



## تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با توزیع هدفمند نانو لوله‌های کربنی

جلال ترابی<sup>1</sup>، مجید بازدید وحدتی<sup>2</sup>، رضا انصاری خلخالی<sup>3\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

\* رشت، صندوق پستی 3756، [r\\_ansari@guilan.ac.ir](mailto:r_ansari@guilan.ac.ir)

### چکیده

در این مقاله کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته شده از کامپوزیت‌های تقویت شده با توزیع هدفمند نانو لوله‌های کربنی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص مکانیکی مؤثر ماده نانو کامپوزیت با استفاده از قانون ترکیب اصلاح شده ارائه گردیده است. روابط حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روابط کرنش-تغییر مکان غیرخطی دائل و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. با در نظر گرفتن حل غشایی معادلات تعادل در حالت خطی نیروهای پیش کمانش بدست آمده است. با بکارگیری روش تفاضل مربعات تعمیم یافته در راستای محوری و عملگر مشتق‌گیر متناوب در راستای محیطی معادلات پایداری گسسته‌سازی شده و دمای بحرانی کمانش محاسبه گردیده است. نتایج تحقیق حاضر با نتایج موجود در مقالات دیگر اعتبار سنجی شده و سپس تأثیر عوامل مختلف از جمله مقادیر کسر حجمی و نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی، شرایط مرزی و پارامترهای هندسی بر کمانش حرارتی پوسته مخروطی نانو کامپوزیت بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که مقادیر کسر حجمی و نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت تأثیر قابل توجهی بر پایداری حرارتی پوسته مخروطی ساخته شده از مواد نانو کامپوزیت دارد.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 خرداد 1394

پذیرش: 03 مرداد 1394

ارائه در سایت: 18 شهریور 1394

کلید واژگان:

کمانش حرارتی

پوسته مخروطی

نانو کامپوزیت‌های هدفمند

روش تفاضل مربعات تعمیم یافته

عملگر مشتق‌گیر متناوب

## Thermal buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells

Jalal Torabi, Majid Bazdid-Vahdati, Reza Ansari Kalkhali\*

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran

\* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, [r\\_ansari@guilan.ac.ir](mailto:r_ansari@guilan.ac.ir)

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 09 June 2015  
Accepted 25 July 2015  
Available Online 09 September 2015

#### Keywords:

Thermal buckling analysis  
Conical shell  
Functionally graded carbon nanotube reinforced composite  
generalized differential quadrature  
Periodic differential operators

### ABSTRACT

In the present study, thermal buckling analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite (FG-CNTRC) conical shells is presented. The effective material properties of FG-CNTRCs are determined using the extended rule of mixture. By employing the Hamilton's principle and based on first-order shear deformation theory and Donnell strain-displacement relations, the governing equations are obtained. The membrane solution of linear equilibrium equations is considered to obtain the pre-buckling force resultants. Using the generalized differential quadrature method in axial direction and periodic differential operators in circumferential direction, the stability equations are discretized and the critical buckling temperature difference of shell is obtained. The accuracy of the present work is first validated by the results given in the literature and then the impacts of involved parameters such as volume fractions and types of distributions of carbon nanotubes, boundary conditions and geometrical parameters on thermal buckling of functionally graded nanocomposite conical shell are investigated. The results indicate that the values of volume fractions and types of distributions of carbon nanotubes along the thickness direction play an important role on thermal instability of FG-CNTRC conical shells.

### 1- مقدمه

را بر آن داشته تا با بکارگیری مواد پیشرفته در این سازه‌ها عملکرد آن‌ها را بهبود بخشند.

توسعه مواد هدفمند<sup>1</sup> در سالیان اخیر، زمینه تحقیقاتی گسترده‌ای را

پوسته‌های استوانه‌ای، مخروطی و کروی کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مختلف مهندسی از جمله صنایع هوافضا، دریایی و نیروگاهی دارند. همچنین پیشرفت‌های ایجاد شده در زمینه تکنولوژی‌های مربوط به علوم مواد، محققان

1- Functionally graded materials

Please cite this article using:

J. Torabi, M. Bazdid-Vahdati, R. Ansari Kalkhali, Thermal buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite conical shells, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 137-146, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

پنل‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند محاط شده توسط بستر الاستیک را تحت بارگذاری حرارتی مطالعه نمودند. جهت تعیین دمای بحرانی کمانش و مسیر تعادل پس‌کمانش از روش اغتشاش منفرد<sup>6</sup> استفاده شد.

مرادی دستجردی و همکارانش [22] ارتعاشات و انتشار موج تنش در پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را با استفاده از روش بدون مش<sup>7</sup> مطالعه نمودند. در روش بدون مش، به منظور تقریب میدان جابجایی از توابع شکل حداقل مربعات متحرک<sup>8</sup> استفاده شد. همچنین از روش تبدیل<sup>9</sup> برای اعمال شرایط مرزی هندسی بهره برده شد. حسینی نیز [23] تحلیل فرکانسی پوسته‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند را با بکارگیری روش بدون مش هیبرید<sup>10</sup> که بر پایه روش تفاضل محدود تعمیم یافته<sup>11</sup> است، ارائه کرد. در این تحقیق فرض شد که سطح داخلی پوسته توسط یک بار ضربه‌ای<sup>12</sup> تحریک می‌گردد.

شن [24، 25] کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را تحت بارگذاری حرارتی و پیچشی بررسی نمود. همچنین شن و ژیانگ [26، 27] ارتعاشات غیرخطی تحت بارگذاری حرارتی و پس‌کمانش تحت بارگذاری مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند را بررسی نمودند. در تمامی این تحقیقات روابط حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و روابط هندسی غیرخطی ون کارمن استخراج گردید و با استفاده از روش اغتشاش بهبود یافته<sup>13</sup> حل شد. همچنین ربانی بیدگلی و همکارانش [28] ارتعاشات و کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هدفمند که بر روی بستر الاستیک قرار داشته و حاوی سیال ویسکوز می‌باشد، مورد بررسی قرار دادند. روابط حاکم با استفاده از تئوری پوسته میندلین<sup>14</sup> ارائه شد و از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته برای حل استفاده شد.

مطالعات محدودی در زمینه بررسی رفتار مکانیکی پوسته‌های مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند صورت گرفته است. حیدرپور و همکارانش [29] ارتعاشات پوسته‌های مخروطی نانو کامپوزیتی دوار را بررسی نمودند. معادلات حرکت بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با استفاده از اصل همپلتون استخراج گردید و با بکارگیری روش تفاضل مربعات تعمیم یافته حل شد. همچنین جم و کیانی [30] کمانش پوسته‌های مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را تحت فشار عرضی مورد بررسی قرار دادند. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری پوسته دانل و با استفاده از اصل جابجایی مجازی، معادلات حاکم استخراج گردید. جهت حل معادلات پایداری و بدست آوردن بار بحرانی کمانش، از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته و توابع مثلثاتی به ترتیب در راستای محوری و محیطی استفاده شد.

با توجه به مطالعه دبیره موجود توسط نویسندگان، تاکنون کمانش حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند مورد بررسی قرار نگرفته است. از اینرو در تحقیق حاضر به این موضوع پرداخته می‌شود. علاوه بر توزیع یکنواخت نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت،

جهت مطالعه رفتار مکانیکی سازه‌های ساخته شده از این مواد به وجود آورده است. از طرفی خواص منحصر به فرد نانو لوله‌های کربنی<sup>1</sup> موجب شده است تا از این مواد پیشرفته به عنوان یک تقویت کننده مناسب در مواد کامپوزیتی استفاده شود. محققان ایده بکار رفته در مواد هدفمند را در ساخت کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی بکار برده و با توزیع هدفمند نانولوله‌ها در کامپوزیت‌ها، ماده‌ای با عنوان کامپوزیت‌های هدفمند تقویت شده با نانو لوله کربنی<sup>2</sup> ارائه نمودند.

در ادامه مقاله به جهت سهولت، بجای عبارت کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی از عبارت نانو کامپوزیت‌ها استفاده می‌شود. بررسی تاثیر توزیع هدفمند نانو لوله‌های کربنی بر رفتار مکانیکی سازه‌های ساخته شده از نانو کامپوزیت‌ها اولین بار توسط شن ارائه گردید [1]. وی در این تحقیق سعی نمود تا ضمن بررسی خمش غیرخطی ورق‌های ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند، با توزیع نانو لوله‌های کربنی در یک راستای مطلوب، خواص مکانیکی سازه را بهبود ببخشد. پس از این تحقیق، مطالعات بسیاری در زمینه بررسی رفتار مکانیکی تیرها [2-7]، ورق‌ها [8-13]، پنل‌ها [14-21] و پوسته‌های [22-30] ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند صورت گرفته است.

عراق و همکارانش [14] رفتار ارتعاشی پنل‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند را بر اساس روش ایشلیبی-موری-تاناکا مورد مطالعه قرار دادند. معادلات حرکت با استفاده از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته دو بعدی گسسته‌سازی گردیده و با اعمال شرایط مرزی، فرکانس‌های طبیعی سازه تعیین شد. همچنین یاس و همکارانش [15] با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی رفتار ارتعاشی پنل‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را بررسی نمودند.

بررسی تنش‌های ایجاد شده بواسطه رفتار خمشی پنل‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند تحت بارگذاری مکانیکی توسط مهرابادی و عراق [16] مورد مطالعه قرار گرفت. آن‌ها دریافتند که کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی می‌تواند باعث کاهش تنش‌های محوری و محیطی در سطح داخلی پوسته شود. تحلیل ارتعاشی پنل‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی محاط شده توسط لایه‌های پیرو الکتریک توسط علی بیگلو مطالعه شد [17]. با فرض شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در چهار لبه پنل و بکارگیری بسط سری فوریه در راستای محوری و محیطی و همچنین فضای حالت در راستای ضخامت، معادلات دیفرانسیلی فضای حالت حل گردیدند.

شن و ژیانگ [18] ارتعاشات غیرخطی پنل‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را تحلیل نمود. در این تحقیق اثرات بستر الاستیک و بارگذاری حرارتی نیز در نظر گرفته شد. همچنین در تحقیق دیگری، با استفاده از روش بدون المان کی-پی-ریتز<sup>3</sup>، لی و همکارانش [19] ارتعاشات آزاد پنل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی را مطالعه نمودند.

لیو و همکارانش [20] پس‌کمانش پنل‌های استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را تحت بارگذاری فشاری محوری بررسی نمودند. برای دستیابی به مسیر پس‌کمانش روش طول قوس<sup>4</sup> در کنار روش نیوتن-رافسون اصلاح شده<sup>5</sup> بکار برده شد. همچنین شن و ژیانگ [21] پس‌کمانش

6- Singular perturbation technique  
7- Mesh free  
8- Moving Least squares shape function  
9- Transformation method  
10- Hybrid mesh free method  
11- Generalized finite difference  
12- Shock loading  
13- Improved perturbation technique  
14- Mindlin

1- Carbon nanotubes  
2- Functionally graded carbon nanotube-reinforced composite  
3- Element-free kp-Ritz method  
4- Arc length  
5- Modified Newton-Raphson

سطح داخلی تنها شامل نانو لوله‌های کربنی می‌باشد، حال آنکه توزیع نوع FGV برعکس می‌باشد. در توزیع FGO، سطح میانی پوسته کاملاً از نانو لوله تشکیل شده و سطح خارجی و داخلی تنها از ماتریس تشکیل شده است. در توزیع نوع FGX نیز سطح میانی تنها حاوی ماتریس بوده و سطوح داخلی و خارجی کاملاً حاوی نانو لوله می‌باشد. کسر حجمی توزیع نانو لوله کربنی در راستای ضخامت برای حالت‌های مختلف به صورت روابط (4)-(8) ارائه می‌شود [30]:

$$UD: V_{cn} = V_{cn}^* \quad (4)$$

$$FGA: V_{cn} = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{cn}^* \quad (5)$$

$$FGV: V_{cn} = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{cn}^* \quad (6)$$

$$FGO: V_{cn} = \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) V_{cn}^* \quad (7)$$

$$FGX: V_{cn} = 2\left(\frac{2|z|}{h}\right) V_{cn}^* \quad (8)$$

در روابط بالا  $V_{cn}^*$  به صورت رابطه (9) بیان می‌شود:

$$V_{cn}^* = \frac{w_{cn}}{w_{cn} + \left(\frac{\rho^{cn}}{\rho^m}\right) - \left(\frac{\rho^{cn}}{\rho^m}\right) w_{cn}} \quad (9)$$

که در رابطه (9)،  $w_{cn}$  کسر جرمی نانو لوله کربنی در کامپوزیت بوده و  $\rho^{cn}$  و  $\rho^m$  به ترتیب بیانگر چگالی ماده زمینه و نانو لوله می‌باشد. چگالی کلی نانو کامپوزیت نیز از رابطه (10) به دست می‌آید:

$$\rho = V_{cn}\rho^{cn} + V_m\rho^m \quad (10)$$

همچنین ضریب انبساط حرارتی طولی و عرضی نانو کامپوزیت نیز مطابق روابط (11) و (12) ارائه می‌شود [24]:

$$\alpha_{11} = \frac{V_{cn}E_{11}^{cn}\alpha_{11}^{cn} + V_mE^m\alpha^m}{V_{cn}E_{11}^{cn} + V_mE^m} \quad (11)$$

$$\alpha_{22} = (1 + \nu_{12}^{cn})V_{cn}\alpha_{22}^{cn} + (1 + \nu^m)V_m\alpha^m - \nu_{12}\alpha_{11} \quad (12)$$

که در این روابط،  $\alpha_{11}^{cn}$  و  $\alpha_{22}^{cn}$  و  $\alpha^m$  به ترتیب بیانگر ضریب انبساط حرارتی نانو لوله و ماتریس بوده و  $\nu_{12}^{cn}$  و  $\nu^m$  نیز به ترتیب ضریب پواسون نانو لوله و ماتریس می‌باشند. همچنین ضریب پواسون نانو کامپوزیت نیز از رابطه (13) به دست می‌آید:

$$\nu_{12} = V_{cn}\nu_{12}^{cn} + V_m\nu^m \quad (13)$$

### 3- روابط حاکم

پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را با شعاع کوچک  $R_1$ ، شعاع بزرگ  $R_2$ ، ضخامت  $h$  و طول  $L$  در نظر بگیرید که در شکل 1 نشان داده شده است. دستگاه مختصات  $(x, y, z)$  بر روی سطح میانی پوسته در نظر گرفته می‌شود که مختصه  $x$  در راستای محوری، مختصه  $y$  در راستای محیطی و مختصه  $z$  در راستای عمود بر سطح میانی و به سمت خارج پوسته می‌باشد. با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده، تغییر مکان هر نقطه دلخواه از پوسته در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  را می‌توان بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به صورت (14) بیان کرد:

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) \\ V(x, y, z, t) \\ W(x, y, z, t) \end{cases} = \begin{cases} u(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ v(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{cases} \quad (14)$$

که در رابطه بالا  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب معرف تغییر مکان سطح میانی پوسته در راستای محوری، محیطی و عرضی بوده و  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  نیز بیانگر دوران سطح عمود حول محور  $x$  و  $y$  می‌باشند. روابط کرنش-تغییر مکان

چهار نوع توزیع هدفمند نیز در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی مؤثر ماده نانو کامپوزیت هدفمند با استفاده از قانون ترکیب تعمیم یافته<sup>1</sup> ارائه شده است. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و همچنین روابط کرنش-تغییر مکان دانل، معادلات تعادل با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده است. با در نظر گرفتن حل غشایی معادلات تعادل خطی، نیروهای پیش-کمانش تعیین شده است. همچنین با استفاده از معیار تعادل همسایگی<sup>2</sup> معادلات پایداری استخراج شده است. جهت گسسته‌سازی عددی معادلات پایداری و به دست آوردن اختلاف دمای بحرانی کمانش از روش تفاضل مربعات تعمیم یافته و عملگر مشتق گیر متناوب به ترتیب در راستای محوری و محیطی استفاده شده است. با استفاده از عملگر مشتق گیر متناوب بجای روش تفاضل مربعات تعمیم یافته، دیگر نیازی به ارضا کردن روابط سازگاری در معادلات مربوط به راستای محیطی نیست. همچنین بکارگیری روش GDO در راستای محوری، امکان بررسی شرایط مرزی متفاوت را فراهم آورده است. در انتها نیز با ارائه و بررسی نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف از جمله کسر حجمی و نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی، شرایط مرزی مختلف و شرایط هندسی متفاوت بر دمای بحرانی کمانش سازه مورد بررسی قرار گرفته است.

### 2- خواص مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی مدرج تابعی

ماده نانو کامپوزیت به صورت ترکیبی از نانو لوله‌های کربنی تک لایه<sup>3</sup> به عنوان تقویت کننده و ماتریس ایزوتروپ<sup>4</sup> فرض شده است. توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت به صورت یکنواخت و هدفمند در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی مؤثر نانو کامپوزیت‌ها با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی متفاوتی پیش‌بینی می‌شود که از آن جمله می‌توان به مدل موری-تاناکا و قانون ترکیب اشاره کرد. بر اساس قانون ترکیب تعمیم یافته، مدول یانگ و مدول برشی مؤثر نانو کامپوزیت به صورت روابط (1)-(3) ارائه می‌شود [24].

$$E_{11} = \eta_1 V_{cn} E_{11}^{cn} + V_m E^m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{cn}}{E_{22}^{cn}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{cn}}{G_{12}^{cn}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (3)$$

که در این روابط  $E_{11}^{cn}$ ،  $E_{22}^{cn}$  و  $G_{12}^{cn}$  به ترتیب بیانگر مدول یانگ و مدول برشی نانو لوله کربنی بوده و  $E^m$  و  $G^m$  نیز خواص مرتبط با ماتریس می‌باشند. همچنین  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) پارامتر کارایی<sup>5</sup> نانو لوله کربنی می‌باشد که جهت بر شمردن اثرات اندازه<sup>6</sup> در خواص مواد در نظر گرفته شده است و از طریق مطابقت نتایج حاصل از قانون ترکیب تعمیم یافته با مدل‌های میکرومکانیکی تعیین می‌گردد. علاوه بر این  $V_{cn}$  و  $V_m$  نیز به ترتیب کسر حجمی نانو لوله کربنی و ماتریس می‌باشند که از رابطه  $V_{cn} + V_m = 1$  پیروی می‌کنند.

علاوه بر توزیع یکنواخت (UD)، چهار نوع توزیع هدفمند نیز در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است که عبارتند از: FGA، FGV، FGO و FGX. در توزیع نوع FGA، سطح خارجی پوسته کاملاً از ماتریس تشکیل شده و

1- Extended rule of mixture  
2- Adjacent equilibrium criteria  
3- Single-walled carbon nanotube  
4- Isotropic matrix  
5- Efficiency parameters  
6- Size effect

در نتیجه منته‌های نیرو و ممان مطابق رابطه (19) و (20) بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ 0 \\ M_x^T \\ M_y^T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

که در رابطه (21)،  $k_s$  بیانگر ضریب اصلاح برشی<sup>1</sup> می‌باشد و مقدار آن برابر  $k_s = 5/6$  در نظر گرفته می‌شود [30]. همچنین ضرایب  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$  و  $D_{ij}$  بر طبق رابطه (22) خواهند بود:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (22)$$

منته‌های نیرو و ممان بواسطه بارگذاری حرارتی نیز به صورت رابطه (23) ارائه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} \Delta T dz, \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} \Delta T z dz$$

با توجه به روابط ارائه شده برای کرنش‌ها، تنش‌ها و منته‌های نیرو و با استفاده از اصل همیلتون، معادلات تعادل غیرخطی پوسته مخروطی به صورت روابط (24)-(28) به دست می‌آید:

$$N_{x,x} + \frac{N_{xy,y}}{R(x)} + \frac{\sin(\beta)}{R(x)} (N_x - N_y) = 0, \quad (24)$$

$$\frac{N_{yy,y}}{R(x)} + N_{xy,x} + \frac{2 \sin(\beta)}{R(x)} N_{xy} + \frac{\cos(\beta) Q_{yz}}{R(x)} = 0, \quad (25)$$

$$Q_{xz,x} + \frac{Q_{yz,y}}{R(x)} + \frac{\sin(\beta)}{R(x)} Q_{xz} - \frac{\cos(\beta) N_y}{R(x)} - \frac{1}{R(x)} (R(x) N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y})_{,x} - \frac{1}{R(x)} \left( \frac{1}{R(x)} N_y w_{,y} + N_{xy} w_{,x} \right)_{,y} = 0, \quad (26)$$

$$M_{x,x} + \frac{M_{xy,y}}{R(x)} + \frac{\sin(\beta)}{R(x)} (M_x - M_y) - Q_{xz} = 0, \quad (27)$$

$$M_{xy,x} + \frac{M_{y,y}}{R(x)} + \frac{2 \sin(\beta)}{R(x)} M_{xy} - Q_{yz} = 0. \quad (28)$$

همچنین شرایط مرزی کلی نیز در دو انتهای پوسته به صورت رابطه (29) ارائه می‌شود:

$$N_x \delta u = N_{xy} \delta v = Q_{xz} \delta w = M_x \delta \phi_x = M_{xy} \delta \phi_y = 0 \quad (29)$$

به منظور دستیابی به دمای بحرانی کمانش سازه باید معادلات پایداری ارائه گردد. اما پیش از آن به محاسبه نیروهای پیش کمانش پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه تغییر شکل‌ها در حالت پیش کمانش کوچک هستند، می‌توان نیروهای پیش کمانش را با در نظر گرفتن حل غشایی معادلات تعادل خطی به صورت رابطه (30) به دست آورد [30, 32, 33]:

$$N_x^0 = - \frac{(A_{22} N_x^T - A_{12} N_y^T) \sin(\beta) L}{r(x) A_{22} \ln \left( 1 + \frac{L \sin(\beta)}{R_1} \right)}$$

غیرخطی بر اساس تئوری دانل به صورت رابطه (15) تعریف می‌شوند [30]:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_y + \frac{w_{,y}}{R(x)} - \frac{\cos(\beta)}{R(x)} v \\ \varphi_x + w_{,x} \end{Bmatrix}$$

که در رابطه (15)، روابط (16) حاکم است:

$$\epsilon_x^0 = u_{,x}, \quad \epsilon_y^0 = \frac{v_{,y}}{R}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{u_{,y}}{R} + v_{,x},$$

$$\chi_x = \varphi_{x,x}, \quad \chi_y = \frac{\varphi_{y,y}}{R}, \quad \chi_{xy} = \frac{\varphi_{x,y}}{R} + \varphi_{y,x}$$

$$\beta_x = -w_{,x}, \quad \beta_y = \frac{1}{R} (\delta_1 v - w_{,y}) \quad (16)$$

در روابط (14) و (15)،  $\epsilon_x^0$ ،  $\epsilon_y^0$  و  $\gamma_{xy}^0$  به ترتیب معرف کرنش غشایی محوری، محیطی و برشی بوده و  $\chi_x$ ،  $\chi_y$  و  $\chi_{xy}$  نیز تغییرات انحنای می‌باشند. همچنین  $\gamma_{yz}$  و  $\gamma_{xz}$  بیانگر کرنش‌های برشی عرضی می‌باشند. با در نظر گرفتن بارگذاری حرارتی، رابطه تنش-کرنش بر اساس قانون هوک به صورت رابطه (17) بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \quad (17)$$

که ضرایب  $Q_{ij}$  به صورت (18) بیان می‌شوند:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

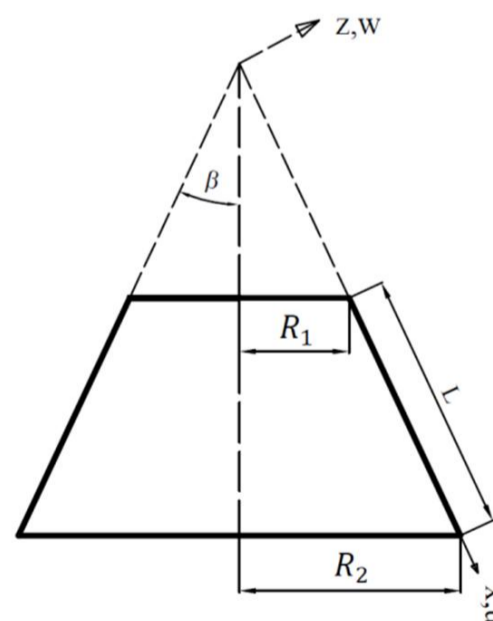
$$Q_{12} = \frac{\nu_{21} E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \quad (18)$$

مطابق با تنش‌های ارائه شده در رابطه (17)، منته‌های نیرو و ممان به صورت رابطه (19) حاصل می‌شوند:

$$(N_i, M_i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i(1, z) dz, \quad (i = x, y, xy)$$

$$Q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i dz, \quad (i = xz, yz) \quad (19)$$



شکل 1 نمای کلی از هندسه پوسته مخروطی

1- Shear correction factor

در رابطه بالا  $n_x$  تعداد کل نقاط گره‌ای در راستای محیطی بوده و  $\zeta_{ij}^r$  معرف ضرایب وزنی می‌باشد. در صورتی که بردار ستونی  $F$  به صورت (40) تعریف شود:

$$F = [F_j] = [f(x_j)] = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n_x})]^T \quad (40)$$

که در آن  $f(x_j)$  مقادیر گرهی تابع  $f(x)$  در نقطه  $x = x_j$  باشد، عملگر ماتریسی مشتق‌گیر بر اساس روش GDO و رابطه (39)، به صورت رابطه (41) تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} (F) = \bar{D}_x^r F = [\bar{D}_x^r]_{i,j} \{F_j\} \quad (41)$$

که در رابطه بالا

$$\bar{D}_x^r = [\bar{D}_x^r]_{i,j} = \zeta_{ij}^r, \quad i, j = 1: n_x \quad (42)$$

در رابطه (42)، بالا نویس  $r$  بیانگر مرتبه مشتق بوده و ضرایب وزنی  $\zeta_{ij}^r$  به صورت رابطه (43) بیان می‌شوند [34]:

$$\zeta_{ij}^r = \begin{cases} I_x, & r = 0 \\ \frac{\mathcal{L}(x_i)}{(x_i - x_j)\mathcal{L}(x_j)}, & \begin{cases} i \neq j \text{ و } i, j = 1, \dots, n_x \\ r = 1 \end{cases} \\ r \left[ \zeta_{ij}^1 \zeta_{ii}^{r-1} - \frac{\zeta_{ij}^{r-1}}{x_i - x_j} \right], & \begin{cases} i \neq j \text{ و } i, j = 1, \dots, n_x \\ r = 2, 3, \dots, n_x - 1 \end{cases} \\ - \sum_{j=1, j \neq i}^{n_x} \zeta_{ij}^r, & \begin{cases} i = j \text{ و } i, j = 1, \dots, n_x \\ r = 1, 2, \dots, n_x - 1 \end{cases} \end{cases} \quad (43)$$

در رابطه بالا  $I_x$  ماتریس همانی  $n_x \times n_x$  بوده و  $\mathcal{L}(x_i)$  نیز مطابق رابطه (44) بیان می‌شود:

$$\mathcal{L}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n_x} (x_i - x_j) \quad (44)$$

تحقیقات گذشته [31] نشان داده است که توزیع نقاط گرهی به صورت چبیشف-گاوس-لوباتو بیشترین همگرایی و پایداری را نتیجه می‌دهد. در نتیجه در این تحقیق نیز از این نوع توزیع نقاط گره‌ای استفاده می‌شود که به صورت رابطه (45) بیان می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{i-1}{n_x-1} \pi \right) L \quad (45)$$

#### 4-2- عملگر مشتق‌گیر متناوب

با توجه به متناوب بودن تغییر مکان‌ها در راستای محیطی، استفاده از یک عملگر متناوب در این راستا موجب می‌شود تا شرایط تناوبی به طور ذاتی ارضا شده و دیگر نیازی به اعمال شرایط سازگاری در مرزهای راستای محیطی نباشد. در این روش، عملگر مشتق‌گیر با استفاده از مشتقات توابع متناوب سینک<sup>2</sup>، که همان توابع پایه در روش همپوشانی<sup>3</sup> می‌باشند، به دست می‌آید. عملگرهای مشتق‌گیر ماتریسی مرتبه اول و دوم به صورت (46) می‌باشند [35, 36]:

$$\bar{D}_y^1 = [a_{i,j}], \quad \bar{D}_y^2 = [b_{i,j}]. \quad (46)$$

که ضرایب  $a_{i,j}$  و  $b_{i,j}$  به صورت رابطه (47) و (48) بیان می‌گردند:

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{i,1} = \frac{(-1)^{i-1}}{2} \cot \frac{\pi(i-1)}{n_y} \\ a_{1,j} = \frac{(-1)^{n_y-j+1}}{2} \cot \frac{\pi(n_y-j+1)}{n_y} \\ a_{i+1,j+1} = a_{i,j} \end{cases} \quad i, j = 2, \dots, n_y \quad (47)$$

$$N_y^0 = 0, N_{xy}^0 = 0 \quad (30)$$

حال با توجه به نیروهای پیش‌کمانش می‌توان معادلات پایداری را با استفاده از معیار تعادل همسایگی به دست آورد. بر اساس این معیار معادلات پایداری به صورت روابط (31)-(35) حاصل می‌شود:

$$N_{x,x}^1 + \frac{N_{xy,y}^1}{R(x)} + \frac{\sin(\beta)}{R(x)} (N_x^1 - N_y^1) = 0, \quad (31)$$

$$\frac{N_{yy,y}^1}{R(x)} + N_{xy,x}^1 + \frac{2 \sin(\beta)}{R(x)} N_{xy}^1 + \frac{\cos(\beta)}{R(x)} Q_{yz}^1 = 0, \quad (32)$$

$$Q_{xz,x}^1 + \frac{Q_{yz,y}^1}{R(x)} + \frac{\sin(\beta)}{R(x)} Q_{xz}^1 - \frac{\cos(\beta)}{R(x)} N_y^1 + \frac{(A_{22} N_x^T - A_{12} N_\theta^T) \sin(\beta) L}{R(x) A_{22} \ln \left( 1 + \frac{L \sin(\beta)}{R_1} \right)} w_{xx}^1 = 0 \quad (33)$$

$$M_{x,x}^1 + \frac{M_{xy,y}^1}{R(x)} + \frac{\sin(\beta)}{R(x)} (M_x^1 - M_y^1) - Q_{xz}^1 = 0, \quad (34)$$

$$M_{xy,x}^1 + \frac{M_{yy,y}^1}{R(x)} + \frac{2 \sin(\beta)}{R(x)} M_{xy}^1 - Q_{yz}^1 = 0. \quad (35)$$

در روابط بالا، بالا نویس 1 بیانگر حالت پایداری می‌باشد. در واقع نتیجه‌های ارائه شده با بالا نویس 1 همان بخش خطی شده و نمو یافته نتیجه‌های بیان شده در روابط (20) و (21) می‌باشند. حال با جایگذاری میدان جابجایی در روابط (31)-(35)، یک مسئله مقادیر ویژه حاصل می‌شود که با حل کردن آن دمای بحرانی کمانش به دست می‌آید.

در این تحقیق سه نوع شرط مرزی تکیه‌گاه ساده (S)، تکیه‌گاه گیردار (C) و تکیه‌گاه آزاد (F) در دو انتهای پوسته در نظر گرفته می‌شود که شرایط هر یک به صورت (36) تا (38) ارائه می‌شود:

• تکیه‌گاه گیردار:

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi \quad (36)$$

• تکیه‌گاه ساده:

$$u = v = w = \varphi_y = 0, \quad M_x = 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi \quad (37)$$

• تکیه‌گاه آزاد:

$$u = v = Q_{xz} = M_x = M_{xy} = 0 \quad 0 \leq y \leq 2\pi \quad (38)$$

#### 4- حل معادلات پایداری

جهت حل معادلات پایداری، مؤلفه‌های تغییر مکان در دو راستای محوری و محیطی به صورت عددی گسسته‌سازی می‌شوند. بدین منظور در راستای محوری از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته و در راستای محیطی از یک عملگر مشتق‌گیر متناوب استفاده خواهد شد. در واقع با توجه به اینکه تغییر مکان‌ها در راستای محیطی در بازه  $[0, 2\pi]$  متناوب می‌باشند، استفاده از این عملگر متناوب فرایند گسسته‌سازی معادلات را تسهیل کرده و دیگر نیازی به اعمال شرایط سازگاری نخواهد بود. در ادامه مختصری از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته و عملگر مشتق‌گیر متناوب ارائه می‌گردد.

#### 4-1- روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته

بر اساس روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، مشتق مرتبه  $m$  تابع  $f(x)$  به صورت مجموع خطی از حاصلضرب ضرایب وزنی<sup>1</sup> و مقادیر گره‌ای تابع به صورت رابطه (39) به دست می‌آید [34]:

$$\left. \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{n_x} \zeta_{ij}^m f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n_x \quad (39)$$

2- Periodic Sinc Function  
3- Collocation Method

1- Weighting coefficient

پوسته‌های مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند ارائه می‌شود. بدین منظور در ابتدا خواص مکانیکی مