



کمانش متقارن و نامتقارن نانورق‌های دایروی و حلقوی در فضای غیرمحلی الاستیسته

محمد بدرود^۱، شاهرخ حسینی هاشمی^{۲*}، رضا ناظم‌نژاد^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- استادمهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

* تهران، صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۶۵، shh@iust.ac.ir

چکیده- در این مقاله، حل دقیق و تحلیلی برای کمانش متقارن و نامتقارن نانورق‌های دایروی و حلقوی نازک در زیر بار فشار شعاعی یکنواخت ارائه می‌شود. برای بیان اثرات مقیاس اندازه از تئوری غیرمحلی ارینگن استفاده شده و برای اثبات درستی داده‌ها، بارهای کمانشی متقارن با داده‌های موجود در مقالات مقایسه می‌گردد. فرض بر آن است که خواصی از قبیل مدول یانگ، چگالی و ضریب پواسن در همه جای نانورق ثابت باشد. همچنین، اثر تغییرات پارامترهای هندسی، شرایط تکیه‌گاهی مختلف و پارامتر غیرمحلی بر روی بارهای کمانش و اینکه این پارامترها چه تاثیری بر متقارن یا نامتقارن بودن این بارها دارند، مورد بررسی قرار گرفته است. برای مدل‌کردن نانورق‌های نازک از تئوری نازک ورق‌ها (کیرشهف) استفاده شده است.

کلیدواژگان: نانورق، کمانش، غیرمحلی، حل دقیق، کیرشهف

Axisymmetric/asymmetric buckling of circular/annular nanoplates via nonlocal elasticity

M. Bedroud¹, Sh. Hosseini Hashemi^{2*}, R. Nazemnezhad³

1- MSc. Student, Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran

2- Prof., Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran

3- PhD. Student, Mech. Eng., IUST, Tehran, Iran

* P.O.B. 16765-163 Tehran, shh@iust.ac.ir

Abstract- The present study proposes an analytical solution for the axisymmetric/asymmetric buckling analysis of thin circular/annular nanoplates under uniform radial compressive in-plane load. In order to consider small scale effects, nonlocal elasticity theory of Eringen is employed. To ensure the efficiency and stability of the present methodology, the results are compared with other presented in literature. Material properties including Young's modulus, density, Poisson's ratio are assumed to be constant throughout the body of the nanoplate. In addition, the effect of small scales on critical buckling loads for different parameters such as radius of the nanoplate, boundary condition, mode number and geometry parameters are investigated. In order to obtain the critical buckling load, the asymmetric modes as well as axisymmetric modes are considered. The thin nanoplate is modeled using Kirchhoff plate theory.

Keywords: Nanoplate, Buckling, Nonlocal, Analytical solution, Kirchhoff

۱- مقدمه

پیشرفت روزافزون علم و تکنولوژی نیاز مبرم به مواد و ساختارهایی با خواص برتر و پیشرفته را به دنبال داشته است. در این راستا نانوتکنولوژی [۱] حوزه رو به رشدی از مواد، ساختارها و دستگاه‌هایی است که در مقیاس نانو وجود دارند. نانورق‌ها زیرشاخه بااهمیتی از این ریزساختارها محسوب می‌شوند که کاربرد فراوانی در صنعت امروزه دنیا پیدا کرده‌اند. از جمله این کاربردها می‌توان به استفاده آن‌ها در ساخت باتری‌ها [۲]، سنسورهای بیولوژیکی و شیمیایی [۳]، سلول‌های خورشیدی [۴] و ابزارهای میدان تشعشع [۵] و غیره نام برد. این کاربردهای فراوان، نیاز شناسایی رفتار این ریزساختارها را بیش از پیش نمایان می‌سازند. داده‌های بی‌شمار تجربی در این راستا نشانگر این مطلب است که در این ابعاد اثرات اندازه سازه و نیروهای درون اتمی آن‌ها تاثیر غیرقابل چشم‌پوشی در خواص مکانیکی آن‌ها دارند [۶-۸]، اما تئوری‌های کانتینیومی کلاسیک به دلیل صرف‌نظر کردن از این اثرات قادر به ارائه مدل مناسبی از این ساختارها نیستند. در این بین، تئوری غیرمحلی^۱ ارینگن [۹-۱۲]، با وارد کردن این اثرات در معادلات ترکیبی خود به عنوان خواص مواد، قدرت بالایی در ارائه مدل دقیق و مناسبی از این نانو ساختارها را دارد. از این رو در اغلب کارهای ارائه شده برای بررسی رفتار نانورق‌ها از این تئوری استفاده شده است.

با وجود اهمیت فراوان دانستن پاسخ کمانشی نانورق‌ها در زیر بارهای درون صفحه‌ای برای ساخت بهینه آن‌ها، کارهای کمی در این راستا ارائه شده است. همچنین، نتایج موجود در مقالات حاکی از این مطلب است که بار کمانشی بحرانی مربوط به نانورق‌های حلقوی، بسته به شرایط مرزی، ضخامت و نسبت شعاع داخلی به خارجی، ممکن است متقارن یا نامتقارن^۲ باشد [۱۳، ۱۴]. با وجود این، منبعی در دست نیست که به بررسی این مطلب در مورد نانورق‌های دایروی و حلقوی پرداخته باشد. در منابع [۱۵ و ۱۶] کمانش ورق‌های مستطیلی گرافن با استفاده از روش DQ^2 ارائه شده است. از جمله کارهایی که با استفاده از حل تحلیلی ارتعاشات نانورق‌های ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار داده‌اند می‌توان به منابع [۱۷] و [۱۸] اشاره کرد. در کار دیگری حسینی هاشمی و

سماعی [۱۹] پاسخ کمانشی نانورق مستطیلی ایزوتروپیک در زیر بارگذاری یکنواخت را به صورت تحلیلی ارائه کرده‌اند. در این کار برای مدل کردن نانورق نسبتاً ضخیم از تئوری مرتبه اول برشی میندلین استفاده شده است. سماعی و همکارانش [۲۰] در مقاله خود رفتار کمانشی نانورق مستطیلی بر روی بستر پسترناک^۴ را با استفاده از مدل غیرمحلی ورق میندلین به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. فرج‌پور و همکارانش در [۲۱] حلی تحلیلی از کمانش متقارن ورق‌های دایروی گرافن در زیر بارگذاری یکنواخت شعاعی را ارائه کرده‌اند. در [۲۲] راوری و شهیدی با استفاده از روش عددی تفاضل محدود کمانش نانورق‌های دایروی حلقوی را مورد بررسی قرار داده‌اند.

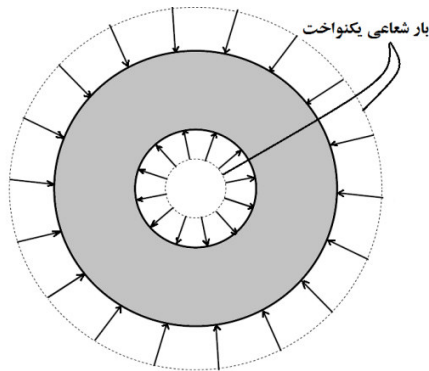
در این مقاله، برای اولین بار برای به دست آوردن بارهای دقیق بحرانی کمانشی نانورق‌های دایروی و حلقوی، علاوه بر مدهای متقارن، مدهای غیرمتقارن نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این راستا منابعی که به بررسی رفتار کمانشی نانورق‌های دایروی و حلقوی پرداخته‌اند منابع [۲۱] و [۲۲] هستند. تفاوت پژوهش ارائه شده در این مقاله با منابع [۲۱] و [۲۲] را می‌توان به این صورت بیان کرد که در این دو منبع، با وجود اهمیت بالای مدهای غیرمتقارن، این مدها مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، همچنین، منبع [۲۱] تنها به نانورق‌های دایروی اختصاص دارد و نانوحلقه‌ها را مورد بررسی قرار نمی‌دهد و نیز روش حل معادله کمانشی در منبع [۲۲] حل دقیق نبوده از روش حل عددی تفاضل محدود استفاده شده است. همچنین، تاثیر پارامترهای هندسی نانورق، شرایط تکیه‌گاهی و پارامتر غیرمحلی، بر این مسئله که مد مربوط به بار بحرانی کمانشی متقارن است یا غیرمتقارن، مورد بررسی قرار گرفته است. شایان ذکر است که برای وارد کردن اثرات اندازه‌ها و نیروهای درون اتمی از تئوری غیرمحلی ارینگن استفاده گردیده است. داده‌های این پژوهش برای طراحی مناسب‌تر سیستم‌های نانو-الکترومکانیک، که در آن‌ها از نانورق‌های گرافن استفاده می‌گردد، بسیار سودمند خواهد بود.

۲- تئوری غیرمحلی

تئوری غیرمحلی ارینگن تنش در یک نقطه از سازه را تابعی از کرنش تمام نقاط کل سازه در می‌گیرد. براساس این تئوری

1. Nonlocal
2. Asymmetric
3. Differential Quadrature

4. Pasternak



شکل ۱ نانورق حلقوی تحت بار شعاعی یکنواخت

فرض می‌شود که نانورق ایزوتروپیک بوده و خواص آن در همه‌جا یکنواخت باشد. شرایط برقراری تئوری نازک ورق‌ها (کیرشهف) به فرم زیر است:

$$u(r, \theta, z, t) = u_0(r, \theta, t) - z \frac{\partial w_0(r, \theta, t)}{\partial r} \quad (5)$$

$$v(r, \theta, z, t) = v_0(r, \theta, t) - z \frac{\partial w_0(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \quad (6)$$

$$w(r, \theta, z, t) = w_0(r, \theta, t) = w \quad (7)$$

با چشم‌پوشی از کرنش در جهت ضخامت ϵ_{zz} ، کرنش‌های متناسب با جابه‌جایی در معادله‌های (۵-۷) برای تغییر شکل‌های کوچک به فرم زیر در می‌آیند:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}, \quad \epsilon_{zz} = 0, \\ \epsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r}, \quad \epsilon_{rz} = \epsilon_{\theta z} = 0 \quad (8)$$

بر اساس قانون هوک، روابط میان تنش محلی و مؤلفه‌های جابه‌جایی به فرم زیر است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \nu \left(\frac{u_0}{r} + \frac{\partial v_0}{r \partial \theta} \right) \\ \frac{u_0}{r} + \frac{\partial v_0}{r \partial \theta} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial r} \\ \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_0}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \right) \end{Bmatrix} \\ - z \left(\frac{E(z)}{1-\nu^2} \right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \\ \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

تنش غیرمحلی با استفاده از رابطه انتگرالی زیر به صورت تابعی از تنش محلی (کلاسیک) بیان می‌شود:

$$t_{ij} = \int_V \alpha(|x' - x|) \sigma_{ij}(x') dV' \quad (1)$$

که این انتگرال بر روی کل حجم سازه، V ، محاسبه می‌شود؛ x نقطه‌ای است که تنش در آن با توجه به تنش در تمامی نقاط x' در سازه محاسبه می‌شود؛ $ij = r, \theta, r\theta$ مولفه‌های مختصات قطبی هستند؛ $\alpha(|x' - x|)$ تابع کرنال غیرمحلی است که به اندازه‌های درونی ساختار بستگی دارد؛ همچنین، t_{ij}, σ_{ij} به ترتیب تنش محلی و غیرمحلی می‌باشند. از آنجایی که حل یک دیفرانسیلی آسان‌تر از معادله انتگرالی است، این‌نگن تابع کرنال غیرمحلی را به صورت تابع گرینی^۱ از عملگر دیفرانسیلی \mathcal{L} فرض کرد که [۱۲]:

$$\mathcal{L} \alpha(|x' - x|) = \delta(|x' - x|) \quad (2)$$

که با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) داریم:

$$\mathcal{L} t_{ij} = \sigma_{ij} \quad (3)$$

در نهایت برای نمونه دوبعدی داریم:

$$\mathcal{L} = 1 - (e_0 l)^2 \nabla^2 = 1 - \mu \nabla^2 \quad (4)$$

که l اندازه‌های درونی و مقیاس کوچک، e_0 ثابت مواد که با استفاده از آزمایش‌های تجربی به دست می‌آید و $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$ عملگر لاپلاسین در مختصات قطبی است. مقدار پارامتر غیرمحلی (μ) به شرایط تکیه‌گاهی، عدد مد، تعداد دیواره‌ها و لایه‌ها، و همچنین به ماهیت حرکت بستگی دارد. تا به امروز هیچ منبعی در دست نیست تا مقدار دقیق این پارامتر را تعیین کرده باشد [۲۳]. منابع موجود در این زمینه، برای به دست آوردن این پارامتر، پیشنهاد می‌کنند تا منحنی‌های انتشار^۲ مکانیک محیط پیوسته غیرمحلی و دینامیک شبکه^۳ برای ساختارهای کریستالی نانومواد با یکدیگر مقایسه شوند [۲۳، ۱۰، ۹]. در این تحقیق، مقدار این پارامتر در بازه صفر تا 4 nm^2 در نظر گرفته می‌شود [۲۳].

۳- فرض‌های اساسی

نانورقی با ضخامت کلی h و تحت بارگذاری یکنواخت N را با شعاع داخلی و خارجی r_i و r_o در نظر می‌گیریم (شکل ۱).

1. Green function
2. Dispersion curves
3. Lattice dynamics

۲-۳- معادله پایداری نانورق

معادله پایداری را می‌توان از تغییر بسیار ناچیز در نزدیکی حالت تعادل به‌دست آورد [۲۵]. به‌عبارت دیگر معادله کمانش از رابطه $\delta^2 V = 0$ به‌دست می‌آید. بدین منظور مقادیر مولفه‌های جابه‌جایی به‌فرم زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$u_0 = u^0 + u^1, \quad v_0 = v^0 + v^1, \quad w = w^0 + w^1 \quad (20)$$

که در این رابطه بالانویس 0 مربوط به حالت تعادل و بالانویس 1 ناشی از تغییر بسیار ناچیز در مولفه‌ها از حالت تعادل است.

در نتیجه مولفه‌های نیرو و ممان به‌فرم زیر به‌دست می‌آیند:

$$N_r = N_r^0 + N_r^1, \quad M_r = M_r^0 + M_r^1 \quad (21)$$

$$N_\theta = N_\theta^0 + N_\theta^1, \quad M_\theta = M_\theta^0 + M_\theta^1 \quad (22)$$

$$N_{r\theta} = N_{r\theta}^0 + N_{r\theta}^1, \quad M_{r\theta} = M_{r\theta}^0 + M_{r\theta}^1 \quad (23)$$

با حذف جملات درجه دو و همچنین با صفر کردن تغییر شکل عمودی حالت پیش‌بار، $w^0 = 0$ [۲۴]، و همچنین با علم به اینکه در حالت بار فشار شعاعی یکنواخت داریم $N_r^0 = 0$ ، $N_{r\theta}^0 = -N$ [۲۵]، معادلات غیرمحلّی کمانش با جایگذاری معادلات (۲۱-۲۳) در معادلات تعادل و در نهایت با صفر کردن عبارت‌های مربوط به حالت پیش‌بار، به‌صورتی که در مرجع [۲۴] انجام شده است، به‌فرم زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{r\partial\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{N_{r\theta}}{r} = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \\ & \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - N \nabla^2 w = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (۱۸) و (۱۹) و ضرب $[1 - \mu \nabla^2]$ در معادلات (۲۴) تا (۲۶)، و نیز با توجه به این نکته که در تئوری کیرشهف، معادله (۲۶) معادله اصلی و مستقل از دو معادله دیگر است، معادله کمانش نانورق نازک به‌فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 w}{r \partial r^3} - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial w}{r^3 \partial r} + \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^4 w}{r^2 \partial r^2 \partial \theta^2} - 2 \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial r \partial \theta^2} + 4 \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} \right) \\ & - (1 - \mu \nabla^2) N \nabla^2 w = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

برای به‌دست آوردن انرژی پتانسیل کل نانورق، انرژی کرنش با انرژی پتانسیلی ناشی از بارهای خارجی به‌فرم زیر جمع می‌شوند [۲۴]:

$$V = \Omega + U \quad (10)$$

که انرژی کرنشی در فرم غیرمحلّی به‌فرم زیر است [۲۳]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r (t_{rr} \epsilon_{rr} + t_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + t_{r\theta} \epsilon_{r\theta}) r dr d\theta dz \quad (11)$$

و انرژی پتانسیل ناشی از بارهای خارجی به‌فرم زیر [۲۴]:

$$\Omega = -\frac{N}{h} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial(nu_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) dr d\theta dz \quad (12)$$

در نهایت با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل $(\delta V = 0)$ معادلات تعادل غیرمحلّی نانورق کیرشهف به‌فرم سه معادله (۱۳) تا (۱۵) به‌دست می‌آیند. شایان ذکر است معادلات فوق، با گرفتن مشتق جزئی از عبارت انرژی پتانسیل کل نانورق، و مساوی صفر قراردادن ضرایب δw و δv_θ و δu_θ به‌ترتیب حاصل شده‌اند [۲۳].

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{r\partial\theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{N_{r\theta}}{r} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \\ & + \frac{2}{r^2} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + N_\theta \left(\frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \\ & + 2N_{r\theta} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

که در این روابط N_i, M_i ($i = r, \theta, r\theta$) مولفه‌های نیرو و گشتاور هستند که از روابط زیر به‌دست می‌آیند [۲۳]:

$$(N_r, N_\theta, N_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (t_{rr}, t_{\theta\theta}, t_{r\theta}) dz \quad (16)$$

$$(M_r, M_\theta, M_{r\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (t_{rr}, t_{\theta\theta}, t_{r\theta}) z dz \quad (17)$$

با توجه به روابط (۴) و (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$[1 - \mu \nabla^2] N_{ij} = N_{ij}^L \quad (18)$$

$$[1 - \mu \nabla^2] M_{ij} = M_{ij}^L \quad (19)$$

بالانویس L نشانگر کلاسیک بودن داده است.

۲×۲ می‌شود. شرایط مرزی برای نانورق‌های دایروی و حلقوی برای ورق‌های نازک به صورت زیر است:
 تکیه‌گاه گیردار: $w=0, \partial w/\partial r=0$
 تکیه‌گاه ساده: $w=0, \partial M_r=0$

۴- نتایج عددی

به دلیل سادگی روش ارائه شده، به دست آوردن بار کمانشی در هر شرایط تکیه‌گاهی به آسانی میسر خواهد بود. برای تایید درستی داده‌ها، کرنش کمانشی (ϵ_b) به دست آمده از رابطه زیر با نتایج ارائه شده در [۲۱] برای نانورق‌های دایروی مقایسه شده است.

$$\epsilon_b = N/Eh \quad (36)$$

همان‌گونه که از جدول ۱ و شکل ۲ مشخص است، تمامی داده‌ها دقیقاً منطبق بر نتایج ارائه شده در منابع [۲۱] و [۲۲] است. از آنجا که در این پژوهش تاثیر پارامتر غیرمحملی بر روی رفتار کمانشی نانو ورق دایروی و حلقوی با شرایط تکیه‌گاهی و مدهای متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد و این عوامل از جمله عواملی هستند که بر روی مقدار دقیق پارامتر غیرمحملی در استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی تاثیرگذارند و از طرفی منبعی به طور کامل و جامع مقدار دقیق آن را برای شرایط ذکر شده گزارش نکرده است، مقدار این پارامتر در بازه محافظه کارانه صفر تا 4 nm^2 در نظر گرفته شده است [۲۱-۲۳]. شایان ذکر است که هر نانورق حلقوی با دو علامت نشان داده می‌شود که هر یک شرایط مرزی را در طول شعاع داخلی و خارجی مشخص می‌کنند. برای مثال $S-C$ نانورق حلقوی است که دارای شرایط تکیه‌گاه ساده در طول شعاع داخلی و شرایط تکیه‌گاه گیردار در طول شعاع خارجی است. در صورتی که اطلاعاتی نظیر شعاع خارجی، R ، τ و شرایط مرزی ارائه نشده باشند، به ترتیب به صورت $10, 0.2, 0.05 \text{ nm}^2$ و نانورق حلقوی با شرایط $C-C$ در نظر گرفته می‌شوند.

همچنین، برای اثبات درستی نتایج برای نانورق‌های حلقوی، در شکل ۲، بارهای کمانشی بی‌بعد برای نانورق‌هایی با شرایط تکیه‌گاهی $C-C$ و $S-S$ و شعاع‌های خارجی و داخلی به ترتیب ۲۰ و ۱۰ نانومتر با داده‌های ارائه شده در منبع [۲۲] مقایسه شده است.

در این رابطه، $D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$ استحکام خمشی نانورق است. با بی‌بعد کردن معادله بالا با فرضیات زیر:

$$\bar{w} = \frac{w}{r_o}, \quad r^* = \frac{r}{r_o}, \quad z^* = \frac{z}{h}, \quad (28)$$

$$\tau = \frac{h}{r_o}, \quad R = \frac{r_i}{r_o}, \quad \bar{D} = \frac{D}{Eh^3}$$

داریم:

$$(\bar{D} - \frac{\bar{N}\mu}{r_o^2})\Delta\bar{w} + \bar{N}\bar{\Delta}\bar{w} = 0 \quad (29)$$

که در این رابطه $\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial}{r^* \partial r^*} + \frac{\partial^2}{r^{*2} \partial \theta^2}$ است. معادله (۲۹) را می‌توان به شکل زیر تجزیه کرد که دو معادله با جواب تابع بسل می‌باشند:

$$(\bar{D} - \frac{\bar{N}\mu}{r_o^2})\bar{\Delta}\bar{w} + \bar{N}\bar{w} = 0, \quad \bar{\Delta}\bar{w} = 0, \quad (30)$$

با حل معادله بالا، دو جواب $\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ که به صورت زیر می‌باشند به دست می‌آید [۲۶]:

$$w_1 = A_1 r^{*p} \cos(p\theta) + A_2 \left\{ \begin{matrix} \log r^* \\ r^{*-p} \end{matrix} \right\} \cos(p\theta) \quad (31)$$

$$w_2 = A_3 J_p(\delta_2 r^*) \cos(p\theta) + A_4 Y_p(\delta_2 r^*) \cos(p\theta) \quad (32)$$

که در آن

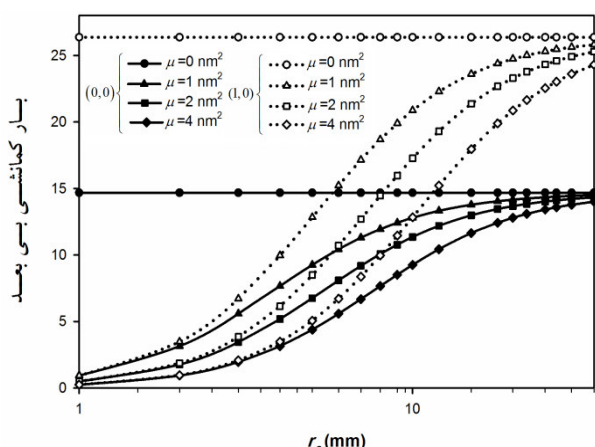
$$\delta_2^2 = \frac{\bar{N}}{\bar{D} - \frac{\bar{N}\mu}{r_o^2}} \quad (33)$$

$$\bar{N} = \frac{N r_o^2}{Eh^3} \quad (34)$$

رابطه (۳۴) بار کمانش بی‌بعد است. شایان ذکر است که قسمت بالای رابطه (۳۱) برای کمانش متقارن ($p=0$) و پایین برای کمانش غیرمتقارن ($p \neq 0$) است. در نهایت برای به دست آوردن بارهای کمانشی، با اعمال شرایط مرزی به معادلات (۳۱) و (۳۲) به سیستم ماتریسی همگن زیر می‌رسیم:

$$[H]_{4 \times 4} \{ \Gamma \}_{4 \times 1} = \{ 0 \}_{4 \times 1} \quad (35)$$

که در معادله بالا $\{ \Gamma \}$ ماتریس ضرایب نامعین A_i است. حال با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس H ($|H|=0$) می‌توان مقادیر δ_2 را به دست آورد که با استفاده از رابطه (۳۳) بارهای بحرانی کمانش به دست می‌آیند. شایان ذکر است که ماتریس 4×4 $[H]$ برای نانورق‌های دایروی تبدیل به ماتریس

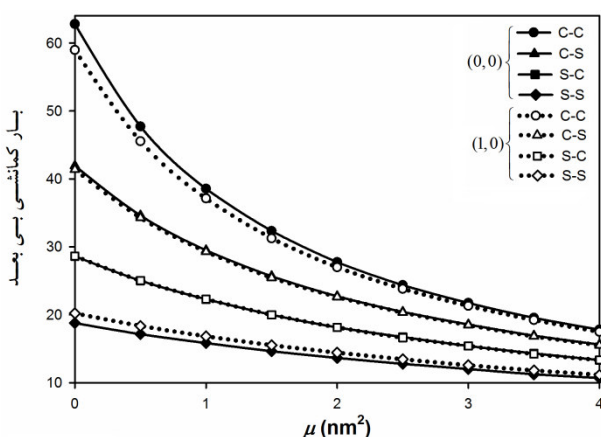


شکل ۳ تغییرات بار کمانشی متقارن و نامتقارن با شعاع خارجی نانورق (نانورق دایروی با لبه گیردار)

۴-۲- اثر پارامتر غیرمحملی و شرایط تکیه‌گاهی

تأثیر پارامتر غیرمحملی با سفت‌تر شدن شرایط تکیه‌گاهی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، همان‌گونه که از شکل ۴ می‌توان دید، اثر کاهش پارامتر غیرمحملی برای شرایط تکیه‌گاهی C-C بیشترین و برای S-S کمترین مقدار را دارد.

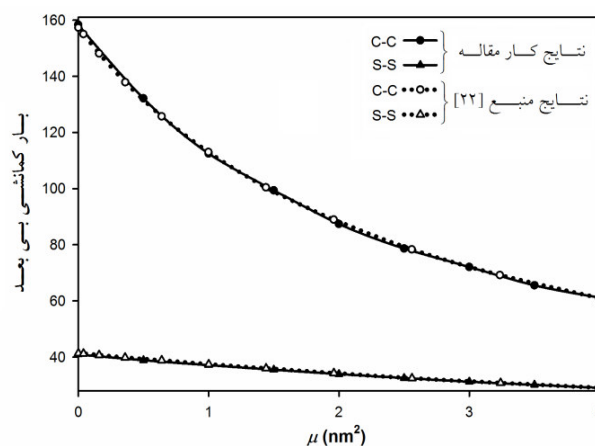
نکته دیگری که از این شکل به دست می‌آید این است که بار بحرانی کمانشی بسته به شرایط مرزی نانورق می‌تواند متقارن یا نامتقارن باشد. همچنین، مشاهده می‌شود که با افزایش سفتی شرایط مرزی، مد متقارن کمانشی مسئول بار بحرانی کمانش جای خود را به مد نامتقارن می‌دهد. به عبارت دیگر، در شرایط تکیه‌گاهی سفت‌تر و همچنین در مقادیر کمتر پارامتر غیرمحملی مد مسئول بار بحرانی کمانش از نوع نامتقارن (مد (1,0)) است.



شکل ۴ تغییرات بار کمانشی متقارن و غیرمتقارن با پارامتر غیرمحملی برای شرایط مرزی مختلف

جدول ۱ مقایسه کرنش کمانشی برای نانورق ایزوتروپیک دایروی با شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار ($h=0.335$)

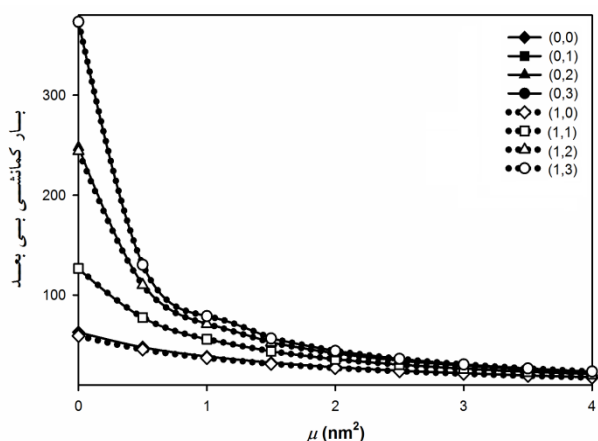
شعاع (nm)	کرنش کمانشی (ϵ_b (%))				
	پارامتر غیرمحملی ($\mu=(e_0a)^2$)				
	۰	۰.۲۵	۱	۲/۲۵	۴
۴	۰/۹۴۳	۰/۷۶۷	۰/۴۹۲	۰/۳۰۸	۰/۲۰۲
[۲۱]۴	۰/۹۴۳	۰/۷۶۷	۰/۴۹۲	۰/۳۰۸	۰/۲۰۲
۶	۰/۴۱۹	۰/۳۸۰	۰/۲۹۸	۰/۲۱۹	۰/۱۵۹
[۲۱]۶	۰/۴۱۹	۰/۳۸۰	۰/۲۹۸	۰/۲۱۹	۰/۱۵۹
۸	۰/۲۳۶	۰/۲۲۳	۰/۱۹۲	۰/۱۵۶	۰/۱۲۳
[۲۱]۸	۰/۲۳۶	۰/۲۲۳	۰/۱۹۲	۰/۱۵۶	۰/۱۲۳
۱۰	۰/۱۵۱	۰/۱۴۶	۰/۱۳۲	۰/۱۱۳	۰/۰۹۵
[۲۱]۱۰	۰/۱۵۱	۰/۱۴۶	۰/۱۳۲	۰/۱۱۳	۰/۰۹۵



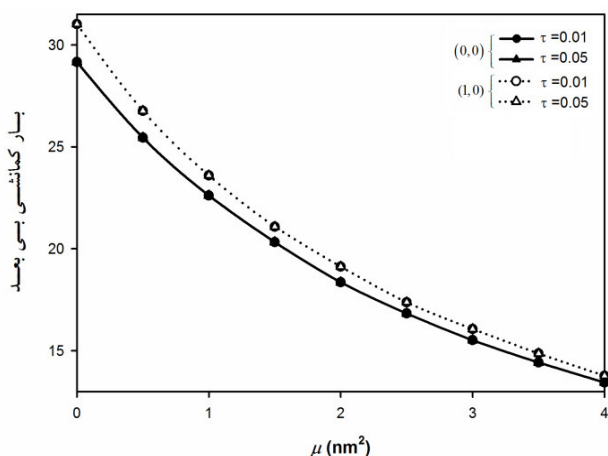
شکل ۲ مقایسه بارهای کمانشی بی‌بعد نانورق‌های C-C و S-S با منبع [۲۲]

۴-۱- اثر پارامتر غیرمحملی و شعاع نانورق

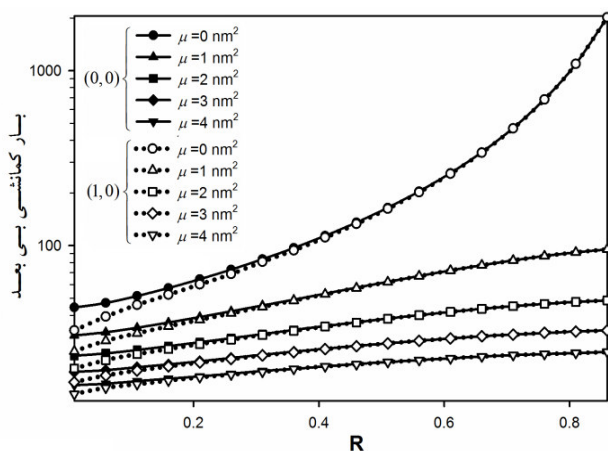
همان‌گونه که از شکل ۳ قابل مشاهده است، با افزایش شعاع نانورق، اثر پارامتر غیرمحملی کاهش یافته و بارهای کمانشی غیرمحملی به بار کمانشی محلی میل می‌کنند. به عبارت دیگر، به‌ازای شعاع معینی، با افزایش شعاع نانورق، می‌توان این مطلب را بیان کرد که پارامتر غیرمحملی اثری بر بارهای کمانشی ندارد. این نتایج کاملاً با داده‌های منابع دیگر همخوانی داشته و در حالتی که ابعاد ورق بسیار بزرگ‌تر از ابعاد درون اتمی باشد، کاملاً اثرات اندازه و نیروهای درون اتمی قابل چشم‌پوشی می‌شوند. نکته دیگری که از این شکل می‌توان دریافت این است که اختلاف بار کمانشی مدهای اول متقارن و نامتقارن در شعاع‌های کمتر، بسیار کمتر است.



شکل ۵ تغییرات بارهای کمانشی متقارن و نامتقارن با پارامتر غیرمحلّی برای مدهای مختلف کمانشی



شکل ۶ تغییرات بار کمانشی برای نانورق حلقوی با نسبت‌های مختلف ضخامت بر شعاع خارجی



شکل ۷ تغییرات بارهای کمانشی متقارن و نامتقارن با پارامتر غیرمحلّی برای نانورق حلقوی با نسبت‌های مختلف R

نتایج نشان داده شده در شکل ۴ در واقع این نکته را نمایان می‌سازد که پارامتر غیرمحلّی مقادیر بارهای کمانشی که مقدار بیشتری دارند را بیشتر تحت تاثیر قرار می‌دهد. در نتیجه بارهای بحرانی نانورق‌هایی با شرایط تکیه‌گاهی سفت‌تر، با افزایش پارامتر غیرمحلّی، کاهش بیشتری می‌یابند.

۴-۳- اثر پارامتر غیرمحلّی و مد کمانشی

اثر پارامتر غیرمحلّی، با بالا رفتن مد کمانش بیشتر می‌شود، به عبارت بهتر، پارامتر غیرمحلّی بارهای کمانشی با مدهای بالاتر را بیشتر کم می‌کند. این نکته را می‌توان به وضوح در شکل ۵ مشاهده نمود. دلیل این افزایش اثر پارامتر غیرمحلّی در مدهای بالاتر را می‌توان با این نکته مرتبط دانست که در طول موج‌های کوچک‌تر (مدهای بالاتر) کنش و واکنش میان اتم‌ها افزایش می‌یابد که این امر باعث افزایش تاثیر پارامتر غیرمحلّی در مدهای کمانشی بالاتر می‌گردد. شایان ذکر است، با توجه به این شکل، برای مدهای بالاتر اختلاف مدهای متقارن و نامتقارن کمتر می‌شود.

۴-۴- اثر پارامتر غیرمحلّی و نسبت τ

در شکل ۶، تغییرات بارهای متقارن و غیرمتقارن کمانشی برای نسبت‌های مختلف ضخامت بر شعاع خارجی، τ، ارائه شده است. همان‌گونه که از این شکل قابل مشاهده است، تغییرات این نسبت بر اثر کاهندگی پارامتر غیرمحلّی تاثیر چندانی ندارد. در واقع تاثیر این پارامتر مانند پارامتر شعاع خارجی نانورق است اما از آنجایی که افزایش و کاهش نسبت ضخامت به شعاع خارجی در بازه کوچکی انجام می‌شود، بنابراین این پارامتر تاثیر چندانی در بارهای کمانشی نخواهد داشت.

۴-۵- اثر پارامتر غیرمحلّی و نسبت R

عامل دیگری که در تعیین متقارن یا نامتقارن بودن بار بحرانی کمانش موثر است، نسبت شعاع داخلی به خارجی، R، است. همان‌طور که از شکل ۷ مشخص است، در مقادیر کمتر این نسبت بار بحرانی کمانش از نوع نامتقارن و در مقادیر بالا بار بحرانی کمانش نانورق از نوع متقارن است. همچنین، نکته دیگری که از این شکل می‌توان مشاهده نمود این است که تاثیر پارامتر غیرمحلّی بر روی بار کمانشی نانورق با نسبت شعاع‌های بیشتر، بالاتر بوده و با کاهش نسبت شعاع‌ها اثر این پارامتر کاهش می‌یابد.

- [2] Ma M., Tu J. P., Yuan Y. F., Wang X. L., Li K. F., Mao F., Zeng Z. Y., "Electrochemical Performance of ZnO Nanoplates as Anode Materials for Ni/Zn Secondary Batteries", *Journal of Power Source*, Vol. 179, 2008, pp. 395-400.
- [3] Yguerabide J., Yguerabide E. E., "Resonance Light Scattering Particles as Ultrasensitive Labels for Detection of Analytes in a wide Range of Applications", *Journal of Cellular Biochemistry-Supplement*, Vol. 37, 2001, pp. 71-81.
- [4] Agesen M., Sorensen C. B., "Nanoplates and Their Suitability for Use as Solar Cells", *Proceeding of Clean Technology*, Boston, 2008, pp. 109-112.
- [5] Bai W., Zhu X., Zhu Z. Q., Chu J. H., "Synthesis of Zinc Oxide Nanosheet Thin Films and Their Improved Field Emission and Photoluminescence Properties by Annealing Processing", *Applied Surface Science*, Vol. 254, No. 20, 2008, pp. 6483-6488.
- [6] Ma Q., Clarke D. R., "Size dependent Hardness of Silver Single Crystals". *Journal of Materials Research*, Vol. 10, 1995, pp. 853-63.
- [7] Fleck N. A., Muller G. M., Ashby M. F., Hutchinson J. W., "Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment". *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 42, No. 2, 1994, pp. 475-87.
- [8] Chong A. C. M., Yang F., Lam D. C. C., Tong P., "Torsion and Bending of Micron-Scaled Structures", *Journal of Materials Research*, Vol. 16, No. 04, 2001, pp. 1052-8.
- [9] Eringen A. C., "Nonlocal Polar Elastic Continua", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, 1972, pp. 1-16.
- [10] Eringen A. C., "ON Differential-Equations of Nonlocal Elasticity and Solutions of Screw Dislocation and Surface-Waves", *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, 1983, pp. 4703-4710.
- [11] Eringen A. C., Edelen D. G. B., "On Nonlocal Elasticity", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, 1972, pp. 233-248.
- [12] Eringen A. C., *Nonlocal continuum Field Theories*, New York, Springer, 2002.
- [13] Yamaki N., "Buckling of a Thin Annular Plate under Uniform Compression", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 25, 1958, pp. 267-273.
- [14] Majumdar S., "Buckling of a Thin Annular Plate under Uniform Compression", *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 9, 1971, pp. 1701-07.
- [15] Pradhan S. C., Murmu T., "Small Scale Effect on the Buckling of Single-Layered Graphene Sheets under Biaxial Compression via Nonlocal Continuum Mechanics", *Computational Materials Science*, Vol. 47, 2009, pp. 268-274.
- [16] Farajpour A., Shahidi A. R., Mohammadi M., Mohzoon M., "Buckling of Orthotropic Micro/Nanoscale Plates under Linearly Varying In-

تاثیر پارامتر غیرمحملی به‌گونه‌ای است تا تمامی بارهای کمانش در حالت‌های مختلف کاهش یافته و به مقدار خاصی میل کنند. بنابراین، در این راستا، بارهایی که مقدار آن‌ها بیشتر است، بیشتر کاهش می‌یابند و تاثیر بیشتری از پارامتر غیرمحملی می‌گیرند. در این میان، با افزایش نسبت R ، بار کمانشی افزایش یافته و در نتیجه اثر کاهندگی پارامتر غیرمحملی بر روی آن افزایش می‌یابد.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، کمانش متقارن و غیرمتقارن نانوقرک‌های نازک، با بهره‌گیری از تئوری کیرشهف، با استفاده از حلی دقیق و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین، برای وارد کردن تاثیرات اندازه‌ها و نیروهای درون اتمی تئوری غیرمحملی ارینگن مورد استفاده قرار گرفته و تاثیرات پارامترهای هندسی نانوقرک، شرایط تکیه‌گاهی و پارامتر غیرمحملی بر روی رفتار کمانشی نانوقرک مورد بررسی قرار گرفت. از آنجایی که بسته به پارامترهایی از جمله شرایط مرزی، نسبت شعاع داخلی به خارجی نانوقرک حلقوی و همچنین ضخامت نانوقرک بار بحرانی می‌تواند متقارن یا نامتقارن باشد، برای به‌دست آوردن بارهای بحرانی کمانشی مدهای غیرمتقارن نیز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این کار حاکی از این است که پارامتر غیرمحملی اثر کاهندگی بر روی بارهای کمانشی دارد و این اثر با تغییر در شرایط تکیه‌گاهی، شعاع خارجی نانوقرک، نسبت شعاع داخلی به خارجی نانوقرک و همچنین شماره مد کمانش تغییر می‌کند. با سفت‌تر شدن شرایط تکیه‌گاهی و کاهش شعاع نانوقرک و همچنین افزایش نسبت شعاع داخلی به خارجی، اثر پارامتر غیرمحملی افزایش می‌یابد. همچنین، در شرایط مرزی سفت‌تر و همچنین در نسبت‌های کمتر نسبت شعاع داخلی به خارجی بارهای بحرانی کمانش از نوع نامتقارن هستند، از این رو، چشم‌پوشی از این مدها امکان دارد که منجر به داده‌های غلط و در نتیجه طراحی نادرست گردد.

۶- مراجع

- [1] Taniguchi N., "On the Basic Concept of Nanotechnology", *Proceedings of the International Conference of Production Engineering*, London, 1974, pp. 18-23.

- Continuum Plate Model”, *Physica E*. Vol. 43, 2011, pp. 1820-1825.
- [22] Karamooz Ravari M. R., Shahidi A. R., “Axisymmetric Buckling of the Circular Annular Nanoplates using Finite Difference Method”, *Meccanica*, DOI: 10.1007/s11012-012-9589-3, 2012.
- [23] Hosseini Hashemi Sh., Bedroud M., Nazemnezhad R., “An Exact Analytical Solution for Free Vibration of Functionally Graded Circular/Annular Mindlin Nanoplates via Nonlocal Elasticity”, *Composite Structures*, Vol. 103, 2013, pp. 108-118.
- [24] Naderi A., Saidi A. R., “Exact Solution for Stability Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Sector Plates on Elastic Foundation”, *Composite Structures*, Vol. 93, 2011, pp. 629-38.
- [25] Jones R. M., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, Virginia, Bull Ridge, Publishing, 2006.
- [26] Wang C. M., Aung T., “Buckling of Circular Mindlin Plates with an Internal Ring Support and Elastically Restrained Edge”, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, Vol. 131, No. 4, 2005, pp. 359-366.
- Plane Load via Nonlocal Continuum Mechanics”, *Composite Structures*, Vol. 94, 2012, pp. 1605-1615.
- [17] Aghababaei R., Reddy J. N., “Nonlocal Third-Order Shear Deformation Plate Theory with Application to Bending and Vibration of Plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, 2009, pp. 277-289.
- [18] Pradhan S. C., Phadikar J. K., “Nonlocal Elasticity Theory for Vibration of Nanoplates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 325, 2009, pp. 206-223.
- [19] Hosseini Hashemi Sh., Samaei A. T., “Buckling Analysis of Micro/Nanoscale Plates via Nonlocal Elasticity Theory”, *Physica E*. Vol. 43, 2011, pp. 1400-1404.
- [20] Samaei A. T., Abbasian S., Mirsayar M. M., “Buckling Analysis of a Single-Layer Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium Based on Nonlocal Mindlin Plate Theory”, *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, 2011, pp. 481-485.
- [21] Farajpour A., Mohammadi M., Shahidi A. R., Mahzoon M., “Axisymmetric Buckling of the Circular Graphene Sheets with the Nonlocal