عمل کنیم آن‌گاه براهین آن مشغول شویم. [۲۶] مولانا مرحوم غیاث الدین جمشید - رحمه الله - بر وجهی که حضرت^۱ محقق علامه قاضی‌زاده رومی در رساله که در این باب نوشته از او نقل می‌کند آن است که مه مرفوع مره را مقسوم علیه گردانیده است و مز مرفوع مره [از] مزوح کط نج لزج لزمه سابعه مقسوم اعتبار کرده، اما بر وجهی غریب عمل کرده: اولاً مز مرفوع مره را بر مه مرفوع مره قسمت می‌کند خارج قسمت یک درجه می‌شود.^۲ آن را در فوق سطر مقسوم در مواضعش می‌نهد و باقی از مقسوم را در سمت خط فاصل کما هو المعهود می‌گذارد. پس آن یک درجه خارج را یعنی آ را مکعب می‌سازد، همان آ درجه می‌شود؛ در تحت مقسوم در مقابل^۳ جنس خود می‌نهد و به همان جنس مقسوم ضم کرده^۴ مجموع را در تحت خط فاصل می‌نهد. باز خارج قسمت دیگر پیدا می‌کند و آن ب خواهد بود.^۵ بعد از عمل آن‌چه می‌ماند در تحت خط فاصل نهاد؛ مکعب این خارج ثانی و خارج اول را هر دو حاصل می‌کند و در تحت باقی مانده از قسمت جنس در مقابل جنس

۱. در اصل: + حضرت؛ که اضافی بود و حذف شد.

۲. ر: قسم مز مرفوع مره علی مه الذی هو ایضاً مرفوع مره، فخرج آ درجه

۳. در اصل: مقابله

۴. ر: فوضع کعب آ الذی هو ایضاً آ درجه تحت جنسه وضمه إلى الباقی

۵. ر: ثم قسم المجموع، فخرج ب دقیقه

می‌نهد و با یکدیگر جمع می‌کند.^۱ و باز خارج قسمت دیگر پیدا می‌کند و بدین
طریقه عمل باتمام می‌رساند. آن اعداد خارج قسمت جیب یک درجه است و درین عمل
که می‌کنیم این مؤامره مشروح // و ظاهر خواهد شد.

اول \bar{a} درجه خارج قسمت بود، مکعب او را که هم \bar{a} درجه باشد، در \bar{b} تحت و درجه
از مقسوم نهاده با \bar{b} جمع کرد. چنانچه باقی‌مانده از قسمت اول \bar{b} زح الی اخره
سطر المقسوم باشد خارج قسمت دوم \bar{b} بود مکعب خارجین حاصل کرد و فضل او را
بر مکعب خارج اول گرفت و آن فضل را بر مقسوم افزود. باز خارج قسمت سیم که \bar{m}
است استخراج کرد و بر طریقه معلومه عمل کرد و ما مثال مکعب هر یک و فضل او بر
مکعب سابق نوشته‌ایم. و طریقهٔ تحصیل مکعب آن است که عدد را در نفس خودش
ضرب کند (یعنی مربع سازد)، باز همان عدد را در مربعش ضرب کند، حاصل مکعب
باشد. و چون عمل به خامسه رسید و موافق عمل استاد آمد - اگر دیگر در عمل شروع
می‌رود، عمل تکعیب به تطویل می‌انجامد- و چون مقصود بیان کیفیت عمل بود، بر
همین اختصار نمود؛ هر کس را بیشتر از این خواهد بر همین منوال عمل نماید.

۱. ر: ثم حصل مکعب \bar{a} الذی هو \bar{a} و \bar{b} ح، و وضع کلا من مفردات فضله علی مکعب الأول تحت جنسه
و ضمها إلى الباقي

						يد	يا	مج	مط		ب	ا
				يه	لز	ج	لز	نچ ح	كط يب	ح و	و ا	مز مه
					مط	مو	كچ	ا ب	مب لط	يد مه	ز ل	ب ا
						ن	و	ك	كا يه	كط ب	لز لو و	
			ز	يه	كب	كه	كا	ب	و ب	لب لب	ا و	
			ز	ح	م	يب	كو	كه يه	ح ح	و و	و و	
				كو	ه	يا	لو	و و	و و	و و	و و	
	يا	لا	مد	مه	كچ	لو	لا	يب	يا ل	و و	و و	و و
	يا	لا	مد	يب	لا	لو	لا	يب	يا ل	و و	و و	و و
												مه

