



## مدل سازی تغییرات غیرخطی مدول الاستیک تحت بارگذاری متناوب

عباس قائی

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان  
اصفهان، کد پستی ۸۴۱۵۶-۸۳۱۱۱، [ghaei@cc.iut.ac.ir](mailto:ghaei@cc.iut.ac.ir)

**چکیده-** نتایج تجربی بارگذاری-باربرداری روی فلزات نشان می‌دهد که رفتار ماده حین باربرداری و یا بارگذاری مجدد بعد از تغییر شکل پلاستیک پیچیده و غیرخطی است. ولی بیشتر مدل‌ها برای ساده‌سازی، از یک مقدار ثابت کاهش یافته برای مدول الاستیک حین باربرداری استفاده کرده‌اند. در این مقاله با هدف توصیف رفتار غیرخطی باربرداری، یک مدل هایپوالاستیک پیشنهاد گردید. در این مدل با شروع تغییر شکل الاستیک، مدول الاستیک از مقدار اولیه خود به صورت نمایی شروع به کاهش یافته و در لحظه شروع تغییر شکل پلاستیک به مقدار نهایی خود می‌رسد. این مدل به سادگی قابلیت اضافه شدن به هر معادله ساختاری پلاستیسیته را دارد و همچنین برای پیاده‌سازی عددی آن نیاز به اصلاح روش‌های رایج پیاده‌سازی مثل نگاشت برگشتی نیست. به عنوان مثال، یک مدل ساده پلاستیسیته شامل سطح تسلیم فون-میسز و قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک در نظر گرفته شد و مدل هایپوالاستیک پیشنهادی در قالب یک زیر روال برای نرم‌افزار تجاری آباکوس پیاده‌سازی شد. نتایج مقایسه رفتار تجربی فولاد دوفازی ۹۸۰ و رفتار پیش‌بینی شده توسط مدل نشان می‌دهد این مدل ساده قادر است تا رفتار غیرخطی باربرداری را با تقریب خوبی توصیف نماید.

**کلیدواژه‌گان:** معادله ساختاری، رفتار غیرخطی باربرداری، تغییر مدول الاستیک، مدل هایپوالاستیک.

## Modeling of nonlinear elastic modulus variation during cyclic loading

A. Ghaei

Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Isfahan Univ. of Tech., Isfahan, Iran  
P.O.B. 84156-83111 Isfahan, Iran. [ghaei@cc.iut.ac.ir](mailto:ghaei@cc.iut.ac.ir)

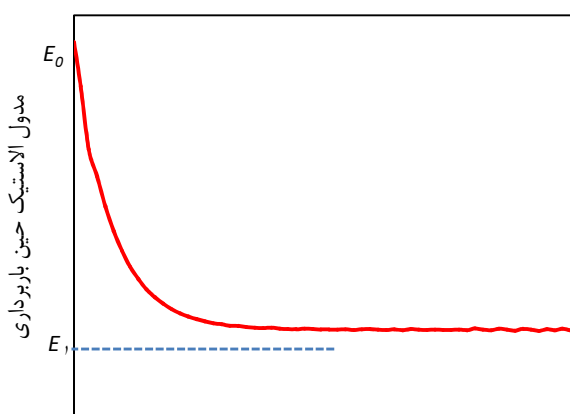
**Abstract-** Complex nonlinear unloading behavior following plastic deformation on metals has been observed by researchers. However, a constant chord modulus has been used by most of the researchers to describe the unloading behavior. In this study, a new hypoelastic model is proposed in order to describe this complex nonlinear behavior. The elastic modulus is assumed to be the initial Young's modulus at the beginning of each loading reversal and is exponentially decreased with the elastic deformation and finally saturates to a particular value at the start of plastic deformation. The model can be easily utilized in any plasticity constitutive law. Furthermore, its numerical implementation is fairly straightforward. As an example, a simple constitutive law was developed using the von-Mises yield function, isotropic hardening law and the proposed hypoelastic model. This constitutive law was implemented into ABAQUS commercial package via a user material subroutine UMAT. A comparison between the experimental response of DP980 and its simulated response showed that the model is able to describe the material response fairly well.

**Keywords:** Constitutive Law, Nonlinear Unloading Behavior, Elastic Modulus Variation, Hypoelastic Model.

## ۱- مقدمه

سرعت کاهش یافته ولی در کرنش‌های پلاستیک بالا به یک مقدار مشخص میل می‌کند. این موضوع به صورت شماتیک در شکل ۱ نشان داده شده است که در آن  $E_0$  مدول الاستیک ماده اولیه بدون اعمال کرنش پلاستیک و  $E_1$  مدول الاستیک ماده‌ای است که مقدار زیادی کرنش پلاستیک بر روی آن اعمال شده است.

