



## تحلیل آستانه تسلیم دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از معیار تسلیم ترسکا

سید محمد زمانی نژاد<sup>۱\*</sup>، عباس راستگو<sup>۲</sup>، سید امین هادی<sup>۳</sup>

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج

۲- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* یاسوج، صندوق پستی ۷۵۹۱۴-۳۵۳، m\_zamani@yu.ac.ir

### چکیده

این مقاله یک تحلیل پارامتری الاستیک برای بررسی سرعت حد دورانی، جابجایی و تنش‌ها در دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی (FGMs) براساس معیار تسلیم ترسکا ارائه می‌دهد. خواص ماده به صورت تابع توانی در جهت شعاعی تغییر می‌کند. ضریب پواسون به دلیل تغییرات ناچیز در مواد مهندسی ثابت در نظر گرفته شده است. برای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، سرعت حد دورانی، جابجایی و تنش‌ها در راستای جهت شعاعی رسم شده و حالت‌های مختلف برای شروع جریان پلاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. تا جایی که مشاهده گردیده است در مقالاتی که به بررسی شروع تسلیم پرداخته‌اند چگالی و تنش تسلیم ثابت فرض شده است حال آنکه در این مقاله، با متغیر فرض کردن چگالی و تنش تسلیم در دیسک دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی، و مقایسه نتایج با حالت ثابت فرض کردن این پارامترها، مشاهده گردیده است که فرض ثابت بودن چگالی اشتباه بوده و متغیر فرض کردن آن اثر قابل توجهی روی تنش‌ها دارد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۲ بهمن ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۸ اسفند ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۲۶ شهریور ۱۳۹۳

کلید واژگان:

دیسک دوار

مواد مدرج تابعی

تحلیل آستانه تسلیم

معیار ترسکا

## Onset yield analysis of rotating disks made of functionally graded materials using Tresca yield criterion

Seyed Mohammad Zamani Nejad<sup>1\*</sup>, Abbas Rastgoo<sup>2</sup>, Amin Hadi<sup>3</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Yasouj Univ., Yasouj, Iran.

2- Department of Mechanical Engineering, Tehran Univ., Tehran, Iran.

3- Department of Mechanical Engineering, Tehran Univ., Tehran, Iran.

\* P.O.B. 75914-353, Yasouj, Iran, m\_zamani@yu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 February 2014  
Accepted 09 March 2014  
Available Online 17 September 2014

#### Keywords:

Rotating disk  
Functionally Graded Materials (FGMs)  
Onset Yield Analysis  
Tresca Criterion

### ABSTRACT

This paper presents an elastic parametric analysis for the purpose of investigating the limit angular speed, displacement and stresses in rotating disks made of functionally graded materials (FGMs) based on Tresca yield criterion. The material properties obey the power law in radial direction. The Poisson's ratio due to slight variations in engineering materials is assumed constant. For different values of inhomogeneity constant, limit angular speed, displacement and stresses in radial direction are plotted and for the commencement of the plastic flow, different states are investigated. To the best of the researchers' knowledge, so far, in the papers which have been dealing with the investigation of onset yield analysis, the density and yield stress has been assumed constant; however, in this paper by assuming varying density and yield stress in rotating disks made of functionally graded materials and comparing results obtained by fixing these parameters, it has been observed that taking the density as a constant value is wrong and varying it has significant effects on the stresses.

### ۱- مقدمه

پیشرفته امروزه، مواد همگن و همسانگرد که دارای یکنواختی خواص بوده و باعث ایجاد محدودیت‌هایی در تولید محصولات با کیفیت می‌شود، چندان مورد توجه قرار نمی‌گیرند و دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه ۱۹۴۰ و آغاز دهه ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده ناهمسان‌باز بوجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها

بررسی تحلیلی تنش و کرنش دیسک‌های دوار به دلیل کاربردهای زیاد از جمله در طراحی روتور توربین، فلاپویل، پمپ‌های گریز از مرکز و غیره در مهندسی مکانیک بسیار مهم می‌باشد. در صنایع نظامی، هوا و فضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... موادی که دارای مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... هستند، مورد توجه قرار می‌گیرند. از این جهت در دهه‌های اخیر و همچنین در صنایع

تابعی در نظر گرفته شده است. یو و زانگ [18] حل الاستوپلاستیک دیسک توپر دوار ساخته شده از مواد همگن را ارائه کردند. این حل براساس معیار ون مایز استوار است. یو و همکاران [19] یک حل عددی برای دیسک دوار با ضخامت متغییر و چگالی متغییر با سختی غیر خطی ارائه دادند. در این مقاله تنها چگالی دیسک به صورت تابعی توانی در جهت شعاعی تغییر می‌کند و سایر پارامترهای ماده، ثابت در نظر گرفته شده است. معادله حاکم بر این مسئله به روش رانگ کوتا حل شده است. ارسالان [20] یک تحلیل الاستوپلاستیک دیسک دوار همگن با ضخامت متغیر با شرایط مرزی آزاد را ارائه نمود. این حل براساس معیار ترسکا استوار است. حق پناه جهرمی و همکاران [21] یک حل عددی برای تحلیل الاستو-پلاستیک دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی با سختی خطی ارائه دادند.

در این پژوهش به بررسی توزیع تنش در دیسک تو خالی ساخته شده از ماده مدرج تابعی با تاکید بر شروع تسلیم ماده پرداخته شده و یک مدل تنش صفحه‌ای برای رسیدن به این هدف در نظر گرفته شده است. معیار تسلیم ترسکا برای نظارت بر شروع تغییر شکل پلاستیک مورد استفاده قرار گرفته و شرایط لازم برای شروع جریان پلاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. تغییرات مدول الاستیسیته، تنش تسلیم و چگالی به صورت تابعی توانی در نظر گرفته شده و در پایان تاثیر تغییر چگالی و تنش تسلیم در دیسک با حالت ثابت فرض کردن این پارامترها مقایسه می‌شود.

