



تحلیل رفتار خمشی تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری مرتبه بالای غیر خطی ارتقاء یافته

سهیل داریوشی¹، مجتبی صدیقی^{2*}

1- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه امیر کبیر، تهران

* تهران، صندوق پستی 159163-4311 aut.ac.ir.mojtaba@

چکیده

اطلاعات مقاله

در این مقاله تئوری غیر خطی مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی برای تحلیل رفتار یک تیر ساندویچی تحت بارگذاری استاتیکی ارائه شده است. در این تئوری، با فرض تغییر شکل‌های بزرگ برای کلیه اجزای سازه ساندویچی، روابط سینماتیکی رویه‌ها و هسته بر اساس تانسور کرنش گرین نوشته شد. در تئوری ارائه شده، رویه‌ها به صورت تیر تیموشنکو و هسته به صورت یک جسم دوبعدی که می‌تواند در راستای ضخامت فشرده شود، مدلسازی گردید. پس از ارائه فرمول بندی، معادلات با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل استخراج و با بکارگیری روش نیوتن-رافسون حل شد. به منظور ارائه یک مثال با استفاده از این تئوری، نتایج مربوط به بارگذاری خمشی سه نقطه‌ای برای یک تیر ساندویچی محاسبه گردید. البته به منظور مقایسه بهتر، نتایج مربوط به تحلیل خطی نیز ارائه شد. در قسمت تجربی، تیرهای ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و هسته‌های از جنس لانه زنبوری نومکس با طول‌های کوتاه و بلند ساخته شدند و تحت آزمون خمشی سه نقطه‌ای قرار گرفتند. مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج حاصل از آزمون‌های تجربی نشان داد که تئوری غیر خطی ارائه شده پیش‌بینی‌های بهتری از رفتار تیر ساندویچی را نسبت به تئوری خطی ارائه می‌کند. همچنین مشاهده شد که میزان خطای تحلیل خطی با افزایش طول تیر افزایش می‌یابد. بعلاوه در یک مطالعه پارامتری تاثیر پارامترهای هندسی مانند طول تیر، ضخامت رویه و ضخامت هسته بر میزان اختلاف بین تحلیل خطی و غیر خطی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 08 خرداد 1393
پذیرش: 16 مرداد 1393
ارائه در سایت: 06 آبان 1393
کلید واژگان:
تئوری مرتبه بالا سازه ساندویچی
تغییر شکل‌های غیر خطی
کرنش بزرگ
بررسی تجربی

Analysis of composite sandwich beam with enhanced nonlinear high order sandwich panel theory

Soheil Dariushi¹, Mojtaba Sadighi^{2*}

1-Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

1-Department of Mechanical Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

* P.O.B. 159163-4311 Tehran, Iran, mojtaba@aut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 May 2014
Accepted 07 August 2014
Available Online 28 October 2014

Keywords:

High order sandwich panel theory
Large deformation
Finite strain
Experimental study

ABSTRACT

A novel geometrically nonlinear high order sandwich panel theory considering finite strains of sandwich components is presented in this paper. The equations are derived based on high order sandwich panel theory in which the Green strain and the second Piola-Kirchhoff stress tensor are used. The model uses Timoshenko beam theory assumptions for behavior of the composite face sheets. The core is modeled as a two dimensional linear elastic continuum possessing shear and vertical normal and also in-plane rigidities. Nonlinear equations for a simply supported sandwich beam are derived using Ritz method in conjunction with minimum potential energy principle. After obtaining nonlinear results based on this enhanced model, simplification was applied to derive the linear model in which kinematic relations for face sheets and core reduced, based on small displacement theory assumptions. A parametric study is done to illustrate the effect of geometrical parameters on difference between results of linear and nonlinear models. Also, to verify the analytical predictions some three point bending tests were carried out on sandwich beams with glass/epoxy face sheets and Nomex cores. In all cases good agreement is achieved between the nonlinear analytical predictions and experimental results.

مختلف، لازم و ضروری به نظر می‌رسد. تئوری کلاسیک، تئوری مرتبه اول برشی، تئوری الاستیسیته و تحلیل المان محدود مشهورترین این روش‌ها و تئوری‌ها می‌باشند که هر یک دارای مزایا و معایبی هستند [1-3]. امروزه در سازه‌های ساندویچی پیشرفته، معمولاً از هسته‌های فومی یا لانه زنبوری نرم

1- مقدمه
کاربرد سازه‌های ساندویچی در صنایع هوایی، دریایی، ساخت قطار و خودرو به طور روز افزون در حال گسترش است. از این رو یافتن روشی برای تحلیل هر چه دقیق‌تر و ساده‌تر از رفتار سازه‌های ساندویچی در برابر بارگذاری‌های

پس از انجام فرمول بندی، استخراج و حل کامل معادلات، برای بررسی صحت نتایج به دست آمده، مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج بدست آمده از آزمون‌های تجربی انجام گرفت. در قسمت تجربی، تیرهای ساندویچی با جنس رویه‌های کامپوزیتی و جنس هسته لانه زنبوری نومکس در دو اندازه کوتاه و بلند در آزمایشگاه ساخته شد و آزمون خمش سه نقطه‌ای بر روی آن‌ها صورت گرفت. به منظور مقایسه بهتر، نتایج تحلیلی مربوط به حل مرتبه بالای خطی نیز در کنار نتایج تجربی و نتایج تحلیل غیر خطی ارائه شد تا تأثیر در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ به خوبی مشخص شود. در قسمت پایانی نیز در یک مطالعه پارامتری تأثیر پارامترهای مختلف مانند طول تیر ساندویچی، ضخامت رویه‌ها و ضخامت هسته بر میزان اختلاف بین تحلیل خطی و غیر خطی ارائه شد.

2- قسمت تحلیلی

برای استخراج تئوری مرتبه بالای سازه ساندویچی ارتقا یافته، رویه‌ها به صورت تیر تیموشنکو و هسته به صورت یک جسم دوبعدی که می‌تواند در راستای ضخامت فشرده شود با استفاده از روابط الاستیسیته مدلسازی شد. روابط سینماتیکی رویه‌ها و هسته با استفاده از تانسور کرنش گرین نوشته شده است و هسته در برابر بارهای برشی، عمودی و درون صفحه‌ای از خود مقاومت نشان می‌دهد. بعلاوه در کلیه نقاط تماس، اتصال بین رویه‌ها و هسته کامل فرض شده است. هندسه تیر ساندویچی و دستگاه مختصات مفروض برای رویه بالایی، هسته و رویه پایینی در شکل 1 نشان داده شده است.