سان و واگنر [۱۴] ضمن بررسی منحنی تنش-کرنش هنگام بارگذاری چرخه‌ای بر روی ورق فولادهای دوفازی نیز گزارش کردند که رفتار ماده کاملاً غیرخطی می‌باشد. شکل ۲ منحنی تنش-کرنش هنگام بارگذاری-باربرداری بر روی فولاد دوفازی ۱۹۸۰ را نشان می‌دهد. آنها برای انجام این آزمایش‌ها، نمونه‌های استاندارد کشش بر اساس استاندارد ASTM-E646 با طول گیج ۷۵ میلی‌متر و عرض ۱۲/۵ میلی‌متر ساختند. آزمایش‌ها در نرخ کرنش نامی  $10^{-3}$  بر ثانیه انجام گرفته است. ماشین کشش مورد استفاده MTS810 بوده و از کشش‌سنج لیزری برای اندازه‌گیری کرنش استفاده شده است. کشش‌سنج لیزری با انجام ۱۰۰ عملیات اسکن خطی بر دقیقه کار کرده و نقاطی که از قبل روی نمونه علامت‌گذاری شده بوده را شناسایی کرده است. نمونه‌های کشش تا منطقه پلاستیک بارگذاری شده و سپس باربرداری می‌شوند. دوباره نمونه‌ها بارگذاری مجدد شده تا مقدار کرنش پلاستیک بیشتر از مرحله بارگذاری قبل شود و دوباره باربرداری می‌شوند و این چرخه‌ها تکرار می‌شوند.



کرنش پلاستیک

شکل ۱ شماتیک کاهش مدول الاستیک باربرداری بر حسب کرنش پلاستیک

امروزه مدل‌های عددی یا تحلیلی در حل بسیاری از مسائل مهندسی استفاده می‌شوند. واضح است که توصیف رفتار ماده یکی از مراحل مدل‌سازی است و بر دقت مدل‌سازی تأثیر زیادی دارد. رفتار ماده بسته به عواملی مانند جنس ماده، دما، مقدار بار و نوع بارگذاری می‌تواند کاملاً پیچیده باشد. بنابراین، استفاده از معادلات ساختاری پیشرفته که توانایی توصیف رفتار پیچیده ماده را در شرایط مورد نظر داشته باشند، امری ضروری است. به همین دلیل، تاکنون بسیاری از محققان معادلات ساختاری جدیدی برای توصیف رفتار ماده پیشنهاد کرده‌اند.

یکی از شرایطی که منجر به ایجاد رفتار پیچیده در ماده می‌شود، بارگذاری چرخه‌ای است. پدیده‌های متعددی از جمله اثر باوشینگر، نرم‌شوندگی دائمی، منطقه‌گذرای باوشینگر با تغییرات زیاد نرخ کارسختی و کاهش مدول الاستیک باربرداری در بارگذاری چرخه‌ای گزارش شده است [۱-۳]. از بین این پدیده‌ها، این مقاله سعی دارد تا با تمرکز بر روی پدیده رفتار ماده حین باربرداری به ارائه یک مدل جدید برای توصیف آن بپردازد.

لو و گوش [۴] مدول الاستیک و ضریب پواسون را حین باربرداری و بارگذاری مجدد فولاد اندازه‌گیری کردند و گزارش دادند که هر دو این پارامترها حین باربرداری و بارگذاری مجدد نسبت به حالت اولیه تغییر یافته‌اند. بنیتو و همکاران [۵] نیز مدول الاستیک را حین باربرداری بعد از تغییر شکل پلاستیک برای آهن خالص اندازه‌گیری کرده و گزارش دادند که آن از ۲۱۰ گیگا پاسکال به ۱۹۸ گیگاپاسکال کاهش یافته است. این تغییر در مدول الاستیک توسط محققان دیگری نیز گزارش شده است [۶-۸]. همچنین، مقالات نشان می‌دهند که رفتار ماده هنگام باربرداری کاملاً غیرخطی است. البته لازم به ذکر است این رفتار غیرخطی برای فلزات پراستحکام جدید مانند فولادهای دوفازی با وضوح بیشتری در منحنی تنش-کرنش خود را نشان می‌دهد. ولی به هر حال، در راستای مدل‌سازی این پدیده و البته ساده‌سازی آن، اکثر محققان فرض کرده‌اند که منحنی تنش-کرنش حین باربرداری خطی بوده و بنابراین یک شیب ثابت خواهد داشت [۸-۱۳]. این شیب که بیانگر مدول الاستیک باربرداری می‌باشد به صورت تابعی از کرنش پلاستیک در لحظه باربرداری می‌باشد. البته لازم به ذکر است مدول الاستیک باربرداری در کرنش‌های پلاستیک کم به

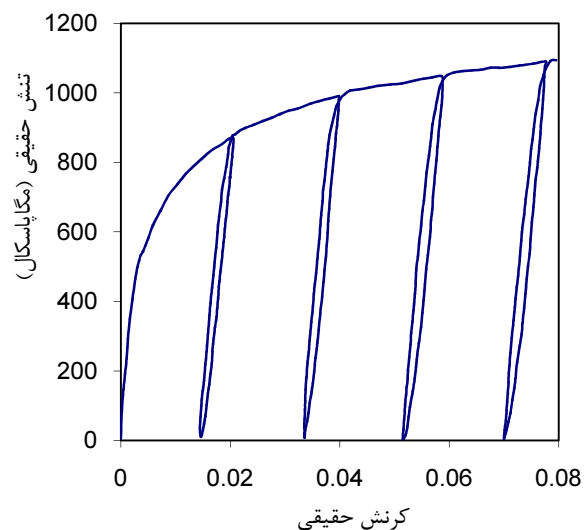
بنابراین با تغییر شکل الاستیک، تانسور الاستیسیته تغییر کرده و باعث می شود رابطه بین تنش و کرنش به صورت غیرخطی تبدیل شود.

