



کنترل بهینه ریزش گردابه حول سیلندر مربعی شکل با استفاده از مدل رتبه کاسته

همایون امداد^{۱*}، علیرضا مستوفی‌زاده^۲، سید ابوالفضل موسوی‌نیا^۳

۱- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

۲- استادیار مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر

* صندوق پستی ۳۴۷۴، hemdad@shirazu.ac.ir

چکیده- در این مقاله، رویکرد کنترل بهینه برای کنترل فعال دنباله تشکیل شده در پشت سیلندر مربعی شکل در رژیم جریان آرام ($Re = 200$) مورد مطالعه قرار گرفته است. هنگامی که معادلات ناویر-استوکس به عنوان معادلات حالت مورد استفاده قرار می‌گیرند، گسسته‌سازی معادلات کنترل بهینه منجر به یک مسئله با اندازه بزرگ می‌شود که از لحاظ محاسباتی خیلی سنگین می‌باشد. در طی فرایند کنترل بهینه، به منظور کاهش تعداد متغیرهای حالت، از مدل رتبه کاسته بر مبنای مدهای POD به عنوان معادلات حالت استفاده شده است. برای به دست آوردن معادلاتی که برای کنترل مناسب هستند، با معرفی یک تابع کنترل به مدل رتبه کاسته و معرفی یک ورودی کنترل جدید، این معادلات اصلاح شده‌اند و با به کارگیری روش شبه‌خطی‌سازی، که از روش‌های عددی برای حل معادلات کنترل بهینه است، خط مسیر بهینه برای ورودی کنترل به دست آمده است. تحریک جریان، از طریق دمش و مکش سیال صورت می‌گیرد. نتایج به دست آمده در قسمت نتایج مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: کنترل بهینه، ریزش گردابه، دمش و مکش، مدل رتبه کاسته، مدهای POD

Optimal control of vortex shedding around square cylinder via reduced order model

H. Emdad^{1*}, A. R. Mostofizadeh², S. A. Mousavinia

1- Assis. Prof, Mech. Eng., ShirazUniv, Shiraz, Iran.

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., MalekAshtarUniv of Tech., Shahinshahr, Iran.

3- Msc Student of Areospace. Eng., MalekAshtarUniv of Tech, Shahinshahr, Iran

* P.O.B. 3474, Shiraz, hemdad@shirazu.ac.ir

Abstract- In this paper, optimal control of vortex shedding behind square cylinder in laminar flow regime ($Re=200$) has been investigated. When Navier-Stokes equations are used as state equations, the discretization of the optimality system leads to large scale optimization problems that represent a tremendous computational task. In order to reduce the number of state variables during the optimization process, a Reduced-Order Model (ROM) based on POD modes is derived to be used as state equations. Then, these equations are modified by introducing a Control Function to ROM in order to gain equations which are suitable for optimal control. Optimal trajectory for control input has been found by employment of Quasi-linearization which is one of the numerical methods for solving optimal control

Keywords: Optimal Control, Vortex Shedding, Suction and Blowing, Reduced Order Model, POD Modes.

۱- مقدمه

کابل‌های نگه‌دارنده، دکل‌ها و بالابرها و لوله‌های استخراج نفت در دریاها و اقیانوس‌ها، و بناهایی با نسبت طول به عرض زیاد که در معرض جریان‌ها قرار دارند، نظیر دودکش‌ها، ساختمان‌های بلند، پل‌ها و سیستم‌هایی که توسط کابل معلق شده‌اند، از این موارد هستند.

تاکنون پیشرفت‌های زیادی در گسترش روش‌های کنترلی مختلف حاصل شده است؛ اگرچه کنترل سیال هنوز یکی از موضوعات فعال تحقیقاتی است. به دلیل ماهیت غیرخطی معادلات ناور-استوکس و پیچیدگی دینامیک جریان، طراحی و به‌کار بردن یک سیستم کنترلی هنوز چالش‌برانگیز است. به‌منظور کاهش پیچیدگی معادلات حاکم، معمولاً مدل‌های رتبه کاسته^۷ مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی از روش‌های ایجاد این مدل‌ها استفاده از مدهای متعامد مناسب (POD)^۸ و تصویرسازی گالرکین^۹ معادلات حاکم بر روی این مدها می‌باشد. POD وسیله‌ای را فراهم می‌کند تا یک پایه (مد) بهینه یا به عبارتی دارای حداقل درجه آزادی تولید کند، که از طریق آن دینامیک سیستم نشان داده می‌شود. POD، همچنین با نام بسط کارهونن لویو^{۱۰} در آمار، تحلیل مؤلفه‌های اصلی^{۱۱} یا توابع متعامد تجربی^{۱۲}، در متالوژی شناخته می‌شود.

تاکنون تحقیق‌های متعددی برای کنترل جریان حول اجسام ساده نظیر سیلندرها، دایروی و مربعی‌شکل، به‌منظور درک بهتر عمل کنترل، صورت گرفته است. نمونه‌هایی از این مطالعات در ادامه آورده شده‌اند.

در سال ۱۹۹۶، تانگ یک روش برای کنترل فعال جریان‌ها داشته ارائه کرد. روش پیشنهادشده در این تحقیق، برای یک جریان تراکم‌ناپذیر حول سیلندر دایروی در رینولدز ۱۰۰ به‌کار گرفته شده و عمل کنترل از طریق چرخش سیلندر انجام گرفته است. مدل رتبه کاسته با استفاده از تکنیک تجزیه متعامد مناسب^{۱۳} به‌دست آمده است. برای کنترل معادلات از دو روش تابع کنترل^{۱۴} و روش پنالتی^{۱۵} استفاده شده است. در

پدیده اندرکنش بین سیال و سازه در جدایش جریان و دنباله اجسام ارزش ویژه‌ای در فیزیک جریان داشته و همچنین در آیرودینامیک و هیدرودینامیک کاربرد زیادی دارد. تعداد زیادی از مشکلات ناشی از برهم‌کنش سیال و سازه ناشی از ریزش گردابه ناپایا در پشت اجسام ناهموار^۱ می‌باشد. مثال‌هایی از کاربردهای عملی که در معرض این موضوع قرار دارند، عبارت‌اند از: دنباله‌های پشت برجک زیردریایی و نگه‌دارنده‌های شعله در موتورهای توربین جت.

در شکل ۱ نمونه‌ای از حرکت دوره‌ای^۲ و نظم‌یافته ورتیستی، که با عنوان خیابان ون کارمن^۳ شناخته می‌شود، برای یک سیلندر مربعی شکل نشان داده شده است.



شکل ۱ خیابان ون کارمن تشکیل شده در پشت سیلندر مربع شکل در رینولدز ۲۰۰

این ریزش گردابه‌ها، باعث القاء نیروهای نوسانی به جسم می‌شوند، که معمولاً به مؤلفه‌های نیروی پسا^۴ در راستای جریان و نیروی برا^۵ در راستای عمود بر مسیر جریان تجزیه می‌شود. اگر جسم انعطاف‌پذیر باشد و یا بتواند حرکت کند، این نیروها می‌توانند باعث نوسان جسم و منجر به مشکل ارتعاشات ناشی از گردابه^۶ شوند و اگر فرکانس ریزش گردابه نزدیک به فرکانس طبیعی جسم باشد، تشدید حاصله می‌تواند منجر به نوساناتی با دامنه زیاد شود و درنهایت به شکست سازه بیانجامد. درک این مسئله، از اهمیت زیادی در طراحی و نگهداری ساختارهای مختلف برخوردار است و کنترل این پدیده می‌تواند منجر به کاهش اثرات زیان‌بار آن شود. سازه‌های کنار ساحل، نظیر

7. Reduced order models
8. Proper Orthogonal Decomposition
9. Galerkin projection
10. Karhunen-Loeve expansion
11. Principal component analysis
12. Empirical orthogonal functions
13. Proper orthogonal decomposition
14. Control function
15. Penalty method

1. Bluff bodies
2. Periodic
3. Von Karman street
4. Drag
5. Lift
6. Vortex induced vibration

همکارانش، انجام گرفت. آن‌ها، به‌منظور کنترل جریان حول سیلندر مربعی‌شکل، یک صفحه کنترل عمودی را در بالادست جریان قرار دادند. نیروهای اعمالی سیال بر روی سیلندر، فرکانس ریزش گردابه و الگوهای جریان در ارتفاع‌ها و مکان‌های مختلف صفحه کنترلی مورد بررسی قرار گرفتند. مطالعات عددی نشان دادند که نه‌تنها نیروی پسای سیلندر به‌طور قابل توجهی توسط صفحه کنترلی کاهش پیدا کرد، بلکه نوسانات نیروی برا نیز کاهش داده شد. همچنین، محل بهینه صفحه کنترلی برای حداقل کردن نیروی پسای سیلندر در هر ارتفاع صفحه پیدا شد [۹].

در سال ۲۰۰۸، جسی ویلر از مدل رتبه کاسته به‌همراه کالیبره کردن استفاده کرد و به نتایج دقیق‌تری نسبت به مدل رتبه کاسته رایج دست یافت. ایده کالیبره کردن، نزدیک نگه داشتن ساختار مدل رتبه کاسته به ساختار مطلوب با تنظیم ضرایب متغیرهای حالت در مدل رتبه کاسته می‌باشد. در این مطالعه، همچنین از کالیبره کردن برای به‌دست آوردن قانون بازخورد تناسبی^۵ برای کنترل نیز استفاده شده است [۱۰].

در سال ۲۰۰۸، لایک و همکارانش اثر دمش و مکش جریان را بر روی ریزش گردابه پشت یک سیلندر مربعی قرار گرفته در یک کانال مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها عمل دمش و مکش را از طریق شکاف‌هایی که در پایین دست جریان و بر روی سطح کانال تعبیه شده بود انجام دادند [۱۱].

در سال ۲۰۰۸، ساید ترکی از یک صفحه شکافنده^۶ افقی برای کنترل ریزش گردابه‌ها در پشت یک سیلندر مربعی شکل استفاده کرد. او اعداد رینولدزهای بین ۱۱۰ تا ۲۰۰ را مورد بررسی قرار داد و توانست یک رابطه خطی برای طول بحرانی صفحه، که در آن طول ریزش گردابه‌ها محو می‌شوند، پیدا کند [۱۲].

در سال ۲۰۱۰، امران اختر، بعد از توسعه یک کد سه‌بعدی جریان حول سیلندر دایروی و استفاده از پردازش موازی، مدل رتبه کاسته را با استفاده از مدهای POD تشکیل داد و بعد از خطی کردن معادلات حول میدان متوسط جریان، از تئوری کنترل کلاسیک و جابه‌جایی قطب‌ها استفاده کرد تا بتواند مقدار سرعت مکش جریان را به‌دست بیاورد [۱۳].

این مطالعه اشاره شده است که برای به‌دست آوردن توابع پایه برای مدل رتبه کاسته، میدان تحریک‌نشده نمی‌تواند نماینده خوبی برای استخراج مدهای پایه باشد و قادر نیست کنترل جریان را پیش‌بینی کند. از طرفی انتخاب نامناسب تابع کنترل می‌تواند نتایج نادرستی را پیش‌بینی کند و حتی موجب مغشوش تر شدن میدان جریان شود. در این مطالعه، برای کنترل جریان از کنترل بهینه استفاده شده است و تابع کنترل با چرخش ساده سیلندر با یک سرعت ثابت در یک جریان ساکن، به‌دست آمده است [۱-۴].

در سال ۱۹۹۷، سانجای میتال سعی کرد با قراردادن یک سیلندر ثانویه و خیلی کوچک‌تر در میدان دنباله^۱ ریزش گردابه‌های پشت سیلندر را کم و متوقف کند. او توانست در رینولدزهای کم و مشخصی ریزش گردابه را کاملاً متوقف کند [۵].

در سال ۲۰۰۱، ژینجین لی با استفاده از یک روش بر مبنای فرمول‌بندی الحاقی^۲، که برای کنترل بهینه سیستم‌های توزیع شده و مسائل کنترلی با ابعاد زیاد مناسب است، کنترل جریان حول سیلندر دایروی را تا رینولدز ۱۱۰ از طریق دمیدن و مکیدن جریان انجام داد. در این مطالعه، سه تابع عملکرد براساس معیارهای انرژی، ورتیسته و پسای ویسکوز^۳ ارائه شده است. برای حداقل کردن تابع هزینه از روش شبه‌نیوتون دی اف پی^۴ استفاده شده است. در همین سال، هومسکو به همراه ژینجین لی از روش یادشده با استفاده از چرخش سیلندر سعی کردند ریزش گردابه‌ها را متوقف کنند. آن‌ها مقدار بهینه سرعت زاویه‌ای سیلندر را در محدوده رینولدز ۶۰ تا ۱۰۰۰ به‌دست آوردند [۶،۷].

در سال ۲۰۰۲، لوسا زانتی سعی کرد، با استفاده از کنترل غیرفعال و از طریق مکش جریان، ریزش گردابه یک صفحه تخت که نسبت به جریان آزاد مورب بود را متوقف کند. مکنده‌ها در لبه حمله قرار داده شدند و برای تعیین مقدار درست مکش از مدل پتانسیل استفاده شد [۸].

در سال ۲۰۰۵، یک مطالعه عددی برای کاهش نیروهای اعمالی سیال بر روی سیلندر دوبعدی در یک کانال، توسط ژو و

1. Wake
2. Adjoint formulation
3. Viscouse drag
4. Quasi-Newton DFP (Davidon-Fletcher-Powell)

5. Feedback Proportional Law
6. Splitter Plate

تحقیق حاضر از فرمول‌بندی تابع جریان-ورتیسیتیه برای حل این معادلات استفاده شده است.

در این روش، تغییر متغیر به‌گونه‌ای صورت می‌گیرد که مؤلفه‌های سرعت با ورتیسیتی ξ و تابع جریان ψ جایگزین می‌شوند. مقدار ورتیسیتی برای جریان دوبعدی می‌تواند در سیستم مختصات کارتزین به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

و تابع جریان در این سیستم مختصات، توسط روابط زیر تعریف می‌شود:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

با استفاده از متغیرهای جدید و حذف فشار از معادله مومنوم (۲)، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

معادله مشتق جزئی حاصله، که از نوع سهموی می‌باشد، معادله انتقال ورتیسیتیه خوانده می‌شود. معادله دیگر که شامل دو متغیر جدید ξ و ψ می‌شود، می‌تواند با جایگزینی معادله (۴) در معادله (۳) به‌دست آید که معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi \quad (6)$$

این معادله مشتق جزئی که از نوع بیضوی می‌باشد، معادله تابع جریان^۳ خوانده می‌شود. به‌عنوان یکی از نتایج این تغییر متغیر، معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر دوبعدی، که ترکیب سهموی-بیضوی بودند، به یک معادله سهموی و یک معادله بیضوی شکسته شده‌اند. این معادلات با استفاده از اندازه ضلع سیلندر l به‌عنوان مقیاس طولی و سرعت جریان آزاد u_0 به‌عنوان مقیاس سرعت بی‌بعد شده‌اند. بنابراین عدد رینولدز به صورت $\text{Re} = \rho u_0 l / \mu$ تعریف می‌شود.

برای حل عددی معادلات حاکم، روش اختلاف محدود^۴ به‌کار گرفته شده است. برای گسسته‌سازی مکانی از شبکه‌ای که در شکل ۲ نشان داده شده، استفاده شده است. ابعاد این شبکه 219×199 می‌باشد.

در این مطالعه، سعی بر آن است که ریزش گردابه‌های پشت یک سیلندر مربعی‌شکل با استفاده از دمش و مکش جریان از روی سطوح سیلندر، متوقف یا کم شود. از نوآوری‌های انجام شده در این مقاله می‌توان به استفاده همزمان از مکش جریان از روی سطوح فوقانی و تحتانی سیلندر و دمش جریان از ضلع پشتی سیلندر برای تحریک جریان و همچنین استفاده از یک تابع کنترل برای اعمال اثر هر دو دمنده و دو مکنده در مدل رتبه کاسته اشاره کرد.

در ادامه ابتدا به چگونگی شبیه‌سازی میدان جریان می‌پردازیم. بعد از آن روش استخراج مدهای POD و تصویرسازی گالریکن کنترل بهینه توضیح داده می‌شوند و در نهایت نتایج حاصل از کنترل بهینه ارائه می‌شوند.