2-1- معادلات رویه‌ها بر اساس تانسور کرنش گرین

جابجایی در رویه بالایی و پایینی بر اساس فرض‌های تئوری مرتبه اول برشی به صورت روابط (1) و (2) است.

$$u^{t,b}(x, z) = u_0^{t,b}(x) + z\phi_0^{t,b}(x) \quad (1)$$

$$w^{t,b}(x, z) = w_0^{t,b}(x) \quad (2)$$

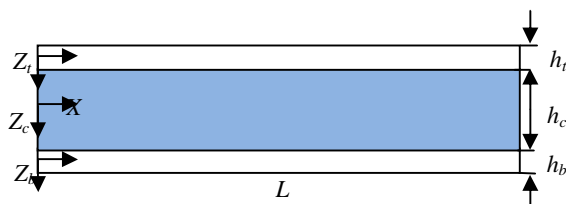
در حالیکه بالانویس t و b نشان دهنده رویه بالایی و پایینی است. u_0 و w_0 و ϕ_0 به ترتیب جابجایی نقاط صفحه میانی در جهات x و z و دوران حول محور y می‌باشند. روابط سینماتیکی رویه‌ها بر اساس تانسور کرنش گرین به صورت روابط (3)، (4) و (5) خواهد بود.

$$E_{xx}^{t,b} = u_{,x}^{t,b} + \frac{1}{2} \left(\left(u_{,x}^{t,b} \right)^2 + \left(w_{,x}^{t,b} \right)^2 \right) \quad (3)$$

$$E_{zz}^{t,b} = w_{,z}^{t,b} + \frac{1}{2} \left(\left(u_{,z}^{t,b} \right)^2 + \left(w_{,z}^{t,b} \right)^2 \right) \quad (4)$$

$$E_{xz}^{t,b} = \frac{1}{2} \left(u_{,z}^{t,b} + w_{,x}^{t,b} + u_{,x}^{t,b} u_{,z}^{t,b} + w_{,x}^{t,b} w_{,z}^{t,b} \right) \quad (5)$$

تنش متناظر با تانسور کرنش گرین (E_{ij}) تانسور تنش مرتبه دوم پیالو-کریشهف (S_{ij}) است. رابطه بین تانسور تنش پیالو-کریشهف و کرنش گرین از



شکل 1 هندسه تیر ساندویچی و دستگاه مختصات مفروض برای رویه بالایی، هسته و رویه پایینی

استفاده می‌شود. نرمی و تراکم پذیری هسته در جهت ضخامت، رفتار کلی سازه را تحت تأثیر قرار داده و باعث می‌شود کاربرد تئوری‌هایی که قابلیت مدلسازی این رفتار هسته را ندارند محدود شود [5,4]. در سال 1992 حل ویژه‌ای تحت عنوان حل مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی توسط فراستیگ و همکارانش ارائه شد [6]. در این حل، سازه ساندویچی به سه ناحیه رویه بالا و جسم سه بعدی هسته و رویه پایین تقسیم می‌شود و فرض بر این است که رویه‌های بالا و پایین از روابط کلاسیک ورق پیروی کرده و هسته طبق تئوری الاستیسیته سه بعدی رفتار کند. با حل این سه ناحیه با هم و در نظر گرفتن معادلات پیوستگی جابجایی‌ها در محل تماس هسته با رویه‌ها، رفتار سازه بررسی شده و مقدار فشرده‌گی هسته نیز بدست می‌آید.

از مزایای روش مرتبه بالا می‌توان به امکان اعمال شرایط مرزی مختلف بر رویه بالایی و پایینی و نیز در نظر گرفتن فشرده‌گی و اثر برشی در هسته اشاره کرد. فراستیگ، همکارانش و دیگر پژوهشگران از تئوری مرتبه بالای ساندویچ برای بررسی رفتار سازه‌های ساندویچی تحت بارگذاری‌های مختلف، با اشکال متفاوت تیر، ورق و پوسته و با شرایط مرزی مختلف استفاده نمودند [10-6].

به تدریج این تئوری ارتقا داده شد و گسترش یافت [11-13] و به منظور افزایش دقت تئوری در پیش بینی رفتار سازه‌های ساندویچی در برخی از مراجع، تأثیر غیرخطی‌های هندسی نیز در نظر گرفته شد. اغلب مقالاتی که بر غیر خطی بودن تئوری ارائه شده، تاکید دارند تنها رفتار غیر خطی رویه‌ها را با در نظر گرفتن روابط سینماتیکی رویه بر پایه کرنش فون-کارمن مدلسازی نموده‌اند و در این حالت هسته‌ها نیز از روابط کرنش‌ها و تغییر مکان‌های کوچک پیروی می‌کنند [13-16] تنها در دو مرجع [17,18] رفتار غیر خطی هسته در نظر گرفته شده که در هیچ یک از این دو، به واسطه پیچیدگی زیاد، حل کامل معادلات بدست آمده، انجام نگرفته و ساده سازی‌های گسترده‌ای در مسیر حل انجام شده است.

علاوه بر آنکه فرمول بندی، استخراج و حل معادلات با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ برای کلیه اجزای سازه ساندویچی از نظر تئوری دارای ارزش بالایی می‌باشد و تاکنون توسط سایر پژوهشگران ارائه نشده است، از نظر مهندسی نیز در بسیاری از سازه‌های ساندویچی به دلیل بزرگی سازه‌ها، نازکی رویه‌ها و نرمی هسته، تغییر شکل‌های اجزای سازه ساندویچی تغییر شکل‌هایی بزرگ است که تئوری‌های خطی با درصد خطای بالایی به پیش بینی میزان این تغییر شکل‌ها می‌پردازند. با توجه به این دلایل، لزوم در نظر گرفتن این ترم‌های غیرخطی و حل معادلات تا حصول نتایج امری روشن است. در تحلیل ارائه شده در این مقاله، فرض تغییر شکل‌های بزرگ برای رویه و هسته در نظر گرفته شده و تا پایان مرحله حل کامل معادلات هیچ گونه ساده سازی انجام نشده است.