گ ٨٢ ر

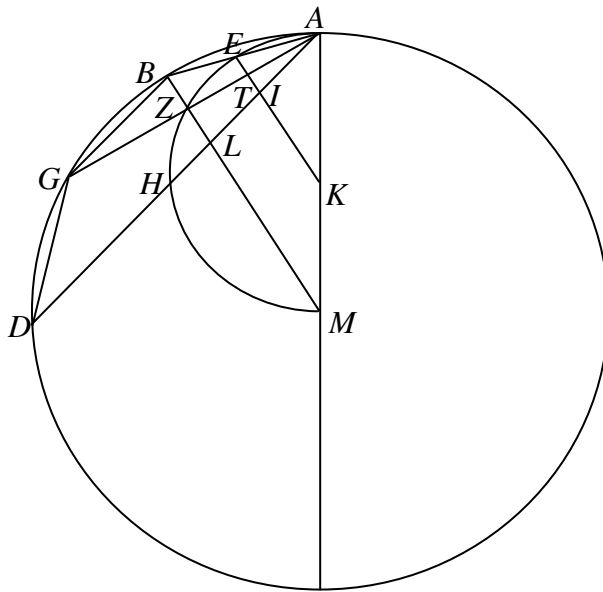
<p>الخارج الخامس يا مكعب الخوارج الخمسه اح نج لب كه ك ح كا لا يب مد لا يا فضله على مكعب الخوارج الاربعه و و و و و لا يا وضعناه مكانه</p>	<p>الخارج الرابع مج مكعب الخوارج الاربعه اح نج لا مط ط ب يه ح ز فضله على مكعب الخوارج الثلثه و و ب كا كه كب نج يد ح ز وضعناه مكانه</p>	<p>الخارج الثالث مط مكعب الخوارج الثلثه اح يا كچ مو مط فضله على مكعب الخارجين و ب لط ب كچ مو مط سادسه وضعناه مكانه</p>	<p>الخارج الثاني ب مكعب الخارجين اعنى مكعب اب كان ا و يب ح درجه فضله على المكعب الاول و يب ح وضعناها مكانه</p>	<p>الخارج الاول ا درجه مكعبه ا درجه وضعناها فى سطر المقسوم تحت و درجه فصار ز</p>
--	--	---	--	---

شرح رساله

شمارهٔ هر بند شرح متناظر با بند هم شماره از متن رساله است؛ اما ترتیب بندهای شرح مطابق با ترتیب رساله نیست؛ زیرا مؤلف روش کاشانی و قاضی زاده را به طور موازی بیان می‌کند، اما در شرح بنا بر آن بوده که روش کاشانی و قاضی زاده به طور کامل، پیوسته و مجزا از هم آورده شود.

[۱] مقدمهٔ اول: در هر چهارضلعی محاط در دایره، مجموع حاصل ضرب اضلاع مقابل برابر است با حاصل ضرب دو قطر.

[۲] مقدمهٔ دوم: هرگاه دو وتر در دایره‌ای یکدیگر را قطع کنند، حاصل ضرب دو بخش یکی از وترها مساوی است با حاصل ضرب دو بخش وتر دیگر.



[۳] در دایرهٔ M به شعاع $R=60$:

$$AB = BG = GD = 2^\circ$$

[۴] با رسم دایرهٔ K (K وسط AM) به شعاع $r=30$: شکل ۱

$$AE = \frac{1}{2} AB$$

$$AZ = \frac{1}{2} AG$$

$$AH = \frac{1}{2} AD$$

[۵] در دایره K نیز:

$$AE = EZ = ZH = r$$

[۶] چون $\angle BAG = \angle GAD$:

$$ET = TI, \quad BZ = ZL \\ AZ \perp EK, BM$$

[۷]

$$AE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} Ch 2^\circ = \sin 1^\circ$$

$$AH = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} Ch 6^\circ = \sin 3^\circ = 3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15^{\text{سابعه}}$$