۲- شبیه‌سازی میدان جریان

معادلات حاکم بر جریان سیال، معادلات ناویر-استوکس هستند، که برای جریان تراکم‌ناپذیر به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

معادله مومنوم:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

که در آن ρ ، p ، u_i و ν به‌ترتیب، مؤلفه‌های سرعت، فشار، چگالی و ویسکوزیته سینماتیک سیال می‌باشند. این معادلات ترکیبی از یک دستگاه معادلات مخلوط بیضوی-سهموی می‌باشند و هم‌زمان با هم حل می‌شوند. سرعت و فشار مجهول‌های این معادلات می‌باشند. مشکل اساسی در حل این معادلات این است که بین معادله پیوستگی و مومنوم از نظر فشار هیچ‌گونه ارتباط مستقیمی وجود ندارد. در واقع معادله پیوستگی تنها یک قید محسوب می‌شود و در عمل کمکی به حل این معادلات نمی‌کند. برای حل این مشکل رویکردهای مختلفی از جمله روش تراکم‌پذیری مصنوعی^۱، روش‌های تصویرسازی^۲، فرمول‌بندی بر اساس ورتیسیتیه-سرعت و فرمول‌بندی بر اساس تابع جریان-ورتیسیتیه، ارائه شده‌اند. در

3. Stream function equation
4. Finite difference

1. Artificial compressibility method
2. Projection methods

در قسمت بعد به چگونگی استخراج مدهای POD از میدان‌های سرعت شبیه‌سازی شده پرداخته می‌شود.

۳- مدهای POD

POD زیرفضای لازم براساس مدهای بهینه یا پایه‌هایی که دارای حداقل درجه آزادی هستند را فراهم می‌کند. POD به‌طور موفقیت‌آمیزی بر روی بسیاری از سیستم‌های مهندسی و علمی نظیر مدل‌کردن دینامیک سیستم رتبه کاسته و پردازش تصویر به‌کار گرفته شده است و همچنین از آن به‌طور گسترده‌ای برای شناسایی ساختارهای اصلی در جریان‌های آشفته استفاده شده است.

بیان ریاضی بهینه‌بودن مدها به این صورت است که باید ϕ ای محاسبه شود که متوسط تصویر u بر روی ϕ را، که به‌طور مناسبی نرمال شده است، بیشینه کند [۱۶].

$$\max \frac{\langle (u, \phi) \rangle^2}{\|\phi\|^2}$$

که در آن $\langle \cdot \rangle$ نشان‌دهنده متوسط مجموعه، $\|\cdot\|$ نشان‌دهنده قدر مطلق و (\cdot, \cdot) نشان‌دهنده ضرب داخلی می‌باشد و $\|\phi\|$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

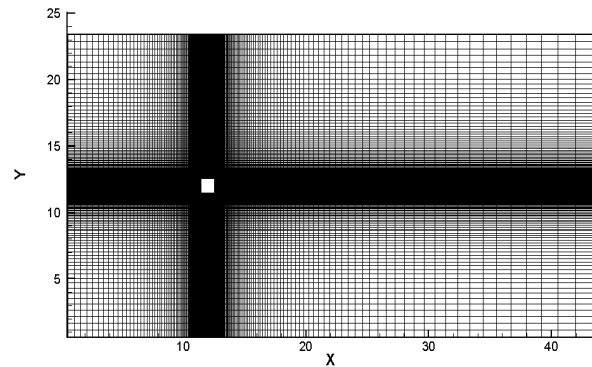
$$\|\phi\| = (\phi, \phi)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

با استفاده از حساب تغییرات، می‌توان نشان داد که معادله (۷) معادل با مسئله مقدار ویژه انتگرال فرد هولم^۷ است، که به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\int_{\Omega} R_{ij}(x, x') \Phi^j(x') dx' = \lambda \Phi^i(x) \quad (8)$$

که در آن i و j تعداد مؤلفه‌های سرعت و $R(x, x')$ تانسور همبستگی زمانی-مکانی دونقطه‌ای، λ مقادیر ویژه و Φ^j ها، توابع ویژه یا همان مدهای POD می‌باشند. با حل مسئله مقدار ویژه بالا، می‌توان مدهای POD را به‌دست آورد.

در سال ۱۹۸۷، سرویچ روش تصاویر^۸ را به‌عنوان یک روش کارآمدتر برای به‌دست آوردن مدهای POD نسبت به حل مستقیم مسئله مقدار ویژه (۳) معرفی کرد [۱۷]. در این روش داده‌های میدان جریان (u, v) حاصل از شبیه‌سازی عددی یا



شکل ۲ شبکه تولیدشده برای منفصل‌سازی میدان حل

برای حل معادله انتقال تابع ورتیسیته، از رویکرد رانج کوتاه مرتبه^۱ استفاده شده است و برای اینکه فیزیک جریان به‌درستی مدل شود، برای جداسازی ترم‌های انتقالی^۲، در گره‌های داخلی، جداسازی بالادست مرتبه دو^۳ و در گره‌های مرزی، بالادست مرتبه یک^۴، به‌کار گرفته شده است. برای حل معادله تابع جریان که از نوع بیضوی می‌باشد، روش ضمنی تناوبی مستقیم^۵ (ADI) به‌کار برده شده است.

به‌منظور اعتبارسنجی میدان جریان شبیه‌سازی شده، در زاویه حمله صفر، نیروی پسا و عدد استروهال^۶ در ۳ عدد رینولدز متفاوت با دیگر مطالعات مقایسه شده‌اند. در جدول ۱ مشاهده می‌شود که تطابق خوبی بین آن‌ها وجود دارد.

از طرفی، به‌منظور بررسی تاثیر اندازه شبکه بر روی نتایج به‌دست‌آمده، بعد از اینکه اندازه شبکه به ۱/۵ برابر افزایش داده شد، نتایج جدید دوباره مورد بررسی قرار گرفتند. مشاهده شد که نتایج کمتر از ۴ درصد تغییر کردند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که نتایج حاصله استقلال مناسبی از اندازه شبکه دارند.

جدول ۱ مقایسه نیروی پسا و عدد استروهال کار حاضر و دیگر مطالعات در زاویه حمله صفر

مطالعه حاضر سوهانکارو همکارانش [۱۴] گرا و همکارانش [۱۵]						
Cd_t	St	Cd_t	St	Cd_t	St	Re
۱/۴۶	۰/۱۲	۱/۴۴	۰/۱۴۵	۱/۳۶	۰/۱۴	۱۰۰
۱/۴۱	۰/۱۴	۱/۴۰	۰/۱۶۱	۱/۳۹	۰/۱۵	۱۵۰
۱/۴۸	۰/۱۴	۱/۴۲	۰/۱۶۵	۱/۴۶	۰/۱۵	۲۰۰

- 1- Runge-Kutta 4th order
- 2- Convection terms
- 3- Second order upwind
- 4- First order upwind
- 5- Alternative Direct Implicit method
- 6- Strouhal number

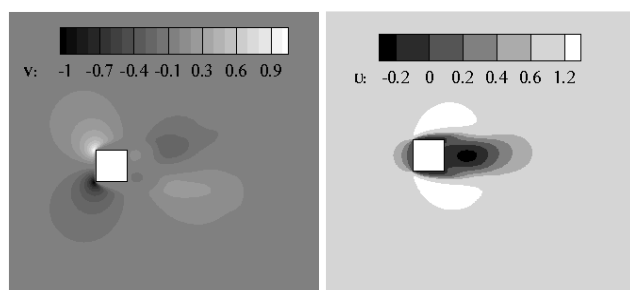
7- Fredholm integral eigenvalue problem

8- Snapshot

در ساخت مدل رتبه کاسته، میدان سرعت به صورت مجموع جریان متوسط (\bar{u}) و نوسانات سرعت (u') نوشته شده و جریان متوسط $\bar{u} = \langle u \rangle$ که متوسط زمانی مجموع داده‌هاست از W کم می‌شود، سپس نوسانات برحسب توابع ویژه POD به صورت زیر بسط داده می‌شوند:

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + u'(x, t) \approx \bar{u}(x) + \sum_{i=1}^M q_i(t) \Phi_i(x) \quad (12)$$

که در آن M تعداد مدهای POD استفاده شده در تصویرسازی است. متوسط میدان جریان در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳ متوسط میدان‌های سرعت، الف) در جهت جریان، ب) عمود بر جهت جریان در رینولدز ۲۰۰

برای به دست آوردن داده‌های میدان جریان، بعد از پایا شدن ریزش گردابه‌ها، ۲۴۰ تصویر از یک تناوب ریزش گردابه برداشته و بعد از تشکیل ماتریس برای محاسبه توابع ویژه و مقادیر ویژه متناظر آن‌ها، از SVD استفاده شده است. مقادیر ویژه به دست آمده انرژی موجود در مد i ام بسط را تعیین می‌کنند. هرچه مقدار ویژه یک مد بیشتر باشد، نشان‌دهنده این است که انرژی موجود در آن مد بیشتر است. در شکل ۴، دوازده مقدار ویژه به دست آمده رسم شده است. هر مقدار ویژه به صورت $\lambda_i / \sum_{i=1}^S \lambda_i$ نرمال شده است. مشاهده می‌کنیم که هر جفت از مدها دارای مقدار ویژه‌ای از مرتبه مشابه هستند و مقادیر آن‌ها از یک جفت به جفت بعدی کاهش می‌یابند.