فرض صفر بودن تنش‌ها و یا مقاومت داخل صفحه‌ای هسته برای سازه‌های ساندویچی در بین محققان بسیار مرسوم است و این فرض معمولاً با توجه به مقاومت بسیار زیاد رویه‌ها نسبت به هسته توضیح داده می‌شود [6]. ولی با افزایش مدول الاستیسیته و سفتی هسته نسبت به رویه خطای در نظر گرفتن فرض فوق افزایش می‌یابد، این فرض در اغلب مقالات نوشته شده بر پایه تئوری مرتبه بالا نیز وجود دارد [6-9]، [11,12]، [14-18]. اما در مقاله حاضر به منظور افزایش دقت و قابل اعتماد بودن تئوری ارائه شده برای جنس‌های مختلف هسته و رویه با هر نسبت مدول الاستیسیته، مقاومت درون صفحه‌ای هسته نیز در نظر گرفته شد.

$$u^c(x, z) = u_0^c(x) + \varphi_0^c(x)z_c + \frac{2}{c^2}[u_0^t(x) + \frac{h_t}{2}\varphi_0^t(x) + u_0^b(x) - \frac{h_b}{2}\varphi_0^b(x) - 2u_0^c(x)]z_c^2 - \frac{4}{c^3}[u_0^t(x) + \frac{h_t}{2}\varphi_0^t(x) - u_0^b(x) + \frac{h_b}{2}\varphi_0^b(x) + c\varphi_0^c(x)]z_c^3 \quad (17)$$

همانگونه که در معادلات (16) و (17) مشاهده می‌شود، تعداد متغیرهای مربوط به مولفه‌های تغییر مکان هسته با کمک روابط پیوستگی جابجایی‌ها از 7 متغیر به 3 متغیر کاهش یافت و 4 متغیر بر حسب سایر متغیرهای رویه‌ها و هسته نوشته شد. در کل تعداد این متغیرها در رویه‌ها و هسته به نه متغیر شامل (w_0, u_0, φ_0) برای رویه بالایی، رویه پایینی و هسته تبدیل شد. معادلات کرنش- تغییر مکان برحسب متغیرهای مستقل را می‌توان از جایگذاری معادلات (16) و (17) در معادلات (9) تا (11) بدست آورد. پس از محاسبه کرنش در هسته و برای بدست آوردن تنش‌های متناظر، تانسور تنش مرتبه دوم پیالو- کریشف (S_{ij}^c) از معادلات ساختاری رابطه (18) بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} S_{xx}^c \\ S_{zz}^c \\ S_{xz}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^c & C_{13}^c & 0 \\ C_{13}^c & C_{33}^c & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{55}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^c \\ E_{zz}^c \\ E_{xz}^c \end{bmatrix} \quad (18)$$

در رابطه فوق، C_{ij} ها مولفه‌های ماتریس سفتی هستند. برای مواد ایزوتروپ و ارتوتروپ ماتریس سفتی مربوطه در مرجع [19] موجود است.

2-4- روش رینز

انرژی پتانسیل کل (Π) از دو بخش انرژی کرنشی (U) و کار نیروهای خارجی (W) تشکیل می‌شود (رابطه (19)).

$$\Pi = U + W \quad (19)$$

تانسور مرتبه دوم تنش پیالو- کریشف و تانسور کرنش گرین با یکدیگر از نظر انرژی مزدوج¹ هستند [19]. بنابر این انرژی کرنشی سازه ساندویچی که از مجموع انرژی رویه‌ها و هسته تشکیل می‌شود، به صورت رابطه (20) بدست می‌آید.

$$U = \int_{V_t} \left(\frac{1}{2} S_{xx}^t E_{xx}^t + \frac{1}{2} S_{zz}^t E_{zz}^t + S_{xz}^t E_{xz}^t \right) dv_t + \int_{V_c} \left(\frac{1}{2} S_{xx}^c E_{xx}^c + \frac{1}{2} S_{zz}^c E_{zz}^c + S_{xz}^c E_{xz}^c \right) dv_c + \int_{V_b} \left(\frac{1}{2} S_{xx}^b E_{xx}^b + \frac{1}{2} S_{zz}^b E_{zz}^b + S_{xz}^b E_{xz}^b \right) dv_b \quad (20)$$

کار نیروهای خارجی شامل نیروها و ممان‌های گسترده و نقطه‌ای که می‌توانند بر روی رویه‌های بالایی و پایینی وارد شوند، به صورت رابطه (21) محاسبه می‌شود.

$$W = - \sum_{j=t,b} \int_0^L (n_x^j u_0^j + p_z^j w_0^j + m_{xz}^j \varphi_0^j) dx + \sum_{k=1}^{NL} \int_0^L (N_{xk}^j u_0^j + P_{zk}^j w_0^j + M_{xzk}^j \varphi_0^j) \delta_d(x - x_k) dx \quad (21)$$

در رابطه (21) n_x و p_z به ترتیب نیروهای گسترده در راستای عمودی و داخل

معادلات ساختاری (6) بدست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} S_{xx}^{t,b} \\ S_{zz}^{t,b} \\ S_{xz}^{t,b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{t,b} & C_{13}^{t,b} & 0 \\ C_{13}^{t,b} & C_{33}^{t,b} & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{55}^{t,b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{t,b} \\ E_{zz}^{t,b} \\ E_{xz}^{t,b} \end{bmatrix} \quad (6)$$

در رابطه (6)، C_{ij} ها مولفه‌های ماتریس سفتی هستند که با توجه به روابطی که در کتاب‌های مرجع کامپوزیت [19] موجود است به خواص مکانیکی لایه-های تشکیل دهنده رویه مربوط می‌شوند. با استفاده از رابطه (6) می‌توان تنش‌های رویه‌ها را بر حسب کرنش‌ها بدست آورد.

2-2- معادلات هسته بر اساس تانسور کرنش گرین

مولفه‌های تغییر مکان عمودی و صفحه‌ای در هسته، به ترتیب چند جمله‌ای‌هایی از مرتبه دو و سه به شکل روابط (7) و (8) فرض می‌شوند.

$$w^c(x, y, z) = w_0^c(x, y) + w_1^c(x, y)z_c + w_2^c(x, y)z_c^2 \quad (7)$$

$$u^c(x, y, z) = u_0^c(x, y) + \varphi_0^c(x, y)z_c + u_2^c(x, y)z_c^2 + u_3^c(x, y)z_c^3 \quad (8)$$

در معادلات فوق بالانویس c نشان دهنده هسته است. u_0 و w_0 به ترتیب جابجایی عمودی و داخل صفحه‌ای در جهت x می‌باشند و φ_0 شیب صفحه میانی در جهت x است و نیز سایر ضرایب (u_2, w_2, w_1, u_3) ضرایب مجهولی هستند که با استفاده از پیوستگی تغییر مکان‌ها در فصل مشترک رویه بالایی و پایینی با هسته محاسبه می‌شوند.