## 2- فرمول بندی

یک دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی (FGMs) به شعاع داخلی  $a$  و شعاع خارجی  $b$  که با سرعت زاویه ای  $\omega$  در حال دوران است در شکل 1 نشان داده شده است. مدول الاستیسیته  $E$ ، چگالی  $\rho$  و تنش تسلیم  $Y$  به صورت تابعی توانی و بر حسب مختصه شعاعی  $\bar{r} = \frac{r}{b}$  به ترتیب به شکل روابط (1) تا (3) تعریف می‌شوند:

$$E = E_0 (\bar{r})^{n_1} \quad (1)$$

$$\rho = \rho_0 (\bar{r})^{n_2} \quad (2)$$

$$Y = Y_0 (\bar{r})^{n_3} \quad (3)$$

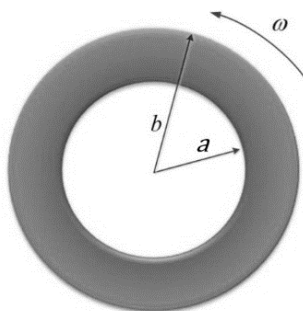
که در آن  $E_0$ ،  $\rho_0$ ،  $Y_0$  مقادیر  $E$ ،  $\rho$  و  $Y$  در شعاع خارجی می‌باشند.  $n_1$ ،  $n_2$  و  $n_3$  پارامترهای ماده می‌باشند و به صورت روابط (4) تا (6) تعریف می‌شوند.

$$n_1 = \beta_1 n \quad (4)$$

$$n_2 = \beta_2 n \quad (5)$$

$$n_3 = \beta_3 n \quad (6)$$

در روابط (4) تا (6)،  $\beta_1$ ،  $\beta_2$  و  $\beta_3$  مقادیری ثابت می‌باشند.



شکل 1 هندسه دیسک دوار تو خالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی

در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. تغییر ناگهانی خواص در لایه های مواد مرکب، که موجب پارگی آنها در مرز لایه‌ها می‌گردد، از اشکالات عمده آنهاست. لذا ایده تولید مواد مدرج تابعی، که دارای تغییرات تدریجی و پیوسته خواص می‌باشند پی‌ریزی شد. در این مواد به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. مواد مدرج تابعی که با مخلوط کردن دو یا چند ماده مختلف ساخته می‌شوند ناهمگن هستند، اما آنها را همسانگرد در نظر می‌گیرند. ایده تولید این مواد که به عنوان مواد کامپوزیتی پیشرفته مطرح هستند، برای نخستین بار در سال 1984 توسط یامانوچی و همکاران و کویزومی [1]، در ژاپن ارائه گردید.

برای نخستین بار لامه [2] یک حل دقیق برای توزیع تنش و جابجایی در استوانه‌های جداره ضخیم متقارن محوری در حالت کرنش صفحه‌ای و دیسک تحت شرایط تنش صفحه‌ای ساخته شده از ماده همگن را بدست آورد. فوکویی و یاماناکا [3] به کمک معادله‌های لامه، روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم مدرج تابعی تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای استخراج و این معادلات را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند. هورگان و چان [4] تنش‌های حاکم بر دیسک‌های دوار مواد مدرج تابعی را در حالت تنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به کمک معادله‌های لامه بدست آوردند. ارسالان و آرگسو [5] شروع تسلیم در دیسک‌های با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد همگن را مطالعه کردند. آکیز و ارسالان [6] آستانه تسلیم محور تو خالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی در حالت کرنش صفحه‌ای با تغییر خواص توانی را بررسی کردند. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که حالت‌های متفاوتی برای شروع تسلیم با توجه به معیار ترسکا وجود دارد. ارسالان و آکیز [7] حل الاستیک دیسک و محور توپر دوار را در حالت‌های تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای با خواص پیوسته مکانیکی به صورت تابعی نمایی و سهمی بررسی کردند. همچنین این نویسندگان [8] تحلیل الاستوپلاستیک محور دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی را ارائه کردند. در این مقاله تنها تغییرات مدول الاستیسیته به صورت تابعی در نظر گرفته شده و از تغییرات چگالی و تنش تسلیم صرف‌نظر شده است. رحیمی و همکاران [9] حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی را بر مبنای نظریه الاستیسیته مستوی در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه بسته ارائه کرده‌اند. قناد و همکاران [10] حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی را ارائه دادند. بهمویک و همکاران [11] یک راه حل تقریبی برای سرعت حد دورانی در دیسک‌های دوار تحت بارگذاری خارجی را بررسی کردند. در این مقاله معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم، با استفاده از روش گالرکین حل شده است. زمانی نژاد و همکاران [12] یک حل سه بعدی برای پوسته جداره ضخیم دورانی با انحنا اختیاری و ضخامت متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی را در مختصات استوانه‌ای ارائه دادند. توتنچی و تمل [13] یک حل جدید برای تحلیل تنش سیلندر، دیسک و کره تحت فشار ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه کردند. زمانی نژاد و رحیمی [14] یک حل الاستیک برای استوانه دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی در سه حالت تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و سیلندر با انتهای بسته ارائه دادند. یو و همکاران [15] جابجایی و تنش در دیسک تو خالی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت فشار را بررسی کردند. کالیگلو و همکاران [16] یک حل تحلیلی برای دیسک دوار ساخته از مواد مدرج تابعی ارائه داده و نتایج را با روش اجزای محدود مقایسه کردند. پنگ و لی [17] به بررسی یک دیسک سه لایه پرداختند که دو لایه بیرونی دیسک به صورت همگن و لایه میانی، مدرج

$$\left[ \sigma_r \quad \sigma_\theta \right] = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ C_1 r^{m_1-1} \quad C_2 r^{m_2-1} \quad C_3 r^{m_3-1} \right] \times \begin{bmatrix} J_1 & J_4 \\ J_2 & J_5 \\ J_3 & J_6 \end{bmatrix} \quad (19)$$