به منظور پیدا کردن سهم هر مد در انرژی کل سیستم، انرژی تجمعی^۱ به صورت $E_i = \sum_{i=1}^S \lambda_i$ تعریف می‌شود. در شکل ۵ تغییر انرژی تجمعی جریان برحسب تعداد مدها رسم شده است.

آزمایش‌های تجربی در یک ماتریس $W_{2N \times S}$ ، که در معادله (۹) نشان داده شده است، قرار می‌گیرند. هر ستون بیانگر داده‌های یک لحظه زمانی یا یک تصویر از جریان و S مجموع تصاویر برای N گره درون میدان است.

$$W = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \dots & u_1^{(S)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_N^{(1)} & u_N^{(2)} & \dots & u_N^{(S)} \\ v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \dots & v_1^{(S)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_N^{(1)} & v_N^{(2)} & \dots & v_N^{(S)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

و توابع ویژه POD از حل مسئله زیر به دست می‌آیند.

$$WW^T = U\Sigma^2 U^T \quad (10)$$

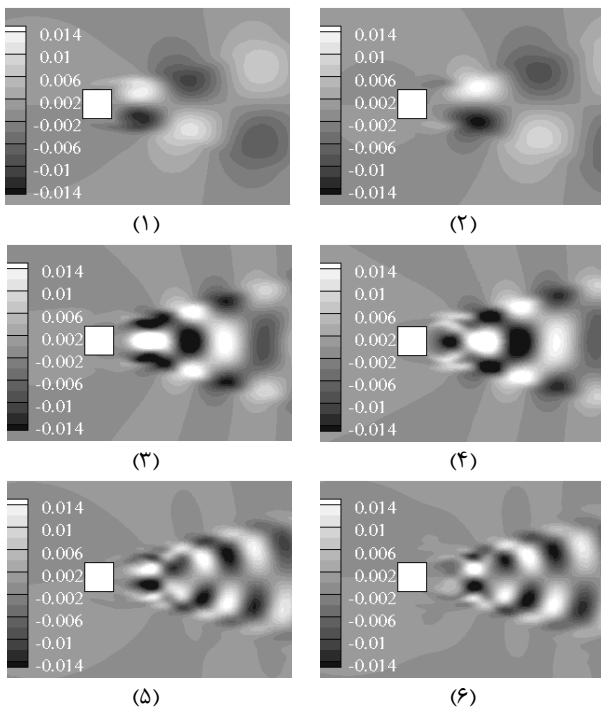
که در آن Σ ماتریس مقادیر تکین و U ماتریس توابع ویژه می‌باشد.

$$U = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(1)} & \Phi_1^{(2)} & \dots & \Phi_1^{(S)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_N^{(1)} & \Phi_N^{(2)} & \dots & \Phi_N^{(S)} \\ \Phi_1^{(1)} & \Phi_1^{(2)} & \dots & \Phi_1^{(S)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_N^{(1)} & \Phi_N^{(2)} & \dots & \Phi_N^{(S)} \end{bmatrix}, \Sigma = \text{diag} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_S \end{bmatrix} \quad (11)$$

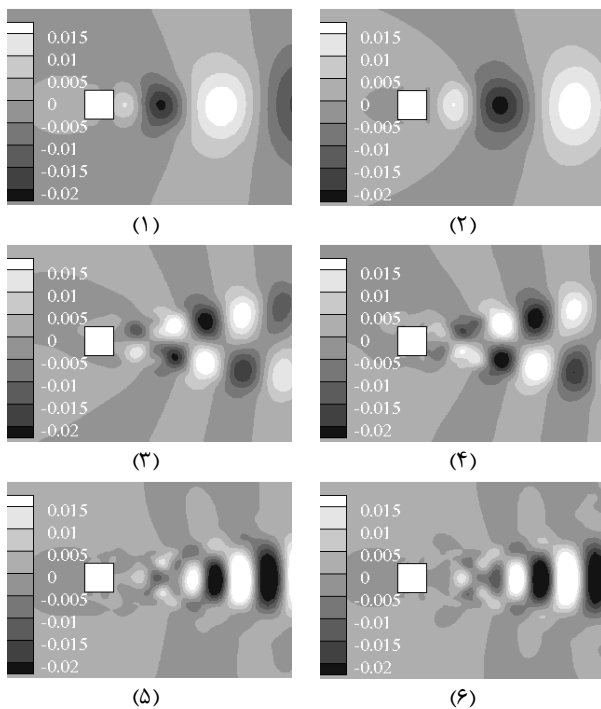
σ_i ها، که مقادیر مثبت غیرصفر هستند و از بزرگ به کوچک در ماتریس Σ قرار دارند، با رابطه $\lambda_i = \sigma_i^2$ با مقادیر ویژه λ_i ارتباط پیدا می‌کنند. این مقادیر برای مرتب کردن توابع ویژه POD به منظور ساختن سیستم دینامیکی و نشان دادن انرژی موجود در هر مد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

این توابع پایه می‌توانند به طور مؤثرتر از طریق تجزیه به مقادیر تکین (SVD)، به دست بیایند. با استفاده این روش ماتریس تصاویر به صورت $W = U\Sigma V^T$ تجزیه می‌شود که در آن Σ ماتریس مقادیر ویژه با اندازه $S \times S$ ، U ماتریس توابع ویژه با اندازه $N \times S$ و V یک ماتریس متعامد با اندازه $S \times S$ می‌باشد. شایان ذکر است که این روش کاربرد محدودی دارد، خصوصاً زمانی که اندازه گره‌ها (N) زیاد باشد.

1- Cumulative energy

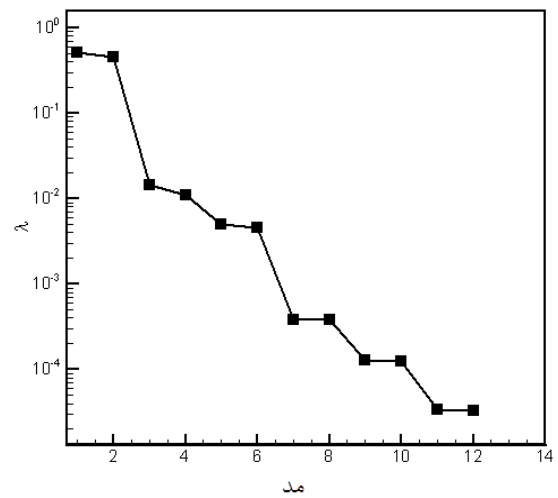


شکل ۶ مدهای مؤلفه سرعت در جهت جریان ($\Phi_i^u = 1, 2, \dots, 6$) در رینولدز ۲۰۰

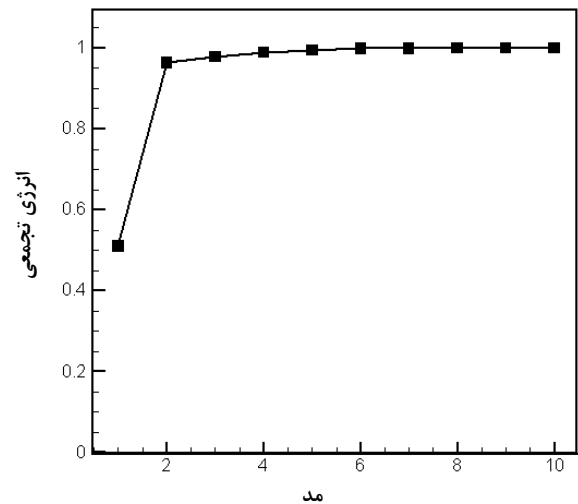


شکل ۷ مدهای مؤلفه سرعت در جهت عمود بر جریان ($\Phi_i^v = 1, 2, \dots, 6$) در رینولدز ۲۰۰

در قسمت بعد روش ساخت مدل رتبه کاسته ارائه می‌شود.



شکل ۴ مقادیر ویژه نرمال شده



شکل ۵ انرژی تجمعی نرمال شده

مشاهده می‌شود که بیشترین انرژی در تعداد کمی از مدهای اول جای دارد. دو تابع ویژه اول به‌طور واضح بیشترین انرژی سیستم را به‌دام می‌اندازند. در مطالعه حاضر، ۳ مد اول شامل ۹۸ درصد انرژی جریان می‌باشد.

در شکل‌های ۶ و ۷، کانتورهای ۶ مد اول در جهت جریان و عمود بر جهت جریان رسم شده‌اند. نظیر زوج‌های مقادیر ویژه، یک الگوی مشابه در مدهای POD مشاهده می‌شود. این الگوها نسبت به محور افقی متقارن هستند. از مقادیر ویژه متناظر هر مد مشاهده می‌شود که بیشترین انرژی در دو مد اول قرار دارند و مدهای POD متناظر ساختارهای بزرگ‌تری را نمایش می‌دهند.

۴- مدل رتبه کاسته

ضرایب ثابت به دست می‌آید. این معادلات در زیر نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} \dot{q}_k(t) = & A_k + \sum_{m=1}^M B_{km} q_m(t) \\ & + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M C_{kmn} q_n(t) q_m(t) \end{aligned} \quad (15)$$

که ضرایب A ، B و C به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_k = & \frac{1}{\text{Re}_D} (\Phi_k, \nabla^2 \bar{u}) - (\Phi_k, \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) \\ B_{km} = & -(\Phi_k, \bar{u} \cdot \nabla \Phi_m) - (\Phi_k, \Phi_m \cdot \nabla \bar{u}) \\ & + \frac{1}{\text{Re}_D} (\Phi_k, \nabla^2 \Phi_m) \\ C_{kmn} = & -(\Phi_k, \Phi_m \cdot \nabla \Phi_n) \end{aligned} \quad (16)$$

در معادله (۱۵)، A یک بردار $M \times 1$ است که از میدان متوسط به دست آمده است. C یک تانسور است که نشان‌دهنده ترم‌های مرتبه دو غیرخطی است و B قسمت خطی سیستم دینامیکی است، که یک ماتریس با ابعاد $M \times M$ است.

۴-۳- نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته

اگر سه مد اول را برای ساختن مدل رتبه کاسته مورد استفاده قرار گیرد و بعد از تصویرسازی گالرکین، ضرایب A ، B و C موجود در معادله (۱۵) محاسبه شوند، آن‌گاه مسئله CFD با $219 \times 199 \times 2$ درجه آزادی به ۳ درجه آزادی کاهش می‌یابد. این معادله به روش رانج کوتای مرتبه ۴ در زمان حل شده است و q_i ها در زمان‌های مختلف محاسبه می‌شوند.

برای حل این معادله در زمان، به یک سری شرایط اولیه نیاز است. این شرایط اولیه را می‌توان از رابطه (۱۷) به دست آورد.

$$q_i^0 = (u'_0, \Phi_i) \quad (17)$$

این رابطه با استفاده از خاصیت متعامد بودن مدها به دست آمده است.

در شکل ۸، پیشرفت زمانی ضریب مدهای q_1 و q_2 و q_3 نمایش داده شده است. همان‌طور که مشخص است، با اینکه پدیده فیزیکی اصلی یک حالت نوسانی و تکرارشونده دارد، ولی دامنه ضرایب مدها در حال رشد هستند. این واگرایی به دلیل ناپایداری‌های ناشی از ترم خطی معادله (۱۵) است، اگرچه ترم غیرخطی مدل رتبه کاسته از رشد بیش از اندازه ضرایب زمانی جلوگیری می‌کند [۱۳].

مدل‌های رتبه کاسته سیالات تراکم‌ناپذیر، با کاهش درجه آزادی سیستم، راهی را برای افزایش چشم‌گیر سرعت حل‌گرهای جریان فراهم می‌کنند. هدف این مدل‌ها تسخیر فیزیک اصلی جریان تحت کنترل و همزمان کاهش هزینه حل مدل است. توابع پایه POD بیشترین انرژی موجود در داده‌های آزمایشگاهی و عددی را می‌گیرند و این مدها را یک نماینده مناسب برای زیرفضای مدل‌های رتبه کاسته می‌کنند.

مدل‌های سیستم دینامیکی رتبه کاسته شامل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی می‌شوند که به شکل زیرند:

$$\dot{q} = F(q) \quad (13)$$

این مدل‌ها می‌توانند به‌طور مؤثر برای استراتژی‌های کنترلی به‌کار گرفته شوند.

۴-۱- تصویرسازی گالرکین

تصویرسازی گالرکین یک روش برای به دست آوردن یک تقریب برای سیستم‌های دینامیکی با ابعاد زیاد است. در این روش، دینامیک سیستم بر روی یک زیرفضا که دارای ابعاد کمی است تصویر می‌شود. در مطالعه حاضر، از مدهای POD به عنوان زیرفضای تصویرسازی گالرکین استفاده شده است و معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر بر روی این مدها تصویر می‌شوند. تصویرسازی با ضرب داخلی مدهای POD، در معادله مومنوم انجام می‌گیرد، به طوری که:

$$\left(\Phi_k, \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}_D} \nabla^2 u \right) = 0 \quad k=1, \dots, M \quad (14)$$

که در آن $(a, b) = \int_{\Omega} ab \, d\Omega$ نشان‌دهنده ضرب داخلی بین a و b است و M تعداد مد استفاده شده در تصویرسازی گالرکین است. ضرب داخلی، دو معادله مومنوم را (سه معادله در حالت سه‌بعدی) تنها به یک معادله کاهش می‌دهد. به عبارت دیگر، سیستم از $2M$ معادله ($3M$ در حالت سه‌بعدی) به M معادله تقلیل می‌یابد.

۴-۲- مدل معادلات دیفرانسیل معمولی

با تصویرکردن معادلات ناویر-استوکس بر روی مدهای POD، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی با

نادرستی را پیش‌بینی کند و حتی موجب مغشوش‌تر شدن میدان جریان شود.

در روش تابع کنترل، تصاویر از جریان تحریک‌شده برداشته می‌شوند و میدان سرعت به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$u(x, t) \approx \bar{u}(x) + \sum_{i=1}^M q_i(t) \Phi_i(x) + \sum_{i=1}^{Mc} \gamma_i(t) \Gamma_i(x) \quad (18)$$

که در رابطه بالا Mc تعداد مد کنترلی است، Γ_i ها توابع کنترلی مناسبی هستند که شرایط مرزی غیرهمگن ناشی از محرک‌های جریان را ارضا می‌کنند و γ_i ورودی کنترل می‌باشد. در این روش، مدهای POD بعد از کم کردن تابع کنترل از هر تصویر به دست می‌آید. ما می‌توانیم به صورت ریاضی ماتریس تصاویر W را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$W = u(x, t^k) - \sum_{i=1}^{Mc} \gamma_i(t^k) \Gamma_i(x) \quad (19)$$

به عبارت دیگر، تصاویر به‌گونه‌ای تعریف می‌شوند که شرایط مرزی همگن روی سطح سیلندر را ارضا کنند.

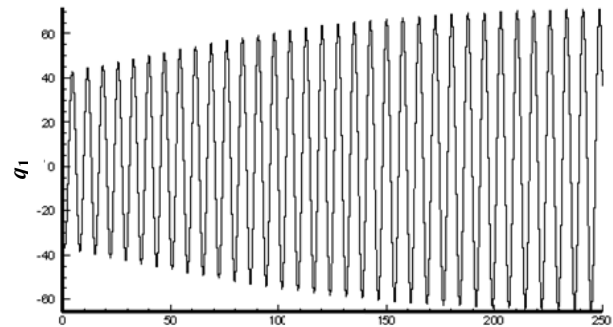
۴-۵- مدل رتبه کاسته اصلاح شده

با جایگزینی معادله (۱۸) در معادلات ناویر-استوکس و تصویر کردن این معادلات بر روی مدهای Φ_k ، به معادله زیر می‌رسیم.