## ۲- مدل پیشنهادی

برای توصیف رفتار پیچیده باربرداری- بارگذاری در محدوده الاستیک، سان و واگنر [۱۴] تانسور کرنش کل را به سه بخش کرنش الاستیک، پلاستیک و شبه الاستیک-پلاستیک تقسیم کردند. تغییر شکل الاستیک بازگشت پذیر بوده و حین آن انرژی در ماده ذخیره می شود. تغییر شکل پلاستیک به صورت دائمی بوده و حین آن اتلاف انرژی صورت می گیرد. در تغییر شکل شبه الاستیک-پلاستیک که برای اولین توسط این محققان مطرح می شود، کرنش بازگشت پذیر بوده (مانند تغییر شکل الاستیک) اما در آن انرژی تلف می شود (مانند تغییر شکل پلاستیک). دلیل این تجزیه این است که هنگام باربرداری و بارگذاری مجدد در محدوده تغییر شکل برگشت پذیر، منحنی تنش-کرنش بر هم منطبق نیست. به عبارت دیگر، منحنی تنش-کرنش در باربرداری منطبق بر بارگذاری مجدد نیست و در نتیجه همان طور که در شکل ۲ مشاهده می شود، مقدار انرژی مورد نیاز (سطح زیر منحنی) برای رسیدن به حالت تسلیم مجدد ماده بیشتر از انرژی آزاد شده حین باربرداری است. برای تعیین محدوده این سه تغییر شکل در فضای تنش، حداقل به دو سطح نیاز است. همچنین علاوه بر تعریف کرنش پلاستیک، نیاز به تعریف قانونی برای کرنش شبه الاستیک-پلاستیک می باشد. بنابراین، حین حل مسأله باید نوع تغییر شکل در هر زمان تعیین شده و کرنش های مربوطه محاسبه شود. وقتی مسأله در مود تغییر شکل پلاستیک قرار می گیرد، هر سه کرنش ذکر شده هم زمان اتفاق می افتد و در نتیجه محاسبات مربوط به هر کدام باید انجام گرفته و مدول الاستیک نیز به روز شود. تغییر مدول الاستیک حین تغییر شکل پلاستیک فرایند پیاده سازی معادلات پلاستیسیته در المان محدود را مشکل و پرهزینه می کند زیرا در روش نگاشت بازگشتی که معمولاً برای پیاده سازی معادلات پلاستیسیته در المان محدود استفاده می شود، وجود مدول الاستیک متغیر باعث ظهور مشتقات این پارامتر در معادلات و پیچیده تر شدن معادلات می شود. برای توضیح بیشتر این موضوع می توان به مرجع [۱۳] مراجعه کرد.

نتایج کار سان و واگنر نشان می دهد که شیب منحنی باربرداری ابتدا برابر مقدار اولیه مدول الاستیک بوده و در ادامه به تدریج کاهش می یابد. در صورت بارگذاری مجدد دوباره شیب منحنی از مقدار اولیه مدول الاستیک شروع شده و با ادامه بارگذاری کاهش می یابد. بنابراین حین باربرداری- بارگذاری مجدد مقداری انرژی تلف می شود که با تمرکز بر روی بخش بارگذاری- باربرداری شکل ۲ و توجه به سطح زیر منحنی تنش-کرنش کاملاً قابل مشاهده است. آنها برای مدل سازی این رفتار غیرخطی یک معادله ساختاری پلاستیسیته دو سطحی ارائه نمودند که این دو سطح دارای انتقال و رشد در فضای تنش می باشند.

به طور کلی از معایب مدل های چند سطحی پلاستیسیته می توان به حجم محاسبات بالاتر، سرعت همگرایی کمتر، احتمال بیشتر عدم همگرایی در مسائل پیچیده و پیاده سازی مشکل تر برای روش های مختلف حل مانند المان محدود اشاره کرد. در این مقاله، برای توصیف این رفتار غیرخطی یک مدل هایپوالاستیک ساده پیشنهاد می شود که ضمن نیاز به حجم محاسبات کم، پیاده سازی آن برای المان محدود و مدل های تحلیلی، ساده باشد. لازم به ذکر است در هایپوالاستیسیته نرخ تنش از ضرب تانسور الاستیسیته در نرخ کرنش به دست می آید. تفاوت اصلی آن با الاستیسیته خطی در این است که در هایپوالاستیسیته فرض می شود ثوابت مادی الاستیک مانند مدول یانگ و ضریب پواسون، به صورت تابعی از نامتغیرهای تانسور کرنش الاستیک هستند.



شکل ۲ منحنی تنش-کرنش فولاد دوفازی ۹۸۰ [۱۴]

$$C_{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \frac{E}{E_0} C_{0ijkl} \quad (2)$$

که در این رابطه  $\nu$  ضریب پواسون،  $C$  تانسور الاستیسیته لحظه‌ای،  $E$  مدول الاستیک لحظه‌ای،  $E_0$  مدول الاستیک ماده اولیه با کرنش پلاستیک صفر،  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر و  $C_0$  تانسور الاستیسیته اولیه (با جایگزینی  $E_0$  با  $E$  در معادله (۲)) می‌باشند. این مدل به سادگی می‌تواند در کنار معادلات ساختاری پلاستیسته یک معادله ساختاری الاستوپلاستیک را تشکیل دهد. به عنوان مثال، این مدل هایپوالاستیک با تابع تسلیم فون میسز و قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک در قالب یک زیرروال مدل ماده<sup>۱</sup> برای نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی شد که جزئیات آن در بخش بعد آمده است.

### ۳- پیاده‌سازی عددی مدل

در این بخش، مرحله به مرحله روند پیاده‌سازی عددی مدل فوق در یک معادله ساختاری پلاستیسته ارائه می‌شود. در این مرحله فرض بر این است که مقدار نمو کرنش کل و تمامی متغیرها در ابتدای نمو معلوم است و هدف یافتن تنش در انتهای نمو است.

بطور کلی حین تغییر شکل، تانسور الاستیسیته برای تعیین رابطه بین تنش و کرنش لازم است. برای محاسبه این تانسور مطابق رابطه (۲) نیاز به محاسبه مدول الاستیک لحظه‌ای است. از آن جا که معادلات به صورت نموی حل می‌شوند، بنابراین برای محاسبه تانسور الاستیک نیاز به محاسبه  $E$  متوسط برای آن نمو می‌باشد. برای محاسبه  $E$  متوسط باید از رابطه (۱) از کرنش ابتدای نمو تا کرنش انتهای نمو انتگرال گرفته شده و تقسیم بر نمو کرنش شود. با توجه به این که انتگرال تحلیلی رابطه (۱) بر اساس توابع اولیه ریاضی امکان‌پذیر نمی‌باشد، لذا می‌توان از الگوریتم‌های عددی برای محاسبه این انتگرال استفاده کرد. در این کار از روش نقطه میانی برای محاسبه این انتگرال استفاده شد.

با توجه به اینکه در مدل‌های پلاستیسته برای توصیف کارسختی معمولاً از قانون سخت شوندگی ایزوتروپیک استفاده

در این مقاله، برای ارائه یک مدل ساده‌تر که قابلیت توصیف رفتار پیچیده در باربرداری را داشته باشد، یک مدل هایپوالاستیک پیشنهاد می‌شود. در این مدل، مدول الاستیک به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود.

$$E = E_0 - E_a [1 - \exp(-\xi \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_y - \bar{\epsilon}})] \quad (1)$$

که در این رابطه  $E_0$  مدول الاستیک ماده اولیه بدون کرنش پلاستیک،  $E_a$  میزان کاهش مدول الاستیک در کرنش پلاستیک بی‌نهایت،  $\bar{\epsilon}$  کرنش کل معادل از لحظه شروع تغییر جهت بارگذاری،  $\epsilon_y$  مقدار کرنش معادل برای شروع تغییر شکل پلاستیک می‌باشد که با توجه به اندازه سطح تسلیم به سادگی به دست می‌آید. همچنین  $\xi$  ثابت ماده نشان دهنده نرخ کاهش مدول الاستیک از مقدار اولیه به مقدار نهایی آن می‌باشد که با برازش به منحنی تنش-کرنش حین باربرداری و یا بارگذاری مجدد در محدوده تغییر شکل الاستیک به دست می‌آید. طبق این تعریف، مدول الاستیک در لحظه شروع تغییر جهت بارگذاری برابر  $E_0$  بوده و در شروع تغییر شکل پلاستیک به مقدار  $E_0 - E_a$  میل می‌کند و پس از شروع تغییر شکل پلاستیک ثابت می‌ماند. رابطه فوق یک رابطه یک بعدی است که با تغییر مدول الاستیک شامل خصوصیات زیر می‌باشد:

الف- منحنی تنش-کرنش را در منطقه الاستیک غیرخطی کرده و مدول الاستیک را از مقدار اولیه تا مقدار مشخصی کاهش می‌دهد.

ب- انرژی را در یک سیکل بسته الاستیک تلف می‌کند (طبق مشاهدات تجربی).

ج- کرنش در منطقه الاستیک را برگشت‌پذیر در نظر می‌گیرد.

د- مدول الاستیک را حین تغییر شکل پلاستیک ثابت در نظر می‌گیرد.

تمامی موارد فوق منجر به توصیف مشاهدات تجربی در مدل می‌شود، ضمن اینکه مدل بسیار ساده بوده و پیاده‌سازی آن در المان محدود و مدل‌های تحلیلی دیگر پیچیده نمی‌باشد. همچنین ثابت ماندن مدول الاستیک در حین تغییر شکل پلاستیک، عمل پیاده‌سازی عددی مدل را دچار تغییر نکرده و روی نرخ همگرایی در منطقه پلاستیک تاثیرگذار نیست. لازم به ذکر است در این مقاله فرض می‌شود که ضریب پواسون ثابت باقی می‌ماند. در این حالت تانسور الاستیسیته مطابق با رابطه (۲) به دست می‌آید [۱۴].

رابطه (۶) به‌دست آورد.

$$\varepsilon^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (۶)$$

که در آن  $\varepsilon^P$  تانسور نرخ کرنش پلاستیک و  $\dot{\lambda}$  ضریب پلاستیک است که با توجه به اصل کار پلاستیک معادل و رابطه ۵ مقدار آن برابر رابطه (۷) خواهد بود.

$$\dot{\lambda} = \dot{p} \quad (۷)$$

که در آن  $\dot{p}$  نرخ کرنش پلاستیک معادل است. با جایگزینی روابط (۵) و (۷) در رابطه (۶)، نرخ کرنش پلاستیک از رابطه (۸) به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon^P = \frac{3\dot{p}}{2\sigma_e} s \quad (۸)$$

با انتگرال‌گیری ضمنی از رابطه (۸) نمو کرنش پلاستیک به‌دست می‌آید:

$$\Delta \varepsilon^P = \frac{3\Delta p}{2(\sigma_e)_{t+\Delta t}} s_{t+\Delta t} \quad (۹)$$

که در این رابطه و روابط بعدی اندیس  $t + \Delta t$  به معنای مقدار متغیر در انتهای نمو می‌باشد. حال می‌توان با استفاده از نگاشت برگشتی مقدار تنش را به‌دست آورد. برای یک نمو کرنش به اندازه  $\Delta \varepsilon$  مقدار تنش از رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$\sigma_{t+\Delta t} = \sigma_t + C : [\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^P] = \sigma_t + \sigma^{Tr} - C : \Delta \varepsilon^P \quad (۱۰)$$

که در این رابطه  $\sigma_t$  تنش در لحظه شروع نمو و  $\sigma^{Tr}$  تنش حدسی نام دارد. با توجه به اینکه تنش میانگین برای تنش حدسی و تنش در انتهای نمو برابر است (تغییر شکل پلاستیک روی تغییر حجم و تنش میانگین اثر ندارد)، می‌توان تنش کاهنده را از رابطه (۱۱) به‌دست آورد:

$$s_{t+\Delta t} = \sigma_t + s^{Tr} - C : \Delta \varepsilon^P \quad (۱۱)$$

با جایگزینی رابطه ۹ در رابطه ۱۱ رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$s_{t+\Delta t} = \sigma_t + s^{Tr} - C : \frac{3\Delta p}{2(\sigma_e)_{t+\Delta t}} s_{t+\Delta t} \quad (۱۲)$$

حال با استفاده از رابطه فوق می‌توان تنش کاهنده در انتهای نمو را به‌دست آورد:

$$s_{t+\Delta t} = \left[ I + \frac{3\Delta p}{2(\sigma_e)_{t+\Delta t}} C \right]^{-1} : [\sigma_t + s^{Tr}] \quad (۱۳)$$

$$= \mathcal{E} : [\sigma_t + s^{Tr}]$$

که در این رابطه  $I$  تانسور همانی مرتبه چهار و  $\mathcal{E}$  مدول مماسی اصلاح شده نام دارد. با جایگذاری رابطه فوق در رابطه ۵ یک معادله بر حسب  $\Delta p$  به‌دست می‌آید که با روش نیوتن

می‌شود، سطح تسلیم حین تغییر شکل پلاستیک بزرگ می‌شود. بنابراین در صورتی که باربرداری یا بارگذاری مجدد پس از تغییر شکل پلاستیک صورت گیرد، نیاز به محاسبه مقدار کرنش تسلیم ( $\varepsilon_y$ ) می‌باشد. برای محاسبه کرنش تسلیم باید معادله زیر حل شود:

$$\bar{E} \varepsilon_y - \sigma_y = 0 \quad (۳)$$

که در آن  $\sigma_y$  تنش تسلیم و  $\bar{E}$  مدول الاستیک متوسط از مقدار صفر تا کرنش تسلیم  $\varepsilon_y$  می‌باشد. این معادله را می‌توان به صورت عددی توسط روش نیوتن رافسون حل کرد و مقدار کرنش تسلیم را اندازه فعلی سطح تسلیم ( $\sigma_y$ ) به‌دست آورد. برای مشخص کردن معیار باربرداری می‌توان از رابطه (۴) استفاده کرد:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma < 0 \quad (۴)$$

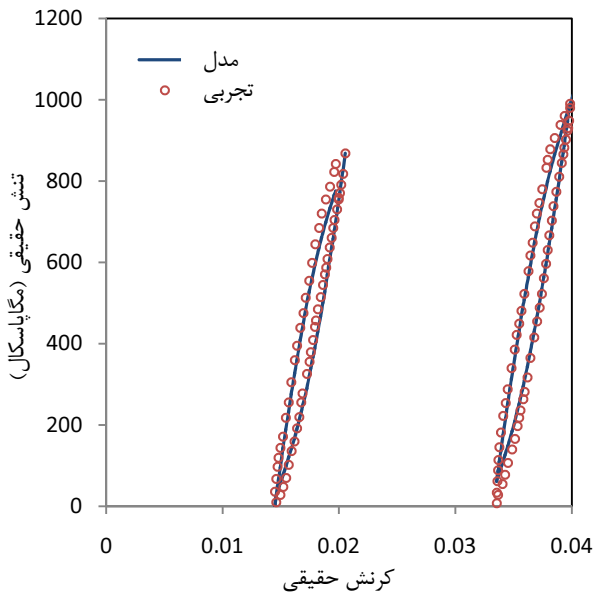
که در آن  $f$  نشان دهنده تابع تسلیم،  $\sigma$  تانسور تنش و عملگر ریاضی: ضرب نقطه‌ای دو تانسور است. با توجه به اینکه در رابطه (۱) کرنش کل معادل از لحظه شروع تغییر جهت بارگذاری محاسبه می‌شود، بنابراین با استفاده از معیار فوق می‌توان تغییر جهت بارگذاری را تشخیص داد و کرنش معادل  $\bar{\varepsilon}$  را در صورت تغییر جهت بارگذاری در رابطه ۱ به‌روزرسانی نمود.

حال با محاسبه مدول الاستیک متوسط در نمو زمانی فعلی، از رابطه ۲ تانسور الاستیسیته محاسبه می‌شود. با ضرب نمو کرنش در تانسور الاستیسیته مقدار نمو تنش به‌دست می‌آید. با جمع نمو تنش با تنش قبلی مقدار تنش فعلی به‌دست می‌آید. در صورتی که حالت تنش فعلی در منطقه الاستیک باشد، تنش محاسبه شده جواب مسأله می‌باشد و تنش بروز رسانی می‌شود. اما در صورتی که تنش معادل محاسبه شده از تنش تسلیم بیشتر باشد، می‌توان با استفاده از نگاشت برگشتی تنش آزاد شده در اثر تغییر شکل پلاستیک را محاسبه کرد و در نتیجه مقدار تنش فعلی را به‌دست آورد. ادامه این روند پیاده‌سازی کاملاً مشابه یک فرایند نگاشت برگشتی معمولی است که در اینجا برای تکمیل بحث به طور خلاصه آورده می‌شود.

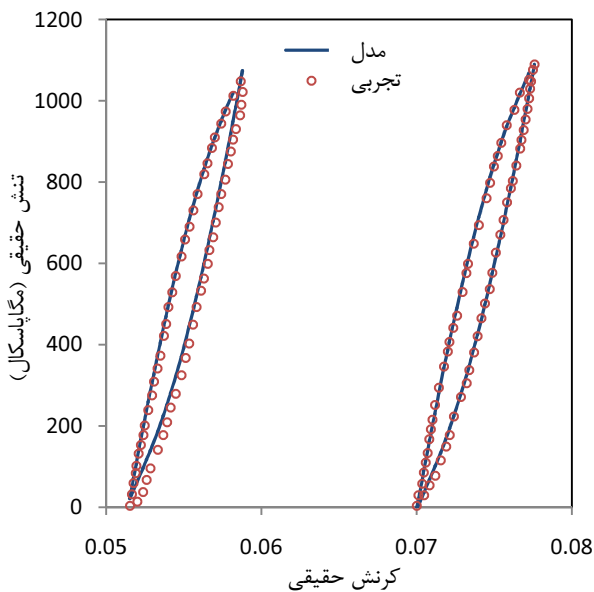
تابع تسلیم فون میسز به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود.

$$\sqrt{\frac{3}{2}} s : s - \sigma_y = \sigma_e - \sigma_y = 0 \quad (۵)$$

که در آن  $s$  بخش کاهنده تانسور تنش و  $\sigma_e$  تنش معادل است. با استفاده از قانون سیلان می‌توان نرخ کرنش پلاستیک را از



شکل ۳ مقایسه بین منحنی تنش-کرنش تجربی و پیش‌بینی شده توسط مدل برای فولاد دوفازی ۹۸۰



شکل ۴ مقایسه بین منحنی تنش-کرنش تجربی و پیش‌بینی شده توسط مدل برای فولاد دوفازی ۹۸۰

همان‌طور که شکل نشان می‌دهد منحنی تنش-کرنش محاسبه شده توسط مدل به صورت کاملاً غیرخطی بوده و با یک شیب زیاد شروع شده و به تدریج کاهش یافته تا بتواند رفتار تجربی را برای چرخه‌های مختلف تولید کند. انطباق تقریباً خوبی بین نتایج مدل و نتایج تجربی در چرخه‌های مختلف در شکل‌های ۳ و ۴ دیده می‌شود.

رافسون حل شده و در نتیجه تنش به دست می‌آید که تابع تسلیم را در انتهای نمو ارضا می‌کند. در پایان لازم به ذکر است جهت در نظر گرفتن کارسختی فقط لازم است تنش تسلیم بر حسب کرنش پلاستیک معادل تعریف شود. جهت این کار نرخ افزایش سطح تسلیم مطابق رابطه (۱۴) تعریف شده است:

$$\dot{r} = Q(b - r)\dot{p} \quad (14)$$

که در این رابطه  $r$  و  $\dot{r}$  به ترتیب میزان افزایش تنش تسلیم و نرخ آن می‌باشد. به عبارت دیگر مقدار تنش تسلیم فعلی از جمع تنش تسلیم اولیه  $\sigma_{y0}$  با  $r$  به دست می‌آید. همچنین  $Q$  و  $b$  دو ثابت ماده هستند.

#### ۴- نتایج

در مرحله اول برای پیدا کردن ثوابت ماده برای معادله ۱، منحنی تنش-کرنش در قسمت بارگذاری-باربرداری (فقط در محدوده الاستیک) برای فولاد دوفازی ۹۸۰ که در شکل ۲ نشان داده شده، در نظر گرفته شد. سپس در هر نمو کرنش تجربی، ابتدا مدول الاستیک متوسط محاسبه شده و پس از آن مقدار تنش و نمو آن در انتهای نمو محاسبه شد. این تنش محاسبه شده با مقدار تجربی آن در انتهای نمو مقایسه شده و تابع خطای زیر تعریف شد:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^m [(\sigma_i^{\text{exp}})^2 - (\sigma_i^{\text{pre}})^2]}{\sum_{i=1}^m [(\sigma_i^{\text{exp}})^2]} \quad (15)$$

که در این رابطه  $\delta$  مقدار خطا،  $\sigma_i^{\text{exp}}$  تنش تجربی در  $i$ -امین نقطه اندازه‌گیری شده،  $\sigma_i^{\text{pre}}$  مقدار تنش محاسبه شده در

$i$ امین نقطه است. سپس با استفاده از روش حداقل مربعات ثوابت  $E_0$ ،  $E_a$  و  $\xi$  طوری به دست آمد که مقدار خطای  $\delta$  کمینه شود. ضرایب به دست آمده در جدول ۱ داده شده است. همچنین مقایسه منحنی تنش-کرنش بین مقدار تجربی و پیش‌بینی شده در قسمت بارگذاری-باربرداری در منطقه الاستیک در شکل‌های ۳ و ۴ در کرنش‌های مختلف آورده شده است.