که در آن طبق رابطه (20):

$$\begin{cases} J_i = m_i + \nu & i = 1, 2, 3 \\ J_{i+3} = m_i \nu + 1 & i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (20)$$

با استفاده از شرایط مرزی،  $\sigma_r(r=b)=0$  و  $\sigma_r(r=a)=0$ ، ثابتهای  $C_1$  و  $C_2$  به دست می‌آیند. طبق روابط (21) و (22) داریم:

$$C_1 = -\frac{(a^{m_2} b^{m_3} - a^{m_3} b^{m_2}) C_3 J_3}{(a^{m_2} b^{m_1} - a^{m_1} b^{m_2}) J_1} \quad (21)$$

$$C_2 = -\frac{(a^{m_3} b^{m_1} - a^{m_1} b^{m_3}) C_3 J_3}{(a^{m_2} b^{m_1} - a^{m_1} b^{m_2}) J_2} \quad (22)$$

### 2-1-1- آستانه تسلیم

برای نظارت بر شروع جریان پلاستیک، از یک متغیر بی‌بعد  $\phi$  که براساس معیار ترسکا استوار است، استفاده می‌شود. این متغیر به شکل رابطه (23) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \phi(\bar{r}) = \bar{r}^{-n_3} \text{MAX} \{ (\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r), (\bar{\sigma}_\theta), (\bar{\sigma}_r) \} \\ \bar{\sigma}_j = \frac{\sigma_j}{Y_0}, \quad j = r, \theta \end{cases} \quad (23)$$

با توجه به معیار بالا جریان پلاستیک از نقطه ای شروع می‌شود که  $\phi=1$  بوده و بیشترین مقدار  $\phi$  در این بازه متعلق به این نقطه باشد. همانطور در ابتدای مقاله ذکر گردید چهار حالت متفاوت برای شروع جریان پلاستیک وجود دارد.

#### 2-1-1-1- حالت اول: شروع جریان پلاستیک از شعاع داخلی

با توجه به شرایط گفته شده در بالا، برای این حالت باید  $\phi(\bar{a})=1$  بوده و ماکزیمم مطلق  $\phi(\bar{r})$  در بازه  $\bar{a} \leq \bar{r} \leq 1$  مربوط به نقطه  $\bar{r}=\bar{a}$  باشد که  $\bar{a} = \frac{a}{b}$  است. با استفاده از روابط (19)،  $(\phi(\bar{a})=1)$  و (23) و با توجه به اینکه در شعاع داخلی صفر می‌باشد، سرعت حد دورانی بی‌بعد  $\Omega_e = \omega_e b \left( \frac{\rho_0}{Y_0} \right)^{0.5}$ ، برای شروع تسلیم به شکل رابطه (24) محاسبه می‌شود:

$$\Omega_{e1} = \left\{ F^{-1} \left( \bar{a}^{1-n_1+n_3} \left( \bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_2} \right) J_1 J_2 \left( 1-\nu^2 \right) \right) \times \left[ \bar{a}^{m_1} \left( \bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_2} \right) J_2 J_3 J_4 + \bar{a}^{m_2} \left( \bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_3} \right) J_1 J_3 J_5 + \bar{a}^{m_3} \left( \bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1} \right) J_1 J_2 J_6 \right]^{-1} \right\}^{0.5} \quad (24)$$

#### 2-1-1-2- حالت دوم: شروع جریان پلاستیک از شعاع خارجی

برای این حالت باید  $\phi(1)=1$  بوده و ماکزیمم مطلق  $\phi(\bar{r})$  در بازه  $\bar{a} \leq \bar{r} \leq 1$  مربوط به نقطه  $\bar{r}=1$  می‌باشد. با استفاده از روابط (19)،  $(\phi(1)=1)$  و (23) و با توجه به اینکه در شعاع خارجی صفر می‌باشد، سرعت حد دورانی بی‌بعد  $\Omega_e = \omega_e b \left( \frac{\rho_0}{Y_0} \right)^{0.5}$ ، برای شروع تسلیم به شکل

برای دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی، بسته به خواص تعریف شده ممکن است تسلیم از شعاع داخلی، شعاع خارجی، همزمان از شعاع داخلی و خارج و یا حد فاصل شعاع داخلی و خارج شروع شود. لذا برای شروع تسلیم، هر چهار حالت مذکور در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته و مقادیر  $n$  و سرعت دورانی متناظر با این حالات به دست آمده است. در این مقاله از مختصات استوانه ای  $(r, \theta, z)$  و از علایم به کار برده شده توسط تیموشینکو و گودیر [22] استفاده شده است.

معادله تعادل تنش در مختصات مذکور در غیاب نیروهای حجمی به شکل رابطه (7) می‌باشد:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho r \omega^2 \quad (7)$$

که  $\sigma_\theta$  و  $\sigma_r$  مولفه های تنش شعاعی و محیطی می‌باشند. مولفه های کرنش شعاعی  $\varepsilon_r$  و محیطی  $\varepsilon_\theta$  بر حسب جابجایی شعاعی  $u$  در حالت متقارن به شکل روابط (8) و (9) می‌باشد:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (8)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (9)$$

برای حالت الاستیک رابطه بین کرنش و تنش توسط قانون هوک برای حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (10) است:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \frac{E(r)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

که  $\nu$  نسبت پواسون می‌باشد و با توجه به تغییرات ناچیز، مقدار آن ثابت در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از ترکیب روابط (7) تا (10) معادله ناوبر حاکم بر مسئله به شکل رابطه (11) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + (1+n_1) r \frac{du}{dr} + (\nu n_1 - 1) u \\ = -\frac{\rho_0}{E_0} b^{n_1-n_2} (1-\nu^2) \omega^2 r^{n_2-n_1+3} \end{aligned} \quad (11)$$