روش کاشانی:

[۸] طبق مقدمه اول، در چهارضلعی AEZH داریم:

$$AE \times ZH + AH \times EZ = AZ \times EH \Rightarrow AE^2 + AH \times EZ = AZ^2$$

[۹]

$$\sin 1^\circ = x = EZ = ZH$$

پس از جاگذاری مقادیر:

$$x^2 + x \sin 3^\circ = AZ^2 \quad (1)$$

[۱۱] طبق مقدمه دوم:

$$AT \times TZ = ET \times (2r - ET) \Rightarrow AT^2 = ET \times (2r - ET)$$

$$\Rightarrow AT^2 + ET^2 = 2r \times ET$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه AET طبق قضیه فیثاغورس (شکل عروس) داریم:

$$AE^2 = AT^2 + ET^2$$

بنابراین:

$$AE^2 = 2r \times ET$$

[۱۲] ← [۱۳]

[۱۳]

$$x^r = 60 \times ET \Rightarrow ET = \frac{x^r}{60} \Rightarrow ET^r = \frac{x^f}{60^r} = 0; 1x^f$$

$$AT = \frac{AZ}{2} \Rightarrow AT^r = \frac{AZ^r}{4}$$

از رابطه (۱):

$$AT^r = \frac{x^r}{4} + 0; 47, 6, 8, 29, 53, 37, 3, 45x$$

$$ET^r = AE^r - AT^r = x^r - AT^r = \frac{3x^r}{4} - 0; 47, 6, 8, 29, 53, 37, 3, 45x = 0; 1x^f$$

[۱۴] جبر:

$$0; 1x^f + 0; 47, 6, 8, 29, 53, 37, 3, 45x = \frac{3x^r}{4}$$

[۱۵] تکمیل:

$$0; 1, 2 \cdot x^f + 1; 2, 48, 11, 19, 51, 29, 25x = x^r$$

(۲)

[۱۶]

$$0; 1, 2 \cdot x^r + 1; 2, 48, 11, 19, 51, 29, 25 = x$$

[۲۱] ← [۹], [۱۳]

[۲۲]

$$ET^r = \frac{3x^r}{4} - 0; 47, 6, 8, 29, 53, 37, 3, 45x$$

$$EI^r = 3x^r - 3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15x$$

[۲۳] رابطه (۲) ضرب در ۴۵ مرفوع مره:

$$45, 0; 1x^r - 47, 6, 8, 29, 53, 37, 3, 45x = x^f$$

[۲۴] معادلهٔ کاشانی:

$$45, 0; 1x = x^r + 47, 6, 8, 29, 53, 37, 3, 45$$

[۲۵] قاضی زاده درباره روش کاشانی در حل معادله چنین می گوید:^۱

«پس از همه این تغییرات مسأله منتهی می شود به اشیائی که معادل است با یک عدد و یک کعب، که جزء مسائل شش گانه معروف نیست. ولی پوشیده نیست که اگر او عدد و کعب را بر ضریب شیء تقسیم می کرد، شیء به دست می آمد؛ بدین ترتیب [کاشانی] - خدایش رحمت کند- چاره ای ظریف برای جایگزین کردن کعب و وارد کردن آن در تقسیم به کار گرفت: وی ابتدا بخشی از عدد^۲ را بر ضریب شیء تقسیم کرد، و [سپس] مکعب خارج قسمت را به دست آورد، و آن را بر باقی مانده افزود. سپس بخش دیگری از [این] حاصل جمع را [بر ضریب شیء] تقسیم کرد.»