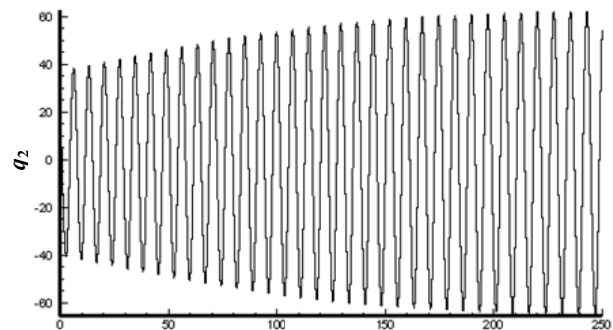
$$\begin{aligned} \dot{q}_k(t) = & A_k + \sum_{m=1}^M B_{km} q_m(t) \\ & + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M C_{kmn} q_n(t) q_m(t) + \sum_{m=1}^{Mc} H_{km} \dot{\gamma}_m(t) \\ & + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{Mc} J_{kmn} \gamma_n(t) q_m(t) + \sum_{m=1}^{Mc} K_{km} \gamma_m(t) \\ & + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{Mc} \mathcal{L}_{kmi} \gamma_n(t) \gamma_m(t) \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن A ، B و C مانند رابطه (۱۶) محاسبه می‌شوند و دیگر ضرایب به صورت زیر تعیین می‌شوند.

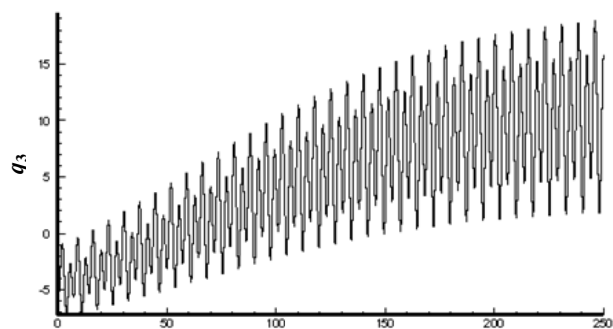
$$\begin{aligned} H_{km} = & -(\Phi_k, \Gamma_m) \\ J_{kmn} = & -(\Phi_k, \Gamma_n \cdot \nabla \Phi_m) - (\Phi_k, \Phi_m \cdot \nabla \Gamma_n) \\ \mathcal{K}_{kmn} = & -(\Phi_k, \bar{u} \cdot \nabla \Gamma_m) - (\Phi_k, \Gamma_m \cdot \nabla \bar{u}) \\ & + \frac{1}{Re_D} (\Phi_k, \nabla^2 \Gamma_m) \\ \mathcal{L}_{kmi} = & -(\Phi_k, \Gamma_m \cdot \nabla \Gamma_n) \end{aligned} \quad (21)$$



زمان



زمان



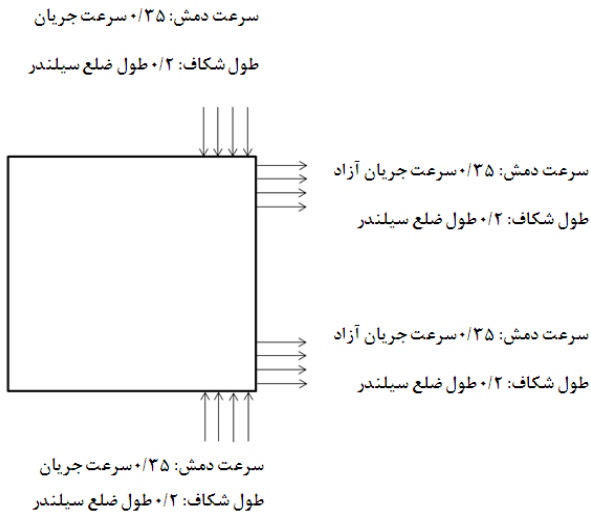
زمان

شکل ۸ تغییرات زمانی ضرایب مدهای ۱، ۲ و ۳ در رینولدز ۲۰۰

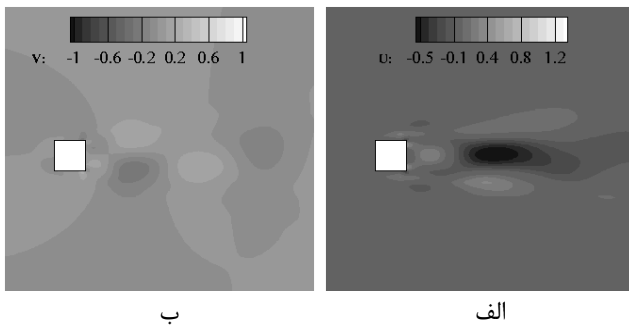
۴-۴- مدل رتبه کاسته به همراه کنترل

برای کنترل جریان از دمنده و مکندehایی بر روی سطح سیلندر استفاده کرده‌ایم، تا بتوانیم از طریق آن‌ها جدایش جریان را به تعویق بیاوریم و به تبع آن میزان ریزش گردابه را کاهش دهیم. برای انجام کنترل، ما از روش تابع کنترل برای ایجاد مدل رتبه کاسته استفاده کرده‌ایم.

در مطالعه‌ای که توسط تانگ انجام شد، مشخص شد که برای به دست آوردن توابع پایه برای مدل رتبه کاسته، میدان تحریک‌نشده نمی‌تواند نماینده خوبی برای استخراج مدهای پایه باشد و قادر نیست کنترل جریان را پیش‌بینی کند. از طرفی انتخاب نامناسب تابع کنترل می‌تواند نتایج



شکل ۹ محل محرک‌های جریان و سرعت جت‌های سرعت در رینولدز ۲۰۰



شکل ۱۰ تابع کنترل تولیدشده برای رینولدز ۲۰۰ (الف) در جهت جریان، (ب) عمود بر جهت جریان

۵- کنترل بهینه مدل رتبه کاسته

در کار حاضر، تئوری کنترل بهینه، به منظور طراحی یک قانون کنترلی برای یک مدل رتبه کاسته، به کار گرفته شده است. این تئوری مزیت‌های زیادی نسبت به انتخاب‌های دیگر دارد که آن را برای هدف تحقیق حاضر مناسب می‌کند.

اول از همه، به دلیل اینکه اگر مقدار ورودی کنترل بیش از اندازه بزرگ انتخاب شود نمی‌تواند به درستی فیزیک جریان را کنترل کند، مقادیر بزرگ ورودی کنترل هیچ ارزش فیزیکی ندارند و باید به گونه‌ای از آن‌ها اجتناب شود. در کنترل بهینه، این کار به سادگی، با اضافه کردن یک جمله به تابع عملکرد، انجام می‌گیرد. این جمله شامل مربع وزن دار ورودی می‌باشد. در فرایند بهینه‌سازی تابع عملکرد، این جمله اجازه نمی‌دهد که ورودی به طور ناخواسته بیش از اندازه رشد کند. هرچه مقدار

در مطالعه حاضر، مشتق زمانی سرعت مکش و دمش جریان یا به عبارتی شتاب جریان‌های محرک، $\dot{\gamma}$ ، به عنوان ورودی اصلی کنترل انتخاب شده است. با این انتخاب، یک معادله دیگر به معادلات حالت اضافه می‌شود:

$$\gamma_c = \dot{\gamma} \quad (22)$$

همچنین، در مسئله حاضر، ما تنها از یک مد کنترلی، به منظور شبیه‌سازی محرک‌های جریان، استفاده کرده‌ایم. گرچه می‌توان از چندین مد کنترلی به منظور کنترل بهتر جریان استفاده کرد.

۴-۶- طراحی تابع کنترل

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، برای کنترل جریان ما با معرفی یک مد کنترلی معادلات رتبه کاسته را اصلاح می‌کنیم. حال مسئله حاضر این است که چگونه می‌توان این مد را طراحی کرد، به گونه‌ای که بتواند اثر کنترل را به خوبی نشان دهد.

یک راه ساده شبیه‌سازی محرک‌ها با یک سرعت مناسب، در یک جریان ساکن می‌باشد. یک تصویر به دست آمده از این میدان جریان می‌تواند انتخاب خوبی برای مد کنترلی باشد. تانگ برای کنترل جریان با استفاده از چرخش سیلندر، برای ساخت تابع کنترل، از این روش استفاده کرد. او سیلندر را در یک سیال ساکن با سرعت زاویه‌ای ثابت به چرخش درآورد [۱].

اثر مد کنترلی که با این روش ساخته می‌شود، به دلیل عدم حضور جریان میدان آزاد در شبیه‌سازی، محلی است. یک روش دیگر برای تولید مد کنترلی به صورتی است که در ادامه می‌آید. ما جریان حول سیلندر را، در حالی که محرک‌های جریان فعال هستند، شبیه‌سازی می‌کنیم و این جریان را جریان تحریک شده می‌نامیم. از این جریان تحریک شده با برداشتن تعدادی تصویر متوسط زمانی می‌گیریم. به طور مشابه، جریان حول سیلندر را در حالتی که محرک‌ها فعال نیستند، شبیه‌سازی می‌کنیم و متوسط زمانی این جریان را نیز محاسبه می‌کنیم. با کم کردن این دو میدان از یکدیگر و تقسیم بر سرعت جت سیال، می‌توان یک مد کنترلی به دست آورد که نه تنها شرایط مرزی ناهمگن روی مرز سیلندر را ارضا می‌کند، بلکه اثرات اغتشاش ناشی از محرک‌ها کل میدان را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در شکل ۹ محل و سرعت جت‌های جریان مشخص شده است و در شکل ۱۰ مد کنترلی طراحی شده در رینولدز ۲۰۰ نمایش داده شده است.