جدول ۱ ثوابت ماده برای فولاد دوفازی ۹۸۰

$E_0$ (GPa)	$E_a$ (GPa)	$\xi$	$\nu$	$\sigma_{y0}$ (MPa)	$Q$ (MPa)	$b$
۲۰۸	۱۲۰	۰/۷۴۳۳	۰/۳	۵۵۱	۵۴۹	۵۸

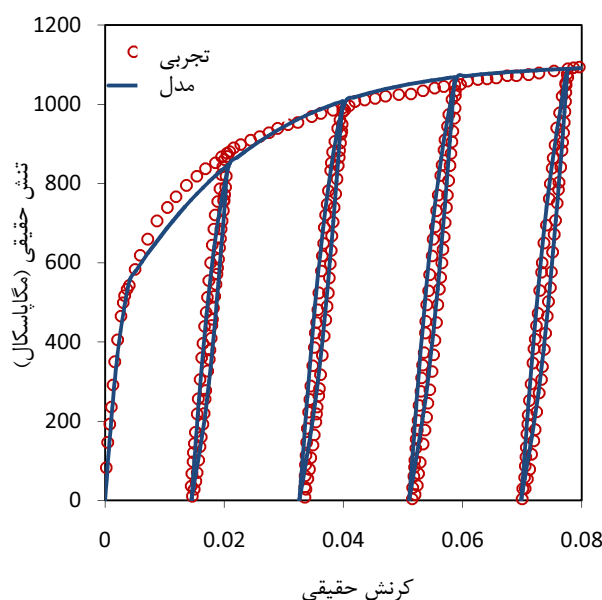
این پدیده یکی از موانع اصلی استفاده از ورق‌های پراستحکام مانند فولاد دوفازی ۹۸۰ در صنعت است، زیرا ساخت قطعات را با شکل مورد نظر بسیار مشکل می‌کند. یکی از مهمترین ابزارهایی که می‌تواند با هزینه کم برای پیش‌بینی مقدار بازگشت فنری و سپس رفع آن کمک نماید، شبیه‌سازی است. جهت انجام شبیه‌سازی بازگشت فنری استفاده از این مدل می‌تواند رفتار ماده هنگام باربرداری را نزدیک‌تر به واقعیت مدل کرده و در نتیجه دقت شبیه‌سازی را افزایش دهد. البته لازم به ذکر است که جهت پیش‌بینی بازگشت فنری ضروری است علاوه بر مدل‌سازی رفتار ماده هنگام باربرداری، رفتار ماده هنگام بارگذاری چرخه‌ای در منطقه پلاستیک نیز به درستی مدل شود زیرا معمولاً در مرحله شکل‌دهی نیز ورق هنگام سیلان روی شعاع قالب و پانچ تحت خم و واخم (بارگذاری چرخه‌ای) قرار می‌گیرد. برای این کار استفاده از مدل‌های سخت شونده‌تری پیچیده‌تر از قانون سخت شونده‌ی ایزوتروپیک مورد نیاز است تا پدیده‌های چرخه‌ای دیگر نیز هنگام تغییرشکل پلاستیک مدل شوند.

در پایان لازم به ذکر است که مدل سان و واگنر نیز توانایی توصیف این رفتار غیرخطی باربرداری را برای فولاد دوفازی ۹۸۰ داشته و همان‌طور که در مرجع [۱۴] نشان داده شده به خوبی در این چهار چرخه بارگذاری-باربرداری، رفتار فولاد دوفازی ۹۸۰ را مدل کرده است. ولی همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد، این مدل بسیار پیچیده‌تر از مدل پیشنهادی در این مقاله بوده و حجم محاسبات بسیار بیشتری دارد. در واقع اصلی‌ترین مزیت مدل پیشنهادی این است که در عین سادگی می‌تواند رفتار غیرخطی باربرداری-بارگذاری مجدد ماده را توصیف نماید.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل هایپوالاستیک برای توصیف رفتار غیرخطی ماده در منطقه الاستیک طی بارگذاری-باربرداری مجدد پیشنهاد شد. در این مدل با تغییر شکل الاستیک، مدول الاستیک تغییر می‌کند تا بتواند رفتار ماده را در مدل‌ها در نظر بگیرد. به عنوان یک مثال، مدل پیشنهادی با یک مدل ساده پلاستیسیته شامل سطح تسلیم فون-میسز و قانون سخت شونده‌ی ایزوتروپیک در نظر گرفته شد و در قالب یک زیر روال