طبق توضیحات قاضی زاده، کاشانی ابتدا معادله نهایی $(ax = x^3 + b)$ را به صورت $x = \frac{x^3 + b}{a}$ می نویسد. برای تبیین روش تکرار کاشانی به کمک نمادهای امروز، بهتر است a ، b و x را با در نظر گرفتن مراتب شصتگانی آنها نشان دهیم:

$$a: a_1 a_0; a_{-1} a_{-2} a_{-3} a_{-4} \dots$$

$$b: b_1 b_0; b_{-1} b_{-2} b_{-3} b_{-4} \dots$$

$$x: x_0; x_{-1} x_{-2} x_{-3} x_{-4} \dots$$

در این روش، کاشانی در هر مرحله یکی از مراتب شصتگانی x را محاسبه می کند:

$$x_0 = \frac{b_1}{a_1}, \quad r_1 = b_1 \bmod a_1$$

$$x_{-1} = \frac{x_0^3 + r_1}{a_1}, \quad r_0 = (x_0^3 + r_1) \bmod a_1$$

«و [این بار] مکعب مجموع دو خارج قسمت را به دست آورد، و تفاضل آن بر مکعب خارج قسمت اول را به باقی مانده تقسیم قبل اضافه کرد. سپس بخشی دیگر از [این] حاصل جمع دوم را [بر ضریب شیء] تقسیم کرد.»

۱. این قسمت از شرح بر مبنای رساله فی استخراج جیب درجه واحد قاضی زاده نوشته شده است.

۲. «بخشی از عدد» یعنی «رقم(های) اولین مرتبه شصتگانی».

$$x_{-2} = \frac{(x_0 x_{-1})^{\zeta} - x_0^{\zeta} + r_0}{a_1}, \quad r_{-1} = [(x_0 x_{-1})^{\zeta} - x_0^{\zeta} + r_0] \bmod a_1$$

«و مکعب مجموع خارج‌قسمت‌ها را به دست آورد، و تفاضل آن بر مکعب دو خارج‌قسمت [قبلی] را به باقی‌ماندهٔ حاصل جمع دوم اضافه کرد. سپس بخشی دیگر از [این] حاصل جمع سوم را [بر ضرب شئی] تقسیم کرد، و بر همین منوال عملیات را ادامه داد تا جایی که به حاصلی غیرقابل‌اعتنا رسید.»

$$x_{-3} = \frac{(x_0 x_{-1} x_{-2})^{\zeta} - (x_0 x_{-1})^{\zeta} + r_{-1}}{a_1}, \quad r_{-2} = [(x_0 x_{-1} x_{-2})^{\zeta} - (x_0 x_{-1})^{\zeta} + r_{-1}] \bmod a_1$$

[۲۶] برای آن که روش کاشانی را دقیق‌تر دریابیم، از جدول ۱ (← صفحهٔ بعد) و نشانه‌های زیر کمک می‌گیریم:

$n = 0, 1, 2, 3 \dots$ (شمارندهٔ مراحل)

$$x^{(n)} = x_{-n} \dots x_0$$

$$(x^{(n-1)})^{\zeta} - c^{(n)} = (x^{(n)})^{\zeta}$$

$$b^{(n)} = c^{(n)} + r^{(n)}$$

$$r^{(n)} = b^{(n-1)} \bmod a_1$$

$$x_{-n} = \frac{b^{(n)}}{a_1}$$

روش قاضی‌زاده:

[۱۰]

$$AH = BD$$

طبق مقدمهٔ اول در چهارضلعی $ABGD$:

$$AB \times GD + AD \times BG = AG \times BD \Rightarrow AB^{\zeta} + AD \times BG = AG^{\zeta}$$

$$AB = \text{Ch } \zeta^{\circ} = x$$

$$AD = \text{Ch } \epsilon^{\circ} = 6; 16, 49, 7, 59, 8, 56, 30 \text{ سابعه}$$

پس از جاگذاری مقادیر:

جدول ۱: اصلاح شده جدول کاشانی، منقول از قاضی زاده در رساله فی استخراج جیب درجه واحده

i	۱	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	-۸	-۹	-۱۰	-۱۱	-۱۲
x		۱	۲	۴۹	۴۳	۱۱	۱۴	۴۴	۱۶	۱۹	۱۶			
$b^{(0)}$	۴۷	۶	۸	۲۹	۵۳	۳۷	۳	۳۷	۱۵					
$c^{(1)}$		۱												
$b^{(1)}$	۲	۷												
$c^{(2)}$			۶	۱۲	۸									
$b^{(2)}$		۳۷	۱۴	۴۲	۱									
$c^{(3)}$			۲	۳۹	۲	۲۳	۴۶	۴۹						
$b^{(3)}$			۳۲	۲۱	۴	۰	۵۰	۲۶						
$c^{(4)}$				۲	۲۱	۲۵	۲۲	۱۳	۵۵	۸				
$b^{(4)}$				۸	۲۵	۲۶	۱۲	۴۰	۱۰	۸				
$c^{(5)}$						۳۶	۱۱	۵	۲۶	۲۳	۴۵	۴۴	۳۱	۱۱
$b^{(5)}$							۱۱	۲	۲۳	۲	۴۵	۴۴	۳۱	۱۱
$c^{(6)}$								۰	۴۶	۰	۱۲	۳۰	۵۵	
$b^{(6)}$								۳۳	۹	۴۸	۴۹	۲	۴۰	
$c^{(7)}$									۲	۲۴	۴۴	۲۲	۱۲	
$b^{(7)}$									۱۲	۵۳	۳۳	۲۴	۵۲	
$c^{(8)}$										۰	۵۲	۳۷	۵۷	
$b^{(8)}$										۱۴	۲۶	۲	۴۹	
$c^{(9)}$											۱	۲	۳۰	
$b^{(9)}$										۱۲	۲۷	۵	۱۹	

$$x^T + x \text{ Ch } \phi^\circ = AG^T \quad (3)$$

$$[20] \leftarrow [17]$$

[۱۸] طبق مقدمه دوم:

$$AZ^T = BZ \times (2R - BZ) \Rightarrow AZ^T + BZ^T = 2R \times BZ$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABZ طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AZ^2 + BZ^2$$

بنابراین:

$$AB^2 = 2R \times BZ$$

[۱۹]

$$x^2 = 2 \times 60 \times BZ \Rightarrow BZ = \frac{1x^2}{2} = ;, 30x^2 \Rightarrow BZ^2 = ;, 15x^4$$

$$AZ^2 = \frac{AG^2}{4}$$

از رابطهٔ (۳):

$$AZ^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{6; 16, 49, 7, 59, 8, 56, 30}{4} x$$

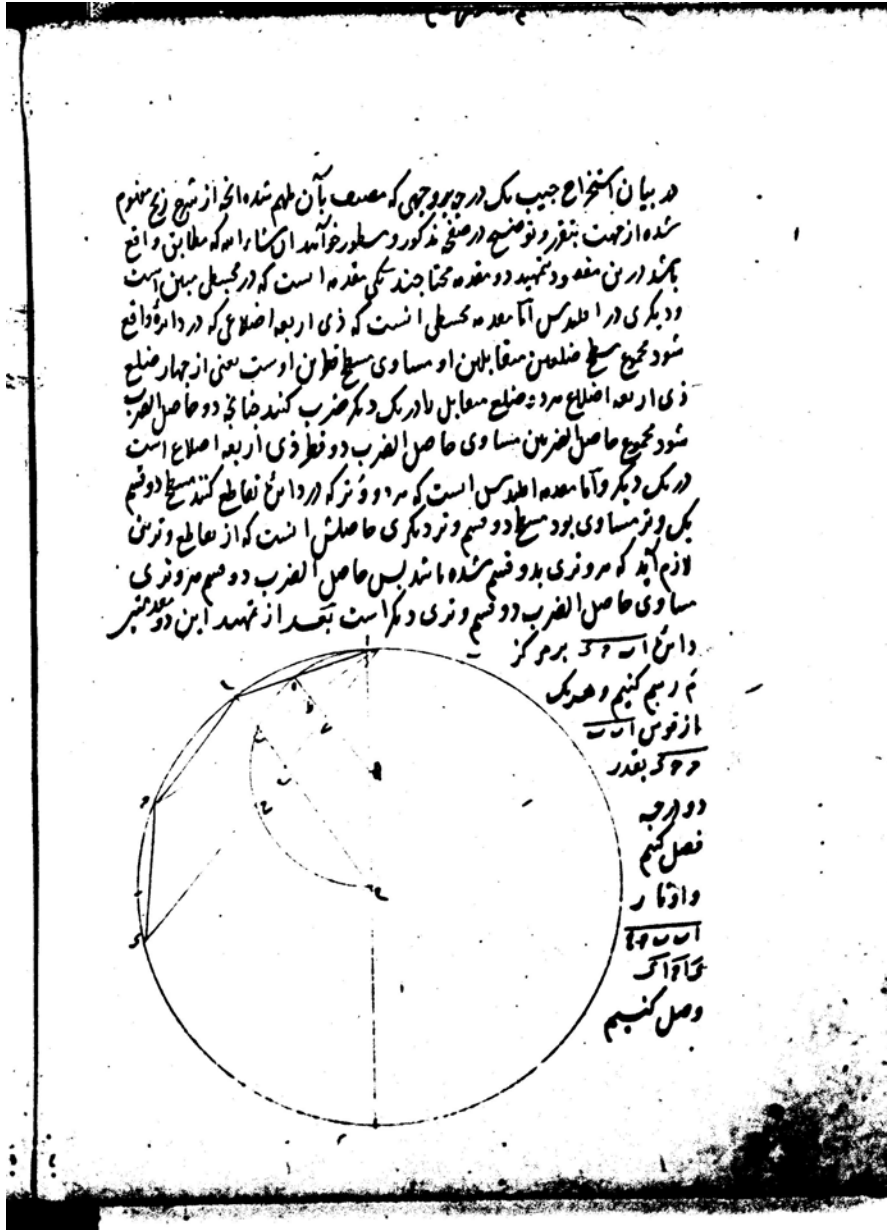
$$BZ^2 = AB^2 - AZ^2 = x^2 - AZ^2 = \frac{3x^2}{4} - 1; 34, 12, 16, 59, 47, 14, 7 x = ;, 15x^4$$