با فرض تغییر شکل‌های بزرگ در هسته، معادلات کرنش- تغییر مکان بر اساس تانسور کرنش گرین به شکل روابط (9) تا (11) می‌باشد.

$$E_{xx}^c = u_{,x}^c + \frac{1}{2} \left((u_{,x}^c)^2 + (w_{,x}^c)^2 \right) \quad (9)$$

$$E_{zz}^{t,b} = w_{,z}^{t,b} + \frac{1}{2} \left((u_{,z}^c)^2 + (w_{,z}^c)^2 \right) \quad (10)$$

$$E_{xz}^c = \frac{1}{2} \left(u_{,z}^c + w_{,x}^c + u_{,x}^c u_{,z}^c + w_{,x}^c w_{,z}^c \right) \quad (11)$$

2-3- معادلات پیوستگی

معادلات پیوستگی جابجایی در راستای ضخامت (عمودی) و داخل صفحه‌ای در فصل مشترک بین رویه بالایی و هسته $(z=-c/2)$ و نیز رویه پایینی و هسته $(z=c/2)$ به شکل روابط (12) تا (16) می‌باشد.

$$w^c(x, -\frac{c}{2}) = w^t(x) \quad (12)$$

$$u^c(x, -\frac{c}{2}) = u_0^t(x) + \frac{h_t}{2} \varphi_0^t(x) \quad (13)$$

$$w^c(x, \frac{c}{2}) = w^b(x) \quad (14)$$

$$u^c(x, \frac{c}{2}) = u_0^b(x) - \frac{h_b}{2} \varphi_0^b(x) \quad (15)$$

با جایگذاری معادلات (7) و (8) در روابط (12) تا (15) و انجام عملیات ریاضی مورد نیاز و سپس ساده سازی روابط، طبق روابط (16) و (17) خواهیم داشت.

$$w^c(x, z) = w_0^c(x) + \left[\frac{1}{c} (w^b(x) - w^t(x)) \right] z_c + \left[\frac{2}{c^2} (w^t(x) + w^b(x) - 2w_0^c(x)) \right] z_c^2 \quad (16)$$

1- Energetically conjugate

m انتخاب شده، در روش تکرار نیوتن-رافسون باید با چندین مرتبه تکرار به جواب مورد نظر دست یافت. تعداد تکرارها باید به کمک یک شرط پایان محاسبات از قبل تعیین شود. در مساله حاضر این شرط کوچکتر بودن اختلاف دو مرحله از حل از 0/01 میلی متر تعیین گردید.

پس از انجام مراحل حل، تمامی متغیرهای مستقل q_i ها، مشخص شده و با قرار دادن این ضرایب در معادلات (22) تا (27) مقادیر کلیه تغییر شکل‌ها محاسبه شده در نتیجه با کمک معادلات (3) تا (5) و (9) تا (11) کرنش‌ها و با استفاده از معادلات (6) و (18) تنش‌ها در تمام نقاط سازه محاسبه می‌شود. به منظور بررسی میزان تأثیر در نظر گرفتن کرنش‌های بزرگ در حل ارائه شده و مقایسه نتایج حاصل از حل غیر خطی مرتبه بالا با حل خطی، تئوری مرتبه بالای سازه ساندویچی بر پایه تغییر شکل‌های کوچک نیز استخراج گردید. برای این منظور کافی است معادلات کرنش - تغییر مکان که در رویه-ها و هسته بر اساس تانسور کرنش گرین نوشته شده، به صورت روابط (31) تا (33) بر اساس تغییر شکل‌ها و دوران‌های کوچک جایگذاری شود.

$$\varepsilon_{xx}^{t,b,c} = u_{,x}^{t,b,c} \quad (31)$$

$$E_{zz}^{t,b,c} = 0 \quad (32)$$

$$E_{xz}^{t,b,c} = \frac{1}{2} (u_{,z}^{t,b,c} + w_{,x}^{t,b,c}) \quad (33)$$

سایر مراحل حل مانند آنچه برای تئوری غیر خطی توضیح داده شد، می‌باشد. از این رو از تکرار این مراحل اجتناب شده است. تنها نکته قابل ذکر آن است که به دلیل خطی بودن ماتریس $[K]$ و بردار $[F]$ در رابطه (30) دیگر نیازی به استفاده از روش نیوتن-رافسون نیست و مقدار متغیرهای مستقل مستقیماً از رابطه (34) بدست می‌آید.

$$\{q_i\} = [K]^{-1}[F] \quad (34)$$

3- بررسی تجربی

در این قسمت معرفی مواد استفاده شده، نحوه ساخت نمونه‌ها، ابعاد و اندازه نمونه‌ها و چگونگی انجام آزمایش‌ها ارائه می‌گردد.

3-1- مواد

مواد به کار رفته برای ساخت نمونه‌ها شامل لایه‌های کامپوزیتی پیش آغشته^۱ تکسو از نوع شیشه اس 2 و اپوکسی، لایه چسباننده اف ام 94^۲ و هسته لانه زنبوری از نوع نومکس^۳ به ضخامت 10 میلیمتر می‌باشد. لانه زنبوری نومکس یک ساختار غیر فلزی از جنس آرامید است که با رزین فنولیک مقاوم به حرارت پوشش داده شده است. این ساختار دارای سلول‌های شش وجهی با مقاومت بالا و خواص مکانیکی مناسب می‌باشد. خواص مکانیکی هر یک از مواد به کار گرفته شده، در جدول 1 آمده است.

3-2- روش ساخت نمونه‌ها و انجام آزمون‌ها

برای ساخت نمونه‌های ساندویچی و انجام آزمون‌های عملی، در ابتدا یک ورق ساندویچی اصلی ساخته شد و سپس نمونه‌ها در دو اندازه کوتاه و بلند برای آزمون‌های خمش سه نقطه‌ای به شکل تیر به وسیله اره مخصوص بریده شد. برای ساخت ورق ساندویچی، ابتدا رویه‌های کامپوزیتی تهیه شد و سپس این رویه‌ها با استفاده از لایه چسباننده بر روی هسته چسباننده شدند. برای

صفحه‌ای و m_{xz} ممان گسترده خارجی می‌باشد. P_z و N_x نیز به ترتیب نیروهای نقطه‌ای در راستای عمودی و داخل صفحه‌ای و M_{xz} ممان متمرکز است. N_L تعداد نیروها و ممان‌های متمرکز را نشان می‌دهد و $\delta_d(X-X_k)$ تابع دلتای دیراک در محل اعمال بارهای نقطه‌ای می‌باشد.