با به‌دست آمدن ضرایب مربوط به بخش الاستیک در معادله ۱، منحنی در بخش پلاستیک نیز در نظر گرفته شده و دوباره با استفاده از روش حداقل مربعات ثابت ماده برای بخش پلاستیک نیز به‌دست آمد که در جدول ۱ داده شده است. شکل ۵ منحنی تنش-کرنش تجربی را با منحنی به‌دست آمده از نرم‌افزار آباکوس که با استفاده از مدل ماده محاسبه شده را مقایسه می‌کند. این شکل نشان می‌دهد این مدل با وجود سادگی می‌تواند رفتار غیرخطی ماده هنگام باربرداری-بارگذاری مجدد به خوبی توصیف نماید. پر واضح است که در مواردی که مدل کردن رفتار ماده هنگام باربرداری مهم است، استفاده از آن می‌تواند باعث بهبود نتایج در شبیه‌سازی شود. یکی از مهم‌ترین این موارد که در صنعت اهمیت زیادی دارد، مسأله بازگشت فنری است. در فرایندهای شکل‌دهی ورق‌های فلزی پس از شکل دادن قطعه در قالب، قطعه از قالب بیرون آورده می‌شود و در نتیجه با از بین رفتن نیروهای خارجی (قالب)، باربرداری صورت گرفته و تنش‌های داخلی آزاد می‌شود. با توجه به اینکه در ورق ضخامت ناچیز است، این باربرداری ممکن است باعث تغییرشکل زیادی شده و قطعه را از شکل خود خارج کند. به این تغییرشکل هنگام خروج قطعه از قالب بازگشت فنری گفته می‌شود.



شکل ۵ مقایسه بین منحنی تنش-کرنش تجربی و پیش‌بینی شده توسط مدل ماده برای فولاد دوفازی ۹۸۰

- برای نرم‌افزار تجاری آباکوس پیاده‌سازی شد. ثوابت مدل پیشنهادی برای فولاد دوفازی ۹۸۰ با استفاده از روش حداقل مربعات شناسایی شد. با انجام شبیه‌سازی بارگذاری-باربرداری تک محوری طی چهار مرحله در نرم‌افزار آباکوس منحنی تنش-کرنش پیش‌بینی شد و با نتایج تجربی مقایسه شد. نتایج مقایسه نشان داد که مدل قادر است تا رفتار ماده را با تقریب خوبی توصیف نماید.
- ۶- مراجع**
- [6] Levy B.S., Van Tyne C.J., Moon Y.H., Mikalsen C., "The Effective Unloading Modulus for Automotive Sheet Steels", *SAE Technical Paper Series 2006-01-0146*, 2006.
- [7] Yang M., Akiyama Y., Sasaki T., "Evaluation of Change in Material Properties due to Plastic Deformation", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 151, No. 3, 2004, pp. 232-236.
- [8] Morestin F., Boivin M., "On the Necessity of Taking into Account the Variation in the Young Modulus with Plastic Strain in Elastic-Plastic Software", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 162, No. 1, 1996, pp. 107-116.
- [9] Fei D.Y., Hodgson P., "Experimental and Numerical Studies of Springback in Air V-Bending Process for Cold Rolled TRIP Steels", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 236, No. 18, 2006, pp. 1847-1851.
- [10] Ghaei A., Taherizadeh A., Green D.E., "The Effect of Hardening Model on Springback Prediction for a Channel Draw Process", *In Proc. of Numisheet 2008*, Interlaken, Switzerland, 2008, pp. 485-488.
- [11] Zang S.L., Liang J., Guo C., "A Constitutive Model for Spring-back Prediction in which the Change of Young's Modulus with Plastic Deformation Is Considered", *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 47, No. 11, 2007, pp. 1791-1797.
- [12] Kubli W., Krasovskyy A., Sester M., "Advanced Modeling of Reverse Loading Effects for Sheet Metal Forming Processes", *In Proc. of Numisheet 2008*, Interlaken, Switzerland, pp. 479-484.
- [13] Ghaei A., "Numerical Simulation of Springback Using an Extended Return Mapping Algorithm Considering Strain Dependency of Elastic Modulus", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 65, No. 1, 2012, pp. 38-47
- [14] Sun L., Wagoner R.H., "Complex Unloading Behavior: Nature of the Deformation and Its Consistent Constitutive Representation", *International Journal of Plasticity*, Vol. 27, No. 7, 2011, pp. 1126-1144.
- [1] Kuwabara T., Morita Y., Miyashita Y., Takahashi S., "Elastic-Plastic Behaviour of Sheet Metal Subjected to in-Plane Reverse Loading", *In Proc. of Plasticity'95-Dynamic Plasticity and Structural Behaviour*, Gordon and Breach, London, 1995, pp. 841-844.
- [2] Boger R.K., Wagoner R.H., Barlat F., Lee M.G., Chung K., "Continuous, Large Strain, Tension/Compression Testing of Sheet Material", *International Journal of Plasticity*, Vol. 21, No. 12, 2005, pp. 2319-2343.
- [3] Yoshida F., Uemori T., Fujiwara K., "Elastic-Plastic Behaviour of Steel Sheets Under in-Plane Cyclic Tension-Compression at Large Strain", *International Journal of Plasticity*, Vol. 18, No. 5-6, 2002, pp. 633-659.
- [4] Luo L., Ghosh A., "Elastic and Inelastic Recovery after Plastic Deformation of DQSK Steel Sheet", *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, Vol. 125, 2003, pp. 237-246.
- [5] Benito J.A., Jorba J., Manero J.M., Roca A., "Change of Young's Modulus of Cold-Deformed Pure Iron in a Tensile Test", *Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science*, Vol. 36, 2005, pp. 3317-3324.