[۲۰] معادلهٔ قاضی‌زاده:

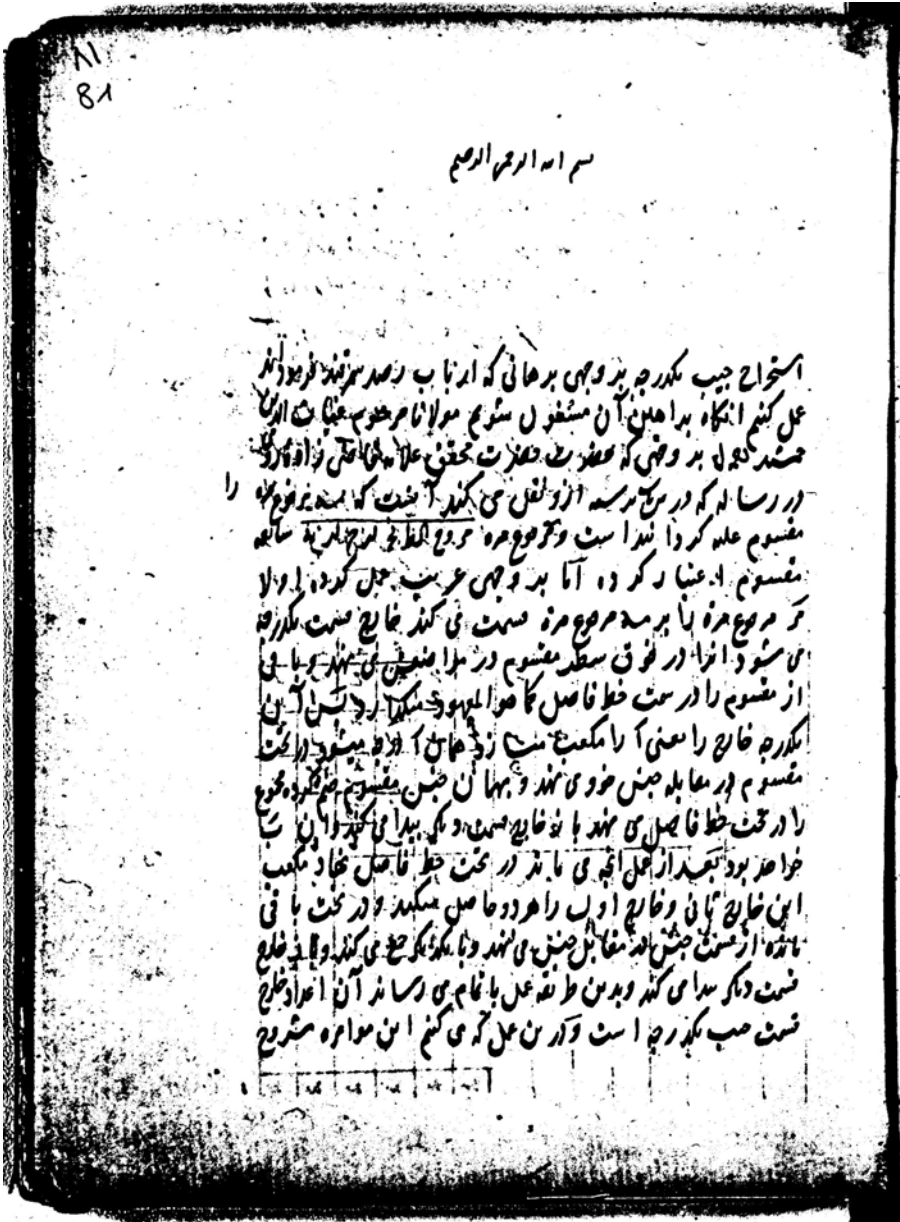
$$;, 20x^2 + 2; 5, 36, 22, 39, 42, 58, 50 = x$$