با جایگذاری معادلات (20) و (21) در معادله (19) انرژی پتانسیل کل سازه محاسبه می‌گردد. برای استفاده از روش ریتز کافی است متغیرهای موجود در مساله به صورت توابعی که شرایط مرزی را ارضا می‌کنند بسط داده شوند. برای تیرهای با تکیه گاه ساده توابع پیشنهادی به صورت توابع چند جمله‌ای به شکل روابط (22) تا (27) در نظر گرفته شدند.

$$u_0^{t,b}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{t,b} \left(\frac{x}{L}\right)^{m-1} \quad (22)$$

$$w_0^{t,b}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{t,b} \left(\frac{x}{L}\right)^m \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (23)$$

$$\varphi_0^{t,b}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^{t,b} \left(\frac{x}{L}\right)^{m-1} \quad (24)$$

$$u_0^c(x) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m^c \left(\frac{x}{L}\right)^{m-1} \quad (25)$$

$$w_0^c(x) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m^c \left(\frac{x}{L}\right)^m \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (26)$$

$$\varphi_0^c(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^c \left(\frac{x}{L}\right)^{m-1} \quad (27)$$

با جایگذاری روابط (22) تا (27) در معادله انرژی پتانسیل کل سازه که بر حسب متغیرهای جایجایی محاسبه شده است، مقدار انرژی کل بر حسب متغیرهای مستقل رابطه (28) بدست می‌آید.

$$\{q_i\} = \left\{ \left\{ U_m^{t,b,c} \right\}, \left\{ W_m^{t,b,c} \right\}, \left\{ \Phi_m^{t,b,c} \right\} \right\} \quad (28)$$

حال برای مینیمم کردن انرژی پتانسیل کل (Π) نسبت به متغیرهای مستقل مساله q_i ها از رابطه (29) استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial W}{\partial q_i} = 0 \quad (29)$$

برای هر یک از متغیرهای مستقل یک معادله از رابطه (29) استخراج می‌شود. در نتیجه تعداد این معادلات ($9 \times m$) می‌باشد. این معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی (30) نوشت.

$$[K(q_i)]\{q_i\} - [F] = 0 \quad (30)$$

در معادله (30) ماتریس $[K(q_i)]$ یک ماتریس ضرایب غیر خطی است که هر یک از جملات آن می‌تواند تابعی از متغیرهای مستقل q_i باشد. ماتریس $[F]$ نیز بردار نیرو است. برای حل دستگاه معادلات غیر خطی فوق از روش تکرار نیوتن-رافسون^۱ استفاده شد [20]. در این روش ابتدا یک حدس اولیه به عنوان جواب در نظر گرفته می‌شود و سپس با استفاده از یک رابطه تکراری نتایج گام به گام به جواب اصلی نزدیکتر می‌گردد. در مساله موجود، حل معادلات خطی به عنوان حدس اولیه در نظر گرفته شد. در حل این معادلات اگر m یعنی تعداد جملات در بسط متغیرها بیشتر شود، جواب بدست آمده می‌تواند به مقدار دلخواه به جواب واقعی مساله نزدیک شود. حال به ازای هر

2- S2-glass/FM94 Epoxy prepreg
3- FM94 adhesive layer
4- Nomex

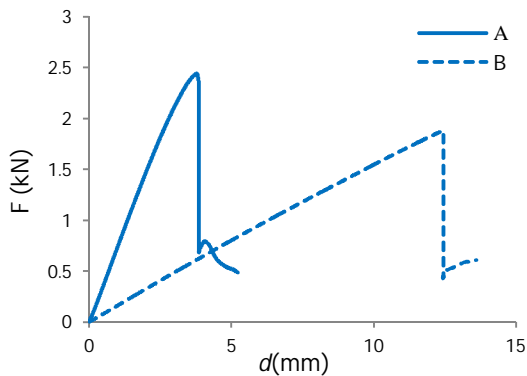
1- Newton-Raphson iteration method

4- نتایج و بحث

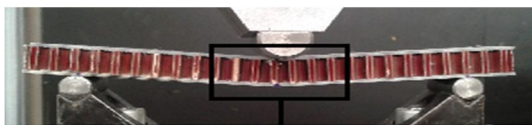
4-1- مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی

شکل 3 نمودار نیرو-جابجایی مربوط به تست خمش سه نقطه‌ای بر روی تیرهای کوتاه (A) و بلند (B) را نشان می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود، در تیرهای بلند ماکزیمم نیروی نهایی کمتر و تغییر شکل نهایی بزرگتر از تیرهای کوتاه است. شکست تیرهای کوتاه و بلند که به ترتیب در شکل‌های 4 و 5 نشان داده شده‌اند، به علت شکست رویه بالایی در زیر محل بارگذاری می‌باشد.

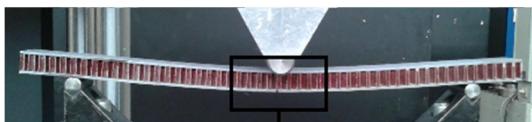
با استفاده از خواص مکانیکی مواد که در جدول 1 آمده و بر مبنای حل تحلیلی مرتبه بالای ساندویچ غیر خطی و خطی که در قسمت فرمول بندی تحلیلی ارائه شده است، نمودارهای نیرو-جابجایی در محدوده الاستیک برای تیرهای ساندویچی رسم گردید. درصد بیشینه خطای تحلیل غیر خطی و خطی برای تیرهای کوتاه ساندویچی به ترتیب 14% و 5% و برای تیرهای بلند به ترتیب 17% و 4% می‌باشد. همانطور که در شکل‌های 6 و 7 دیده می‌شود، مقایسه منحنی‌های نیرو-جابجایی بدست آمده بر حسب روش تحلیلی برای تیرهای کوتاه و بلند با نتایج تجربی نشان می‌دهد که در هر دو گروه تیرهای ساندویچی میزان خطای روش تحلیلی غیر خطی به میزان قابل توجهی کمتر از میزان خطای روش خطی است. میزان خطای تحلیل خطی با افزایش طول



شکل 3 نمودار نیرو-جابجایی برای تیرهای کوتاه و بلند ساندویچی



شکل 4 شکست تیرهای کوتاه تحت آزمون خمش سه نقطه‌ای



شکل 5 شکست تیرهای بلند تحت آزمون خمش سه نقطه‌ای

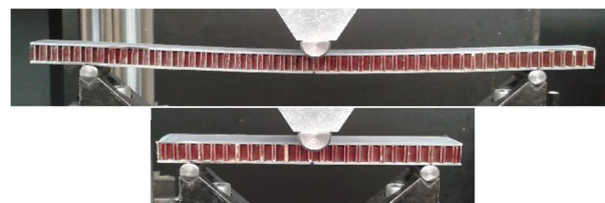
جدول 1 خواص مکانیکی مواد اولیه

خواص مکانیکی مواد اولیه	لایه‌های کامپوزیتی پیش آغشته [21]	لانه زنبوری نومکس [22]
E_1	48/9 (GPa)	295 (MPa)
E_2	5/5 (GPa)	45/5 (MPa)
E_3	5/5 (GPa)	5 (MPa)
G_{12}	5 (GPa)	65 (MPa)
G_{23}	5 (GPa)	23 (MPa)
ν_{12}	0/33	0/27
ν_{13}	0/0371	0/04

ساخت رویه‌های تمام کامپوزیتی از لایه‌های الیاف شیشه و اپوکسی پیش آغشته استفاده شد. لایه‌ها بر طبق لایه چینی از پیش طراحی شده به صورت [0-90-90-0-90-90-0] بر روی یکدیگر چیده شد و سپس این مجموعه در زیر پارچه داکرون و بریدر قرار گرفت و سپس کل مجموعه به طور کامل در زیر کیسه وکیوم قرار داده شد و با فشار وکیوم در حدود 1 بار هوای موجود در زیر کیسه وکیوم تخلیه گردید. نمونه به مدت 3 ساعت در دمای 120 درجه سانتیگراد و فشار 6 بار داخل اتوکلاو قرار گرفت. لایه‌های کامپوزیتی بدست آمده دارای ضخامت نهایی 1/2 میلیمتر بودند.

برای اتصال رویه‌های بالایی و پایینی به هسته نومکس در بین رویه‌ها و هسته از یک لایه چسباننده استفاده شد. پس از قرار دادن رویه پایینی، لایه چسباننده، هسته، لایه چسباننده و رویه بالایی بر روی صفحه کار لازم است تا نمونه ساندویچی در اتوکلاو قرار گیرد. به این منظور نمونه باید به مدت 3 ساعت در دمای 120 درجه سانتیگراد و فشار 1 بار داخل اتوکلاو قرار گیرد. پس از انجام مراحل پخت، ورق ساندویچی ساخته شده به شکل تیرهای با طول‌های 15 و 30 سانتی متر و عرض 3 سانتی متر برش داده شد. از هر گروه تیر ساندویچی سه نمونه ساخته شد و مورد آزمایش قرار گرفت تا تکرار پذیری نتایج نیز بررسی شده باشد.

نحوه انجام تست بر اساس استاندارد ای اس تی ام 393¹ تعیین گردید. تیرهای بلند و کوتاه ساندویچی با شرایط مرزی به صورت تکیه گاه ساده که دهانه این تکیه‌گاه به ترتیب 26 و 13 سانتی متر بود، در شکل 2 به نمایش در آمده‌اند. همه این نمونه‌ها تحت بارگذاری توسط استوانه فولادی با شعاع 1.5 سانتی متر قرار گرفتند. برای اعمال بار از دستگاه زویک² با ظرفیت 20 کیلو نیوتن استفاده شد و سرعت بارگذاری 5 میلیمتر بر دقیقه تعیین گردید. نمودارهای نیرو- تغییر مکان برای هر نمونه بدست آمد، که در بخش نتایج و بحث ارائه خواهد شد.



شکل 2 تیرهای ساندویچی تحت بارگذاری خمش سه نقطه‌ای

1- ASTM C 393
2- Zwick

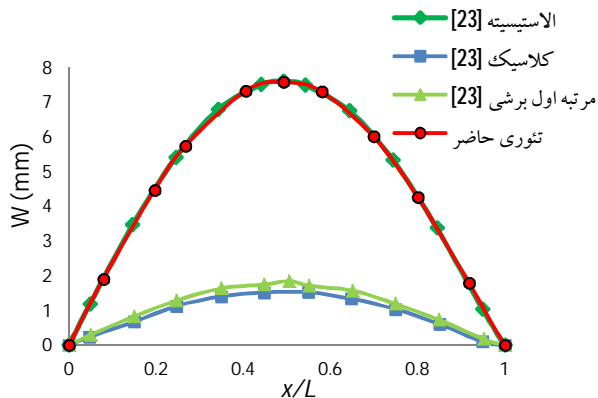
جدول 2 خواص مکانیکی مواد اولیه به کار رفته در مرجع [23]

خصوصیات	لایه‌های کامپوزیتی گرافیت/اپوکسی	لانه زنبوری شیشه/فنولیک
E_1	181 (GPa)	32 (MPa)
E_2	10/3 (GPa)	32 (MPa)
E_3	10/3 (GPa)	300 (MPa)
G_{12}	7/17 (GPa)	13 (MPa)
G_{23}	5/96 (GPa)	48 (MPa)
${}_3G$	7/17 (GPa)	48 (MPa)
ν_{12}	0/277	0/25
ν_{12}	0/016	0/25

تیر افزایش می‌یابد در حالیکه میزان خطای تحلیل غیر خطی در تیرهای بلند حتی کمتر شده است. البته دلیل این کاهش را می‌توان به کمتر شدن نیروی بیشینه وارد شده به تیر در محدوده الاستیک مربوط دانست. همانطور که در شکل 6 دیده می‌شود تیرهای کوتاه در محدوده الاستیک بیشینه نیروی برابر با 2100 نیوتن را تحمل می‌کنند در حالیکه این نیرو برای تیرهای بلند تقریباً 1900 نیوتن می‌باشد (شکل 7). اختلاف بین نتایج حاصل از تحلیل غیر خطی و نتایج تجربی را می‌توان به عواملی مانند در نظر نگرفتن اصطکاک تکیه‌گاه‌ها و نمونه، در نظر نگرفتن لایه چسباننده در مدلسازی تحلیلی و یا وجود عیوبی در ساخت نمونه‌ها مربوط دانست.

4-2- مقایسه با نتایج موجود در مراجع

به منظور مقایسه نتایج با نتایج ارائه شده در سایر مراجع، یک تیر ساندویچی با ابعاد و خواص معرفی شده در مرجع [23] در نظر گرفته شد. طول و عرض تیر ساندویچی به ترتیب 400 و 40 میلی‌متر و ضخامت رویه‌ها و هسته به ترتیب 2 و 16 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی رویه‌ها و هسته نیز در جدول 2 آمده است. نتایج حاصل از بارگذاری عرضی گسترده بر روی این تیر ساندویچی با استفاده از تئوری ارائه شده در مقاله حاضر محاسبه و با نتایج بدست آمده از تئوری الاستیسیته، تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول برشی که در مرجع [23] موجود است، مقایسه شد. جابجایی عرضی نقاط رویه بالایی در طول تیر، در شکل 8 نشان داده شده و تطبیق خوب نتایج تئوری حاضر با نتایج تئوری الاستیسیته را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل 8 دیده می‌شود، تئوری کلاسیک و مرتبه اول برشی به دلیل فرضیات غیر واقعی از جمله در نظر نگرفتن فشردگی هسته، پیش بینی‌هایی دور از واقعیت را ارائه می‌دهند.



شکل 8 نمودار جابجایی رویه بالایی در طول تیر ساندویچی با استفاده از تئوری‌های مختلف

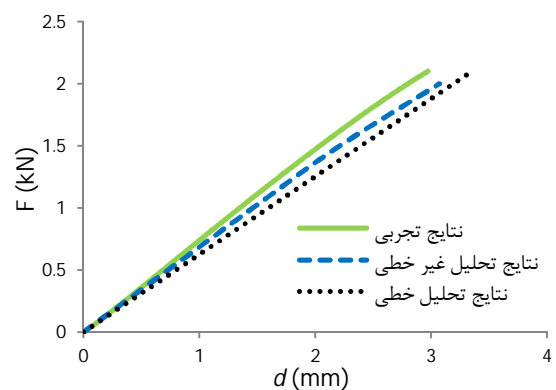
4-3- بررسی پارامتری

در این بخش تأثیر پارامترهای هندسی مختلف مانند طول تیر، ضخامت رویه و ضخامت هسته بر اختلاف بین نتایج پیش بینی شده توسط حل غیر خطی و حل خطی مورد بررسی قرار گرفته است. برای سهولت مقایسه، اختلاف بین جابجایی پیش بینی شده توسط حل غیر خطی و حل خطی با پارامتر δ نامگذاری و به صورت درصد با استفاده از رابطه (35) تعریف شده است.

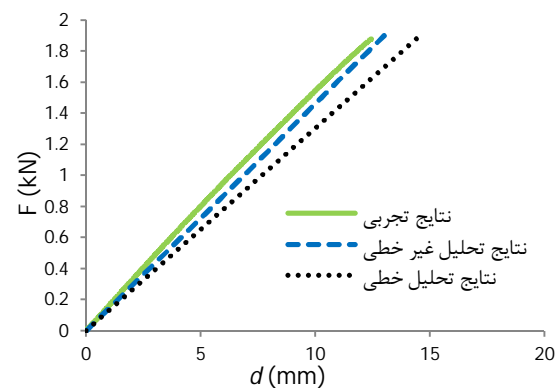
$$\delta = [(w_{NL} - w_L) / w_{NL}] \times 100 \quad (35)$$

به منظور بررسی تأثیر طول تیر ساندویچی بر روی اختلاف بین نتایج پیش بینی شده توسط حل غیر خطی و حل خطی، یک تیر ساندویچی مانند تیرهای کوتاه (گروه A) در نظر گرفته شد و با تیرهای ساندویچی مشابه از نظر خواص مکانیکی و ابعاد که تنها طول آنها به ترتیب 2، 3 و 4 برابر شده بود، مقایسه شد.

شکل 9 نمودار نیرو بر حسب پارامتر δ را برای تیرهای با طول‌های مختلف نشان می‌دهد. واضح است که با 2 برابر شدن طول تیر، نتایج موجود در نمودارها مربوط به نمونه‌های بلند (گروه B) می‌باشد. طول تیرهای مورد بررسی 13، 26، 39 و 52 سانتیمتر بود. همانگونه که در شکل 8 مشاهده می‌شود با افزایش طول تیر پارامتر δ نیز افزایش می‌یابد. به عنوان مثال برای تیر با طول 39 سانتی متر اختلاف بین پیش بینی حل خطی و غیرخطی تا 18% است و برای تیر با طول 52 سانتی متر این اختلاف تا 27% افزایش می‌یابد. این اختلاف‌ها نشان می‌دهد که استفاده از حل خطی و در نظر نگرفتن تغییر شکل‌های بزرگ برای تیرهای ساندویچی که ابعاد نسبتاً بزرگی دارند، خطای زیادی را ایجاد کرده و پیش بینی‌ها دور از واقعیت خواهد بود.



شکل 6 نمودار نیرو - جابجایی مقایسه‌ای برای تیرهای کوتاه ساندویچی



شکل 7 نمودار نیرو - جابجایی مقایسه‌ای برای تیرهای بلند ساندویچی

5- نتیجه گیری

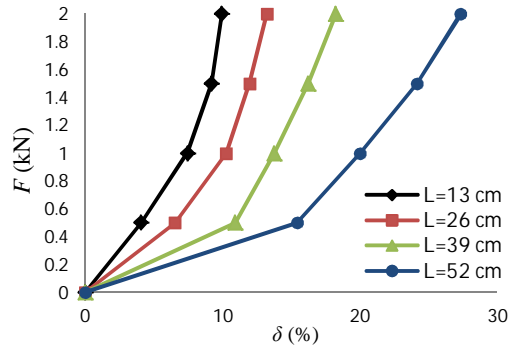
در این مقاله تحلیل رفتار تیرهای ساندویچی تحت بارگذاری استاتیکی، با استفاده از تئوری غیر خطی مرتبه بالای ارتقا یافته سازه‌های ساندویچی انجام گرفت. در تئوری ارائه شده، رویه‌ها به صورت تیر تیموشنکو و هسته به صورت یک جسم دوبعدی که می‌تواند در راستای ضخامت فشرده شود، مدلسازی گردید و روابط سینماتیکی رویه‌ها و هسته بر اساس تانسور کرنش گرین نوشته شد. پس از انجام فرمول بندی، استخراج و حل کامل معادلات، برای بررسی صحت نتایج به دست آمده، مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج بدست آمده از آزمون‌های تجربی و نیز نتایج موجود در سایر مراجع انجام گرفت.

در بخش تجربی، تیرهای ساندویچی با جنس رویه‌های شیشه/اپوکسی و جنس هسته لانه زنبوری نومکس در دو اندازه کوتاه و بلند ساخته شد و آزمون خمش سه نقطه‌ای بر روی آنها انجام گرفت. مقایسه نتایج تحلیلی و تجربی نشان داد که برای تمام نمونه‌ها، تئوری غیر خطی ارائه شده پیش بینی‌های بهتری از رفتار تیر ساندویچی را نسبت به تئوری خطی ارائه می‌کند. البته میزان خطای تحلیل خطی با افزایش طول تیر افزایش می‌یابد. مقایسه نتایج بدست آمده از تئوری ارائه شده با نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته موجود در مراجع تطابق خوب نتایج را برای یک تیر ساندویچی با رویه کامپوزیتی و هسته لانه زنبوری نشان داد.

به منظور بررسی عوامل موثر بر افزایش خطای استفاده از تحلیل خطی، در یک مطالعه پارامتری تأثیر هندسه و ابعاد تیر ساندویچی بر روی اختلاف بین نتایج حاصل از تئوری غیر خطی و تئوری خطی بررسی شد. این بررسی نشان داد که به طور کلی افزایش طول تیر، کاهش ضخامت رویه و کاهش ضخامت هسته موجب افزایش اختلاف بین نتایج پیش بینی شده توسط تحلیل خطی و غیر خطی تا حد قابل ملاحظه‌ای می‌شود. این اختلاف‌ها نشان می‌دهد که استفاده از تحلیل خطی و در نظر نگرفتن تغییر شکل‌های بزرگ می‌تواند خطای زیادی را ایجاد کند و تخمین نتایج بر این اساس دور از واقعیت خواهد بود.