که دارای پاسخ کلی به شکل رابطه (12) است:

$$u = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} + C_3 r^{m_3} \quad (12)$$

که  $C_1$  و  $C_2$  ثابت‌های معادله دیفرانسیل بوده و سایر ثابت‌ها به صورت زیر می‌باشد. طبق روابط (13) تا (16) داریم:

$$m_1 = -\left( \frac{n_1 + Z}{2} \right) \quad (13)$$

$$m_2 = -\left( \frac{n_1 - Z}{2} \right) \quad (14)$$

$$m_3 = n_2 - n_1 + 3 \quad (15)$$

$$C_3 = -\frac{\rho_0}{E_0} b^{n_1-n_2} F \omega^2 \quad (16)$$

و طبق روابط (17) و (18):

$$Z = (n_1^2 - 4\nu n_1 + 4)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

$$F = \frac{1-\nu^2}{n_1(\nu-3-n_2) + n_2(n_2+6) + 8} \quad (18)$$

در نتیجه مولفه‌های تنش با استفاده از روابط کرنش تغییر مکان و قانون هوک به شکل رابطه (19) به دست می‌آیند:

رابطه (25) محاسبه می شود:

$$\Omega_{e2} = \left\{ F^{-1} (\bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_2}) J_1 J_2 (1 - \nu^2) \times \left[ (\bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_2}) J_2 J_3 J_4 + (\bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_3}) J_1 J_3 J_5 + (\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1}) J_1 J_2 J_6 \right]^{-1} \right\}^{0.5} \quad (25)$$

3-1-2- حالت سوم: شروع همزمان جریان پلاستیک از شعاع داخل و خارج برای این حالت باید به طور همزمان  $\phi(\bar{a})=1$  و  $\phi(1)=1$  بوده و ماکزیمم مطلق  $\phi(\bar{r})$  در بازه  $\bar{a} \leq \bar{r} \leq 1$  مربوط به نقاط  $\bar{r}=\bar{a}$  و  $\bar{r}=1$  باشد. با استفاده از روابط (19)،  $\phi(\bar{a})=1$  و  $\phi(1)=1$  و (23) و با توجه به اینکه  $\sigma_r$  در شعاع داخل و خارج صفر می باشد. سرعت حد دورانی بی بعد بحرانی  $\Omega_{cr}$  و پارامتر بحرانی ماده،  $n_{cr}$ ، برای شروع تسلیم از حل همزمان سیستم معادله (26) به دست می آیند:

$$\Omega_e - \left\{ F^{-1} (\bar{a}^{1-n_1+n_3} (\bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_2}) J_1 J_2 (1 - \nu^2) \right\} \times \left[ \bar{a}^{m_1} (\bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_2}) J_2 J_3 J_4 + \bar{a}^{m_2} (\bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_3}) J_1 J_3 J_5 + \bar{a}^{m_3} (\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1}) J_1 J_2 J_6 \right]^{-1} \right\}^{0.5} = 0$$

$$\Omega_e - \left\{ F^{-1} (\bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_2}) J_1 J_2 (1 - \nu^2) \right\} \times \left[ (\bar{a}^{m_3} - \bar{a}^{m_2}) J_2 J_3 J_4 + (\bar{a}^{m_1} - \bar{a}^{m_3}) J_1 J_3 J_5 + (\bar{a}^{m_2} - \bar{a}^{m_1}) J_1 J_2 J_6 \right]^{-1} \right\}^{0.5} = 0 \quad (26)$$

در صورتی همزمان از شعاع داخل و خارج تسلیم شروع می شود که تحت  $n_{cr}$  و  $\Omega_{cr}$ ، متغیر  $\phi(\bar{r})$  در شعاع داخل و خارج بیشترین مقدار خود را دارا باشد.

4-1-2- حالت چهارم: شروع جریان پلاستیک از شعاعی بین شعاع داخل و خارج

در این حالت برای محاسبه مکان شروع تسلیم  $\bar{r}_{ep}$  و سرعت حد دورانی بی بعد برای یک  $n$  دلخواه،  $\phi(\bar{r}_{ep})$  در نقطه شروع تسلیم باید برابر یک بوده و در این نقطه ماکزیمم مطلق باشد. بنابراین شرایط رابطه (27) باید بطور همزمان برقرار شود:

$$\begin{cases} \phi(r_{ep}) = 1 \\ \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=r_{ep}} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

این چهار حالت نشان می دهد که برخلاف دیسک‌های ساخته شده از مواد همگن که از شعاع داخل شروع به تسلیم کرده در دیسک‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی حالت‌های متفاوتی برای شروع تسلیم وجود دارد. و می توان نقطه شروع جریان پلاستیک را کنترل نمود.

### 3- نتایج و بحث

برای ارائه نتایج عددی یک دیسک تو خالی با شعاع داخلی بی بعد  $\bar{a}=0.5$  ساخته شده از ماده مدرج تابعی با ثابتهای  $\beta_1=\beta_2=2\beta_3=2$  و نسبت

یواسون برابر با 0.3 در نظر گرفته شده است.

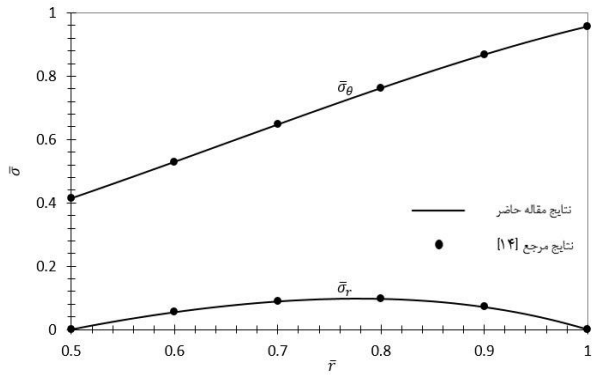
سرعت لازم برای شروع تسلیم در دیسک‌های همگن در شکل 2 نشان داده شده است. همچنین نتایج این تحقیق با مرجع [5] در حالت ثابت فرض کردن ضخامت مقایسه شده است که تطابق خوبی بین نتایج وجود دارد که نشان دهنده صحت نتایج می باشد. تغییرات سرعت حد بحرانی بی بعد  $\Omega_e$  بر حسب  $n$  در شکل 3 نمایش داده شده است. همانطور که در شکل مشاهده می شود در  $n < n_{cr}$  مقدار سرعت حد دورانی بی بعد برای شروع جریان پلاستیک از شعاع داخل کمتر از شعاع خارج  $(\Omega_{e1} < \Omega_{e2})$  می باشد، پس برای  $n < n_{cr}$  شروع جریان پلاستیک از شعاع داخل می باشد و برای  $n > n_{cr}$  شروع جریان پلاستیک از شعاع خارج می باشد. برای  $n = n_{cr}$  شروع جریان پلاستیک ممکن است همزمان از شعاع داخل و خارج شروع شود یا از حد فاصل شعاع داخل و خارج شروع می شود. پارامتر بحرانی ماده  $n_{cr} = 1.2109$  و سرعت حد دورانی بی بعد  $\Omega_{cr} = 1.4236$  برای  $\bar{a} = 0.5$  از حل همزمان سیستم معادله (26) محاسبه می شود.

برای  $n = n_{cr}$  و  $\Omega = \Omega_{cr}$  تغییرات متغیر  $\phi$  بر حسب شعاع بی بعد  $\bar{r}$  در شکل 4 نمایش داده شده است، همان طور که از این شکل مشاهده می شود در شعاع داخل و خارج،  $\phi$  برابر یک می باشد، اما ماکزیمم نمی باشد این نشان می دهد که پوسته از حد فاصل شعاع داخل و خارج شروع به پلاستیک شدن می کند.

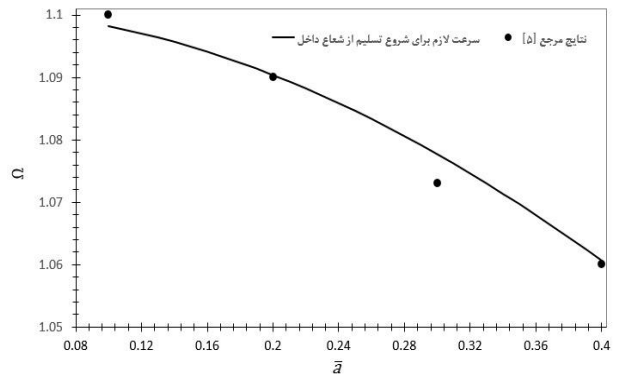
شکل شماره 5، تغییرات  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  را برای  $n = n_{cr}$  و  $\Omega_{cr} < \Omega = 1.39308$  نشان می دهد، در این شکل در  $\bar{r}_{ep} = 0.7661$  دیسک شروع به تسلیم می کند. برای حالت مذکور تنش بی بعد بر حسب شعاع بی بعد  $\bar{r}$  در شکل 6 نمایش داده شده است. در این حالت وضعیت تنش به صورت  $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_\theta > 0$  بوده و تنش محیطی روند افزایشی دارد. در ضمن در این نمودار نتایج با نتایج مرجع [14] مقایسه شده که اطمینان از درستی نتایج می باشد.

شکل شماره 7 تغییرات تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$ ، تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$  و  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  برای  $n_{cr} < n = 0.7424$  و سرعت حد متناظر (با توجه به رابطه (24))  $\Omega_{e1} = 1.27165$  را نشان می دهد. با توجه به اینکه در شعاع داخل  $\phi = 1$  و در این نقطه ماکزیمم نیز می باشد، نقطه شروع تسلیم شعاع داخل می باشد، همچنین تنش محیطی با افزایش شعاع بی بعد کاهش می یابد. در این شکل نیز نتایج با نتایج مرجع [14] مقایسه شده است.

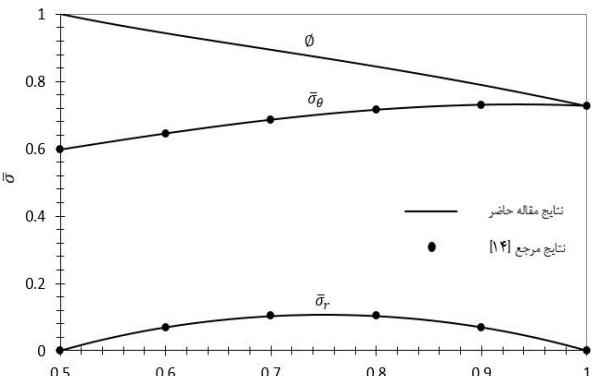
شکل شماره 8 تغییرات  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  برای  $n_{cr} < n = 1.1$  و سرعت حد متناظر (با توجه به رابطه (24))  $\Omega_{e1} = 1.3854$  را نشان می دهد. با توجه به اینکه در شعاع داخل  $\phi = 1$  می باشد اما این نقطه ماکزیمم نیست پس شعاع داخل، نقطه شروع جریان پلاستیک نیست و در حد فاصل شعاع داخل و خارج جریان پلاستیک شروع می شود. حال با استفاده از رابطه (27) برای  $n_{cr} < n = 1.1$  نقطه شروع تسلیم در  $\bar{r}_{ep} = 0.6376$  و سرعت متناظر برای شروع جریان پلاستیک در این نقطه  $\Omega_{cr} < \Omega = 1.3812$  می باشد. تغییرات  $\phi$  بر حسب شعاع بی بعد  $\bar{r}$  برای حالت ذکر شده، در شکل 9 نشان داده شده است.