در مطالعه حاضر تابع عملکرد به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$J = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} (\int_{\Omega} \xi^2 d\Omega + R \gamma_c^2) dt \quad (25)$$

که در آن، ξ بیانگر ورتیسیتته جریان سیال، γ_c ورودی کنترل و R یک مقدار ثابت است و ضریب وزن خوانده می‌شود. حضور ترم دوم در معادله بالا برای تحمیل نوعی قید به مسئله می‌باشد و اجازه نمی‌دهد که ورودی کنترل بیش از اندازه مطلوب بزرگ شود.

در معادله (25) مشاهده می‌کنیم که تابع عملکرد برحسب متغیرهای حالت مطرح نشده است. بنابراین، لازم است که قبل از شروع محاسبات کمی تغییر داده شود. با نوشتن این تابع برحسب متغیرهای حالت، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$J = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^{M+1} \sum_{j=1}^{M+1} q_i q_j Q_{ij} + R \gamma_c^2 \right) dt \quad (26)$$

برای حداقل کردن این تابع ما از روش شبه‌خطی‌سازی^۱ استفاده کرده‌ایم. در این روش، معادلات غیرخطی کنترل بهینه حول یک مسیر مشخص خطی می‌شوند. سپس این معادلات خطی به روش عددی حل می‌شوند.

در مطالعه حاضر، فرایند بهینه‌سازی در فواصل زمانی ۰/۱ ثانیه انجام گرفته است و مقدار ضریب وزن، ۰/۳۱ انتخاب شده است. در ادامه نتایج کنترل بهینه آورده شده است.

۶- نتایج کنترل بهینه

در این قسمت، نتایج حاصل از کنترل بهینه با استفاده از روش عددی شبه‌خطی‌سازی برای رینولدز ۲۰۰ ارائه شده است. مقدار ضریب وزن به‌اختیار ۰/۳۱ انتخاب شده است. ضریب وزن به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که هم بتواند فیزیک جریان را به‌درستی مدل کند و هم اینکه نیازهای طراحی را برآورده کند. بنابراین این مقدار بسته به شرایط مسئله و نیازهای طراحی متفاوت است. با امتحان چندین ضریب وزن، برای رینولدز ۲۰۰، این عدد انتخاب شده است. تعداد مدهای POD برای ساخت معادلات کنترل نیز ۷ عدد در نظر گرفته شده است. با افزایش بیشتر مدها در این عدد رینولدز، نتایج تغییر محسوسی را نشان نمی‌دادند و تنها باعث افزایش حجم و زمان انجام

بیشتری برای ضریب این جمله لحاظ شود، مقدار کمتری برای ورودی کنترل محاسبه می‌شود.

دوم، در مسائل کنترل، تعریف کردن یک سیگنال مرجع مناسب برای سیستم راحت نیست. به عبارت دیگر، سختی‌هایی در انتقال هدف کنترل به زبان ریاضی وجود دارد. این هدف می‌تواند کاهش نیروی پسا یا افزایش انتقال گرما یا حتی کاهش آن باشد. این امکان وجود ندارد که به‌طور واضح، سیگنال مرجع را معرفی و سیگنال خطا را با کم کردن حالت حاضر از حالت مرجع محاسبه کنیم [۱۸].

سوم، معادلات دیفرانسیل حاکم شامل دو ترم غیرخطی هستند؛ یکی از آن‌ها حاصل ضرب دو متغیر حالت و دیگری حاصل ضرب یک متغیر حالت و ورودی کنترل است. نتایج به‌دست آمده برای کنترلرهای خطی نظیر PID در کنترل سیستم‌هایی که به‌طور ذاتی غیرخطی هستند، موفقیت محدودی را نشان داده‌اند [۱۹]. گرچه، کنترل بهینه یک قانون کنترل غیرخطی را تشکیل می‌دهد و انتظار می‌رود که نتایج بهتری در این موارد داشته باشد [۲۰].

در جمع‌بندی، با در نظر گرفتن همه موانعی که در حل مسائل کنترل جریان وجود دارد، کنترل بهینه یکی از کارآمدترین روش‌هایی است که می‌تواند به‌کار گرفته شود.

۶-۱- تئوری کنترل بهینه

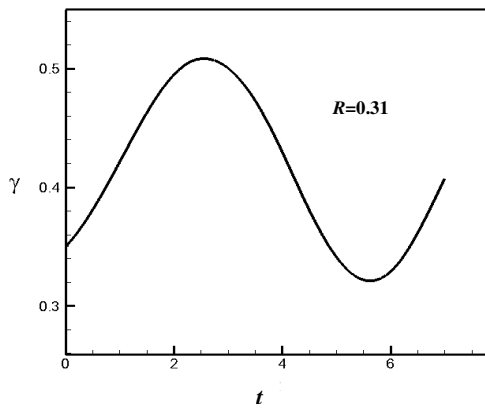
سیستم زیر را در نظر بگیرید که دینامیک یک سیستم غیرخطی را که با زمان تغییر می‌کند، توصیف می‌کند.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (23)$$

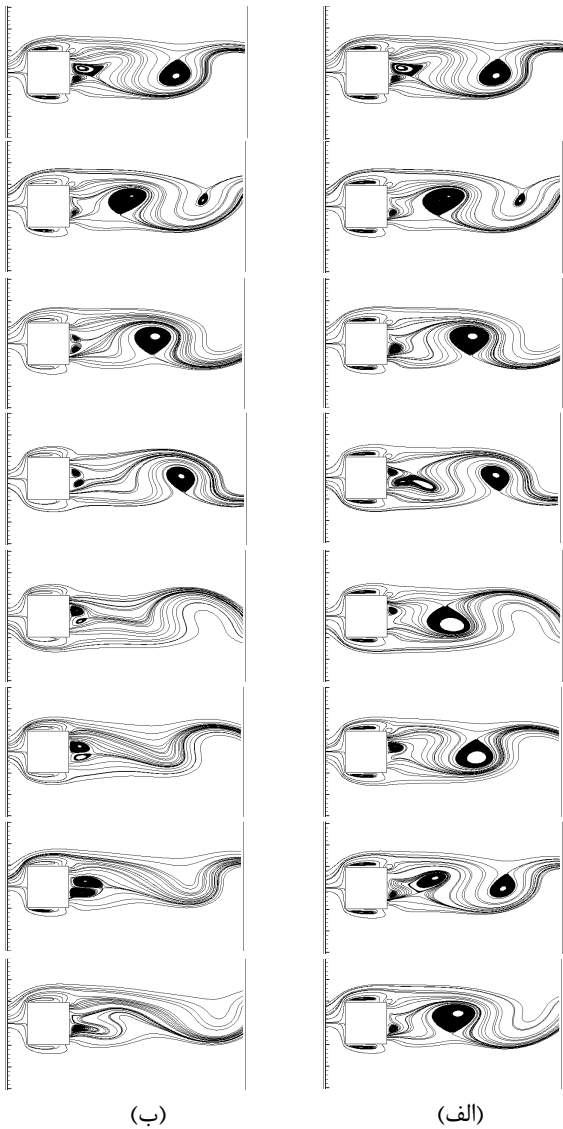
هدف مسئله کنترل بهینه پیدا کردن ورودی u در بازه زمانی $t_0 \leq t \leq t_f$ است، به‌گونه‌ای که سیستم را در خط مسیری قرار دهد که تابع عملکرد، نظیر آنچه در رابطه (۲۴) تعریف شده است، به‌همراه قیود همراه با آن، اکسترمم شود.

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (24)$$

تابع J تابع عملکرد یا تابع هزینه نامیده می‌شود که در آن h و g توابعی اسکالر هستند و t_0 و t_f به ترتیب زمان آغازین و زمان انتهایی فرایند کنترل می‌باشند. t_f بسته به مسئله، ممکن است آزاد فرض شود یا اینکه مقدارش مشخص شود. قیود همان معادلات سیستم دینامیکی (معادله ۲۰) هستند، که باید هم‌زمان با اکسترمم کردن تابع عملکرد ارضاء گردند.



شکل ۱۱ خط مسیر ورودی کنترل به دست آمده با روش شبه خطی سازی در رینولدز ۲۰۰



شکل ۱۲ میدان های جریان حول سیلندر، (الف) کنترل نشده، (ب) کنترل شده در رینولدز ۲۰۰

محاسبات می شدند. از طرفی، در اعداد رینولدز بالاتر و با پیچیده تر شدن جریان، مدهای پایین تر نقش فعال تری در شبیه سازی جریان دارند. از این رو لازم است که در اعداد رینولدز بالاتر که جریان به سمت تلاطم میل می کند، از تعداد بیشتری مد برای ساخت مدل رتبه کاسته و همچنین مدل کنترلی استفاده کرد.

خط مسیر به دست آمده برای ورودی کنترل در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همان گونه که قابل مشاهده است، خط مسیر به دست آمده یک رفتار سینوسی دارد. در ابتدای فرایند کنترل سرعت جت جریان در حال افزایش می باشد، اما بعد از رسیدن به مقدار مشخصی این سرعت کم می شود. این رفتار را این گونه می توان توضیح داد که بعد از اینکه سرعت جت تا یک مقدار مشخص افزایش پیدا کرد و ریزش گردابه متوقف شد، تا شروع شکل گرفتن گردابه بعدی احتیاجی نیست که این سرعت بیشینه باقی بماند.

به منظور امتحان نتایج، خط مسیر به دست آمده را به عنوان ورودی برای کد اصلی تعریف می کنیم و تأثیر آن را بر میدان جریان بررسی می کنیم. در شکل ۱۲ میدان جریان کنترل شده و کنترل نشده در فواصل زمانی یک ثانیه نمایش داده شده اند. اثر کنترل بهینه در کاهش اندازه دنباله به خوبی مشاهده می شود. روش پیشنهادی برای کنترل دنباله های پشت سیلندر مربعی شکل در اعداد رینولدز ۴۰۰، ۶۰۰ و ۸۰۰ نیز تست شده است و نتایج مطلوبی به دست آمدند. شایان ذکر است که در این اعداد رینولدز لازم است که محل دمنده ها و مکنده ها تغییر پیدا کنند تا به صورت مؤثرتر جریان را تحریک کنند. در مقاله حاضر، به ارائه نتایج در عدد رینولدز ۲۰۰ اکتفا شده است.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، روشی برای کنترل دنباله های تشکیل شده در پشت سیلندر مربعی شکل ارائه شد. در این روش، با استفاده از مدل رتبه کاسته بر مبنای مدهای POD، معادلات حاکم بر جریان سیال، که از نوع مشتقات جزئی هستند، به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شدند و با معرفی یک تابع کنترل، برای اعمال کنترل بهینه آماده شدند و برای به دست آوردن ورودی کنترل، روش شبه خطی سازی، که یکی از روش های عددی برای کنترل بهینه است، به کار گرفته شد.

- Optimal Control*, Computational Aerospace Sciences Laboratory, 1996.
- [2] Tang K. Y., *Numerical Simulation and Control of Separated Incompressible Flow*, MSc Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics at MIT University, 1996.
- [3] Graham W. R., Peraire J., Tang K. Y., "Optimal Control of Vortex Shedding using Low Order Model-Part 1: Open-Loop Model Development", *IJNME*, Vol. 44, No. 7, 1999, pp. 945-972.
- [4] Graham W. R., Peraire J., Tang K. Y., "Optimal Control of Vortex Shedding using Low Order Model-Part 2: Model-Based Control", *IJNME*, Vol. 44, No. 7, 1999, pp. 973-990.
- [5] Mittal S., Raghuvanshi A., "Suppression of Vortex Shedding Using Control Cylinder", *The Seventh Asian Congress of Fluid Mechanics*, Chennai (Madras), 1997.
- [6] Li Z., Navon I. M., Hussaini M. Y., Le Dimet F. X., "Optimal Control of Cylinder Wakes via Suction and Blowing", *Journal of Computer & Fluids*, Vol. 32, No. 2, 2003, pp. 149-171.
- [7] Homescu C., Navon I. M., Li Z., "Suppression of Vortex Shedding for Flow around a Circular Cylinder using Optimal Control", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 38, No. 1, 2002, pp. 43-69.
- [8] Zannetti L., Iollo A., "Passive Control of the Vortex Wake Past a Flat Plate at Incidence", *Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 16, No. 3, 2002, pp. 211-230.
- [9] Zhoua L., Chengb M., Hungb K. C., "Suppression of fluid Force on a Square Cylinder by Flow Control", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 21, No. 2, 2005, pp. 151-167.
- [10] Weller J., Lombardi E., Iollo A., "Robust Model Identification of Actuated Vortex Wakes", *Journal of Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 238, No. 4, 2009, pp. 416-427.
- [11] Layek G. C., Midya C., Gupta A. S., "Influences of Suction and Blowing on Vortex Shedding behind a Square Cylinder in a Channel", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 43, No. 9, 2008, pp. 979-984.
- [12] Turki S., "Numerical Simulation of Passive Control on Vortex Shedding behind Square Cylinder using Splitter Plate", *Engineering Application of Computational Fluid Mechanic*, Vol. 2, No. 4, 2008, pp. 514-524.
- [13] Akhtar I., Nayfeh A. H., "Model Based Control of Laminar Wake Using Fluidic Actuation", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 5, No. 4, 2010, pp. 133-141.
- [14] Sohankar A., Davidson L., "Numerical Simulation of Unsteady Flow Around a Square Two-Dimensional Cylinder", *Twelfth Australaiaian Fluid*

نتایج به دست آمده حاکی از آن است که روش ارائه شده می تواند برای کنترل ناپایداری های تولید شده در پشت سیلندر مؤثر باشد.

۸- فهرست علائم

f	فرکانس ریزش گردابه (1/s)
H	تابع همیلتونین
J	تابع عملکرد یا تابع هزینه
l	طول ضلع سیلندر مربع شکل (m)
M	تعداد مدهای POD
Mc	تعداد توابع کنترلی
P	فشار میدان جریان (Pascal)
p	متغیر همراه حالت
q	ضریب زمانی مدهای POD
Re	عدد رینولدز
St	عدد استرووال ($St = \frac{fl}{u_0}$)
t_0	زمان شروع کنترل (s)
t_f	زمان اتمام کنترل (s)
U	ورودی کنترل
u	سرعت میدان جریان (m/s)
\bar{u}	متوسط سرعت جریان (m/s)
x	متغیر حالت

علائم یونانی

Γ	تابع کنترل
γ	ضریب زمانی تابع کنترل
ξ	ورتیسیته
ρ	چگالی سیال
ϕ	مد POD
ψ	تابع جریان

۹- مراجع

- [1] Tang K. Y., Graham W. R., Peraire J., *Active Flow Control using a Reduced Order Model and*

- Numerical Methods in Fluids*, Vol. 53, No. 2, 2006, pp. 305-332.
- [19] Linnick M. N., Fasel H. F., "A High-Order Immersed Interface Method for Simulating Unsteady Incompressible Flows on Irregular Domains", *Journal of Computational Physics*, Vol. 204, No. 1, 2005, pp. 157-192.
- [20] Hou Y., *Reduced-Order Modeling of Incompressible Jet Flow using Proper Orthogonal Decomposition and Galerkin Projection*, Dissertation for the Degree of Master of Science in Electrical and Computer Engineering, Northeastern University, 2010.
- [21] Sina Fardisi, *Control of Flow using Proper Orthogonal Decomposition*, MSc Dissertation, Mechanical Engineering Department of Shiraz University, 2006.
- Mechanics Conference*, The University of Sydney, Australia, 1995.
- [15] Gera B., Sharma Pavan K., Singh R. K., "CFD Analysis of 2D Unsteady Flow around a Square Cylinder", *International Journal of Applied Engineering Research, DINDIGUI*, Vol. 1, No. 3, 2010, pp. 602-610.
- [16] Holmes P., Lumley J. L., Berkooz G., *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, First Edition, USA, Cambridge, 1996.
- [17] Sirovich L., "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures. Part 1: Coherent Structures", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 45, 1987, pp. 524-529.
- [18] Ding H., Shu C., Yeo K. S., Xu D., "Numerical Simulation of Flows Around Two Circular Cylinders by Mesh-Free Least Square-Based Finite Difference Methods", *International Journal for*