6- مراجع

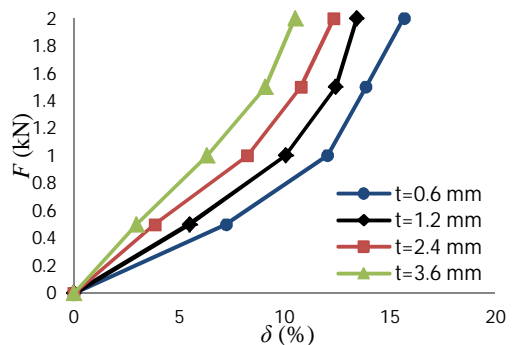
- [1] J. R. Vinson, *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*, New York, Technomic, 1999.
- [2] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, M. Daya, Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites, *Composite Structures*, Vol. 84, pp. 282-292, 2008.
- [3] K. H. Ha, Finite element analysis of sandwich plates: An overview, *Computers & Structures*, Vol. 37, No. 4, pp. 397-403, 1990.
- [4] A. Fereidoon, H. Hemmatian, A. Mohammadzadeh, E. Assareh, *Sandwich panel optimization based on yielding and buckling criteria by using imperialist competitive algorithm*, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 4, pp. 25-35, 2013. (In Persian)
- [5] N. Pirmohammadi, G.H. Liaghat, M. Hossein Pol, Experimental investigation on ballistic behavior of sandwich panels made of honeycomb core, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 21-26, 2014. (In Persian)
- [6] Y. Frostig, M. Baruch, O. Vilnay, I. Sheinman, Bending of nonsymmetric sandwich beams with flexible core-bending behavior, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 9, pp. 1931-1952, 1992.
- [7] Y. Frostig, Elastica of sandwich panels with a transversely flexible core-A high order theory approach, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, pp. 2043-2059, 2009.
- [8] Y. Frostig, O. T. Thomsen, High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 1697-1724, 2004.
- [9] C. Santiuste, O. T. Thomsen, Y. Frostig, Thermo-mechanical load interactions in foam cored axi-symmetric sandwich circular plates-High-order and FE models, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 369-376, 2011.
- [10] C. N. Phan, G. A. Kardomateas, Y. Frostig, Blast response of a sandwich beam/wide plate based on the extended high order sandwich panel theory and comparison with elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80, No. 6, 2013.



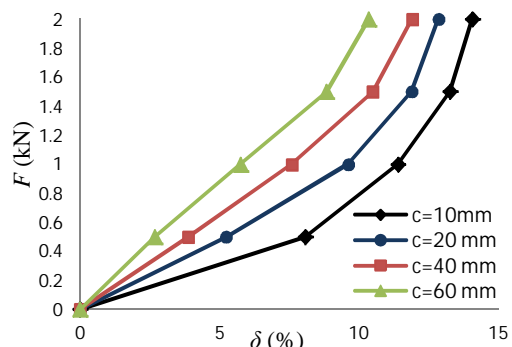
شکل 9 نمودار نیرو بر حسب پارامتر δ برای تیرهای ساندویچی با طول‌های مختلف

برای بررسی تأثیر ضخامت رویه بر روی پارامتر δ تیرهای ساندویچی که ضخامت رویه‌های بالایی و پایینی آنها 0/5، 1، 2 و 3 برابر ضخامت رویه‌های نمونه‌های گروه A باشد، در نظر گرفته شدند. شکل 10 نشان می‌دهد که کاهش ضخامت رویه‌های تیر ساندویچی موجب افزایش اختلاف بین تغییر شکل پیش بینی شده توسط حل خطی و غیر خطی می‌شود. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که در سازه‌های ساندویچی با ضخامت رویه کم لزوم در نظر گرفتن ترم‌های غیر خطی هندسی در مدلسازی افزایش می‌یابد.

به منظور مطالعه چگونگی تغییر پارامتر δ بر اثر تغییر ضخامت هسته، تیرهای ساندویچی با ساختاری مانند نمونه‌های گروه A و با ضخامت هسته 10، 20، 40 و 60 میلی‌متر در نظر گرفته شدند. همانطور که در شکل 11 نشان داده شده است، با کاهش ضخامت هسته اختلاف بین حل خطی و غیر خطی افزایش می‌یابد. در نتیجه هر چه ضخامت هسته کمتر شود، اهمیت در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ در مدلسازی رفتار سازه ساندویچی افزایش بیشتری می‌یابد.



شکل 10 نمودار نیرو بر حسب پارامتر δ برای تیرهای ساندویچی با ضخامت رویه‌های مختلف



شکل 11 نمودار نیرو بر حسب پارامتر δ برای تیرهای ساندویچی با ضخامت هسته‌های مختلف

- [16] H. Schwarts-Givli, O. Rabinovitch, Y. Frostig, High-order nonlinear contact effects in cyclic loading of delaminated sandwich panels, *Composites: Part B*, Vol. 38, pp. 86–101, 2007.
- [17] Y. Frostig, O. T. Thomsen, I. Sheinman, On the nonlinear high order theory of unidirectional sandwich panels with a transversely flexible core, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 1443–1463, 2005.
- [18] J. Hohe, L. Librescu, A nonlinear theory for doubly curved anisotropic sandwich shells with transversely compressible core, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, pp. 1059–1088, 2003.
- [19] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis*, Second Edition, New York: CRC Press, 2004.
- [20] J. N. Reddy, *An introduction to nonlinear finite element analysis*, New York: Oxford University Press, 2004.
- [21] http://www.euro-composites.com/SiteCollectionDocuments/_536-68e.pdf
- [22] http://www.hexcel.com/Resources/DataSheets/Brochure-Data-sheets/HexForce_Reinforcements_and_HexPly_Prepregs_for_Industrial.pdf
- [11] J. E. Jam, B. Eftari, S. H. Taghavian, A new improved high-order theory for analysis of free vibration of sandwich panels. *Polymer Composites*, Vol. 31, pp. 2042–2048, 2010.
- [12] H. Schwarts-Givli, O. Rabinovitch, Y. Frostig, Free vibration of delaminated unidirectional sandwich panels with a transversely flexible core and general boundary conditions-A high order approach, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 10, pp. 99–131, 2008.
- [13] C. N. Phan, Y. Frostig, G. A. Kardomateas, Analysis of sandwich beams with a compliant core and with in-plane rigidity-extended high order sandwich panel theory versus elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 79, No. 4, pp. 1-11, 2012.
- [14] Y. Frostig, O. T. Thomsen, Thermal buckling and post-buckling of sandwich panels with a transversely flexible core, *AIAA Journal*, Vol. 46, pp. 1976–1989, 2008.
- [15] Y. Frostig, O. T. Thomsen, Non-linear thermo-mechanical behaviour of delaminated curved sandwich panels with a compliant core, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, pp. 2218–2237, 2011.