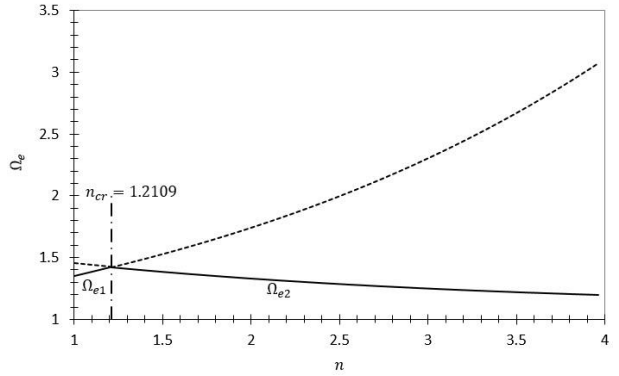
شکل 6 تغییرات تنش بر حسب  $\bar{r}$  را برای  $n = n_{cr}$  و  $\Omega = 1.39308 < \Omega_{cr}$  و مقایسه با نتایج مرجع [14]



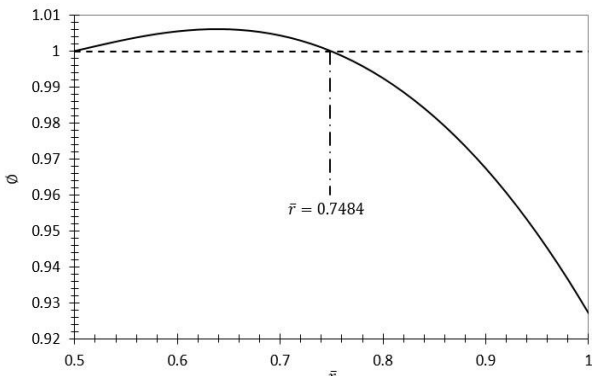
شکل 7 تغییرات سرعت حد بحرانی بی بعد  $\Omega$  بر حسب  $\bar{r}$  برای دیسک همگن و مقایسه با نتایج مرجع [5]



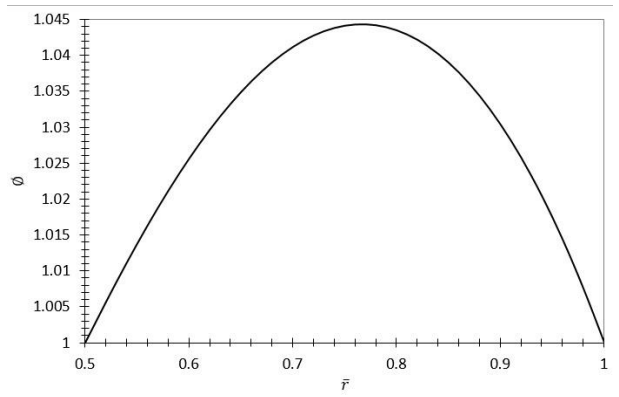
شکل 8 تغییرات تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$ ، تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$  و  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  برای  $n = 0.7424 < n_{cr}$  و  $\Omega_{e1} = 1.27165$  و مقایسه با نتایج مرجع [14]



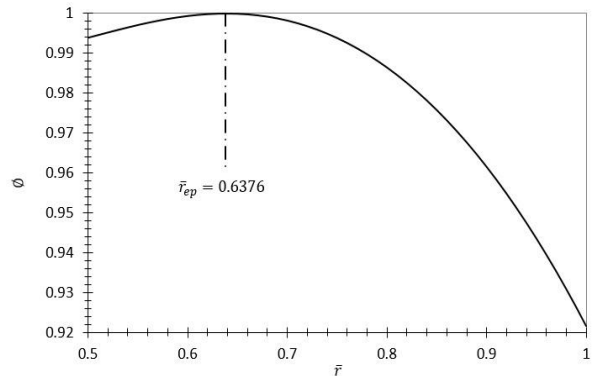
شکل 9 تغییرات سرعت حد بحرانی بی بعد  $\Omega_e$  بر حسب  $n$  برای  $\bar{a} = 0.5$  و ثابتهای  $\beta_1 = \beta_2 = 2\beta_3 = 2$



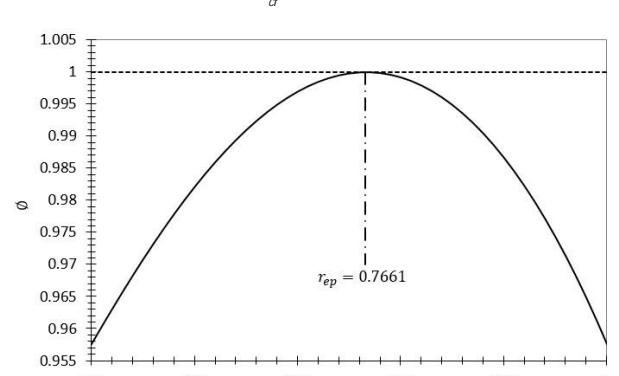
شکل 10 تغییرات  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  برای  $n = 1.1 < n_{cr}$  و  $\Omega_{e1} = 1.3854$



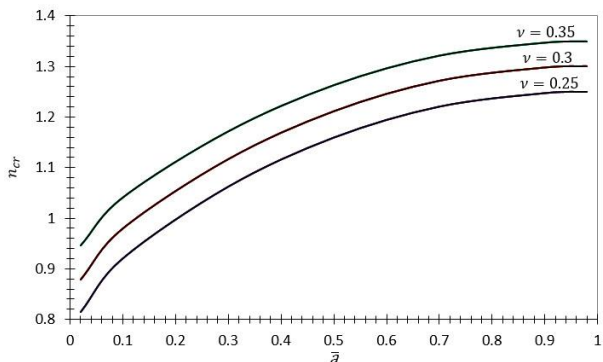
شکل 11 تغییرات متغیر  $\phi$  بر حسب شعاع بی بعد  $\bar{r}$  برای  $n_{cr} = 1.2109$  و  $\Omega_{cr} = 1.4236$