منابع

- افشار، ایرج؛ دانش‌پژوه، محمدتقی، فهرست نسخه‌های خطی کتابخانه ملی ملک، جلد ششم، با همکاری محمدباقر حجتی و احمد منزوی، تهران ۱۳۶۶ ش.
- الغیبیگ، زیج‌الغیبیگ، نسخه خطی شماره ۳۰۵۳ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران.
- باقری، محمد، از سمرقند به کاشان، نامه‌های غیاث‌الدین جمشید کاشانی به پدرش، تهران ۱۳۷۵ ش.
- بیرجندی، عبدالعلی، شرح زیج‌الغیبیگ، نسخه خطی شماره ۲۶۷۴ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران.
- چلبی، میرم، دستور العمل و تصحیح الجدول، نسخه دست‌نویس مؤلف به شماره ۹-۸۴۸ کتابخانه حمیدیه استانبول، میکروفیلم شماره ۲۳۴۱ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران.
- سمرقندی، کمال‌الدین عبدالرزاق، مطلع سعدین و مجمع بحرین، به اهتمام عبدالحسین نوایی، ج ۲، دفتر اول، تهران ۱۳۷۲ ش.
- سوادی، فاطمه، «نقدی بر استدلال رزنفلد در باب انتساب یک رساله ریاضی به الغیبیگ»، مجله تاریخ علم، شماره ۴، پاییز و زمستان ۱۳۸۴، ص ۸۵-۱۰۳.
- قاضی‌زاده رومی، رساله فی استخراج جیب درجه واحده، نسخه شماره ۱۱/۳۱۸۰ کتابخانه ملی ملک.
- قربانی، ابوالقاسم، زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری، تهران ۱۳۵۷ ش.
- _____، کاشانی‌نامه، احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی، تهران ۱۳۶۸ ش.
- قوشچی، ملا علی، رساله در شرح زیج‌الغیبیگ، نسخه خطی شماره ۳۴۲۰ کتابخانه ملی ملک.
- کاشانی، غیاث‌الدین جمشید، زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلیخانی، نسخه خطی شماره ۲۶۹۲ کتابخانه سلیمانیه ترکیه.
- _____، مفتاح الحساب، نسخه خطی شماره ۱/۳۱۸۰ کتابخانه ملی ملک.
- محیط طباطبائی، سید محمد، «غیاث‌الدین جمشید کاشانی»، مجله آموزش و پرورش، سال دهم، شماره سوم، خرداد ماه ۱۳۱۹ ش.
- منزوی، احمد، فهرستواره کتابهای فارسی، مجلد چهارم، تهران ۱۳۷۸ ش.



تصویر برگ نخست رساله در بیان جیب یک درجه



تصویر برگ نخست بخش دوم رساله در بیان جیب یک درجه