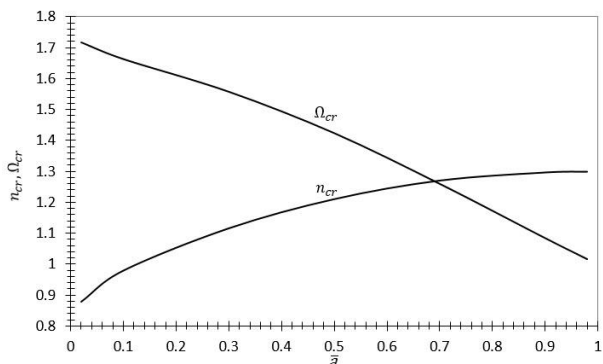
شکل 12 تغییرات  $\phi$  بر حسب شعاع بی بعد  $\bar{r}$  برای  $n = 1.1 < n_{cr}$  و  $\Omega = 1.3812 < \Omega_{cr}$



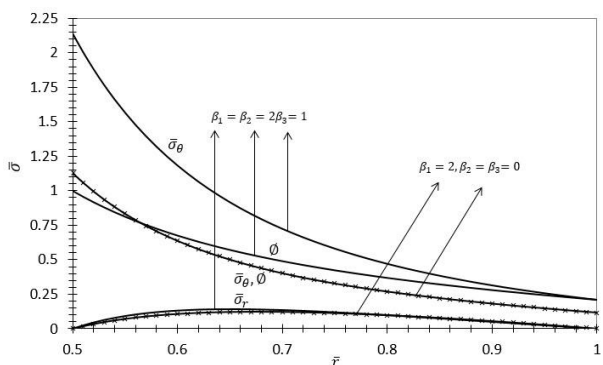
شکل 13 تغییرات  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  را برای  $n = n_{cr}$  و  $\Omega = 1.39308 < \Omega_{cr}$



شکل 12 تغییرات پارامتر بحرانی ماده بر حسب شعاع داخلی بی‌بعد



شکل 13 تغییرات  $n_{cr}$  و  $\Omega_{cr}$  بر حسب شعاع داخلی بی‌بعد



شکل 14 تاثیر تغییرات چگالی در طول شعاع دیسک

#### 4- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک حل دقیق برای پیش‌بینی آستانه تسلیم دیسک دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از معیار ترسکا ارائه شده است. تمام خواص مکانیکی ماده به جز ضریب پواسون که به دلیل تغییرات ناچیز ثابت فرض شده است، از قانون توانی پیروی می‌کنند. در کار حاضر، چرخش و تغییرات خواص مواد به صورت همزمان در نظر گرفته شده است. نتایج این تحقیق نشان داد برخلاف دیسک‌های همگن که از شعاع داخلی شروع به جریان پلاستیک می‌کند، دیسک‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی ممکن است از شعاع داخلی یا خارج و یا شعاعی بین شعاع داخلی و خارج تسلیم شوند. محققان قبل که آستانه تسلیم در مواد مدرج تابعی را بررسی کرده‌اند از تغییرات چگالی و تنش تسلیم صرف‌نظر کرده در حالیکه چگالی و تنش تسلیم در دیسک ساخته شده از مواد مدرج تابعی ثابت نیست و فرض ثابت بودن چگالی اشتباه بوده و متغیر فرض کردن آن اثر قابل توجهی روی تنش‌ها دارد. همچنین تاثیرات مقادیر متفاوت ضریب پواسون بر روی مقادیر بحرانی بررسی شده است.

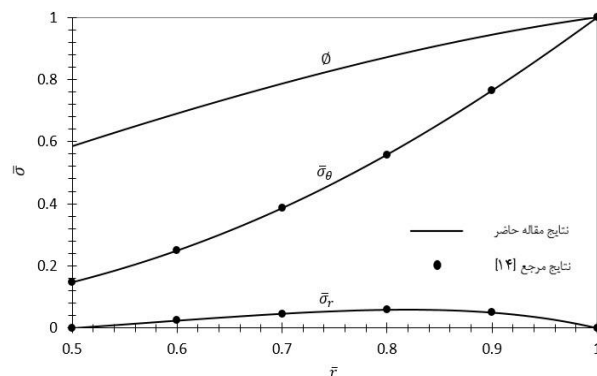
شکل شماره 10 تغییرات تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$ ، تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$  و  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  برای  $n=2 > n_{cr}$  و سرعت حد متناظر (با توجه به رابطه (25))  $\Omega_{e2} = 1.33217$  را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه در شعاع خارج  $\phi = 1$  و در این نقطه ماکزیمم نیز می‌باشد نقطه شروع تسلیم شعاع داخلی می‌باشد همچنین تنش محیطی با افزایش شعاع بی‌بعد افزایش می‌یابد. در این شکل نیز نتایج با مرجع [14] مقایسه شده است.

شکل شماره 11 تغییرات سرعت حد دورانی بی‌بعد  $\Omega_\theta$  بر حسب  $n$  برای مقادیر مختلف شعاع داخلی بی‌بعد  $\bar{a}$  را نمایش می‌دهد. با توجه به این شکل برای یک  $n$  خاص با افزایش  $\bar{a}$ ، سرعت حد دورانی بی‌بعد کاهش می‌یابد.

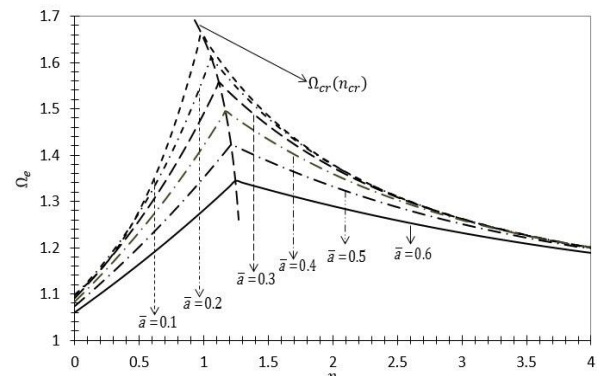
شکل شماره 12 تغییرات پارامتر بحرانی ماده  $n_{cr}$  بر حسب شعاع داخلی بی‌بعد  $\bar{a}$  برای مقادیر مختلف ضریب پواسون را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل با افزایش ضریب پواسون، پارامتر بحرانی ماده افزایش می‌یابد. همچنین این شکل نشان می‌دهد که ضریب پواسون تاثیر ناچیزی بر  $n_{cr}$  دارد، پس ثابت فرض کردن ضریب پواسون تاثیری بر حل مسئله ندارد.

شکل شماره 13 تغییرات  $n_{cr}$  و  $\Omega_{cr}$  بر حسب شعاع داخلی بی‌بعد  $\bar{a}$  را نمایش می‌دهد. با توجه به این شکل با افزایش  $\bar{a}$ ،  $n_{cr}$  افزایش می‌یابد اما  $\Omega_{cr}$  روند کاهشی دارد.

شکل شماره 14 تاثیر تغییرات چگالی و تنش تسلیم در طول شعاع دیسک را نشان می‌دهد. برای این کار دو حالت  $\beta_1 = \beta_2 = 2\beta_3 = 2$  و  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$  با هم مقایسه شده است. این شکل نشان می‌دهد که صرف‌نظر کردن از تغییرات چگالی و تنش تسلیم که در کارهای قبل انجام شده بود [8]، دارای خطای بالایی می‌باشد.



شکل 10 تغییرات تنش محیطی  $\bar{\sigma}_\theta$ ، تنش شعاعی  $\bar{\sigma}_r$  و  $\phi$  بر حسب  $\bar{r}$  برای  $n=2 > n_{cr}$  و  $\Omega_{e2} = 1.33217$  و مقایسه با نتایج مرجع [14]



شکل 11 تغییرات سرعت حد دورانی بی‌بعد  $\Omega_\theta$  بر حسب  $n$  برای مقادیر مختلف شعاع داخلی بی‌بعد

## 5- مراجع

- [12] M. Z. Nejad, G. H. Rahimi, M. Ghannad, Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system, *Mechanika*, Vol. 77, No. 3, pp. 18–26, 2009.
- [13] N. Tutuncu, B. Temel, A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 3, pp. 385–390, 2009.
- [14] Mohammad zamani Nejad, Gholam Hosein Rahimi, Elastic analysis of rotating cylindrical pressure vessels, *Journal of the Chinese institute of engineers*, Vol. 33, No. 4, pp. 525–530, 2010.
- [15] L. H. You, J. X. Wang, B.P. Tang, Deformations and stresses in annular disks made of functionally graded materials subjected to internal and/or external pressure, *Meccanica*, Vol. 44, No. 3, pp. 283–292, 2009.
- [16] H. Callioglu, N. B. Bektas, M. Sayer, Stress analysis of functionally graded rotating discs: analytical and numerical solutions, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 27, No. 6, pp. 950–955, 2011.
- [17] X-L. Peng, X-F. Li, Effects of gradient on stress distribution in rotating functionally graded solid disks, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 5, pp. 1483–1492, 2012.
- [18] L. H. You, Elastic-Plastic stresses in a rotating solid disk, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, pp. 269–282, 1999.
- [19] L. H. You, Y. Y. Tang, J. J. Zhang, C. H. Zheng, Numerical analysis of elastic-plastic rotating disks with arbitrary variable thickness and density, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 7809–7820, 2000.
- [20] Ahmet N. Eraslan, Elastic–plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, pp. 643–667, 2003.
- [21] B. Haghpanah Jahromi, H. Nayeb-Hashemi, A. Vaziri, Elasto-Plastic Stresses in a Functionally Graded Rotating Disk, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 134, No. 2, 2012.
- [22] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd edn., New York McGraw-Hill, 1970.
- [1] M. Koizumi, FGM activities in Japan, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-4, 1997.
- [2] S. P. Timoshenko, *Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems)*, 3 ed., New York, 1976.
- [3] Y. Fukui, Y. Yamanaka, Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, *The Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 35, No. 4, pp. 379-385, 1992.
- [4] C. O. Horgan, A. M. Chan, The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks, *Journal of Elasticity*, Vol. 55, No. 3, pp. 219-230, 1999.
- [5] A. N. Eraslan, H. Argoş, Limit angular velocities of variable thickness rotating disks, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 3109-3130, 2002.
- [6] T. Akis, A. N. Eraslan, The stress response and onset of yield of rotating FGM hollow shafts, *Acta Mechanica*, Vol. 187, No. 1-4, pp. 169-187, 2006.
- [7] A. N. Eraslan, T. Akis, On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems, *Acta Mechanica*, Vol. 181, No. 1-2, pp. 43-63, 2006.
- [8] T. Akis, A. N. Eraslan, Exact solution of rotating FGM shaft problem In the elastoplastic state of stress, *Arch Appl Mech*, Vol. 77, No. 10, pp. 745-765, 2007.
- [9] G. H. Rahimi, M. Ghannad, S. E. Khadem, General plane elasticity solution of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Madares Mechanical Engineering*, Vol. 110, No. 3, pp. 31-41, 2010. (In Persian)
- [10] G. H. Rahimi, M. Ghannad, S. E. Khadem, General shear deformation solution of axisymmetric functionally graded thick cylindrical shells, *Madares Mechanical Engineering*, Vol. 10, No. 3, 2010. (In Persian)
- [11] S. Bhowmick, D. Misra, K.N. Saha, Approximate solution of limit angular speed for externally loaded rotating solid disk, *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 50, No. 2, pp. 163–174, 2008.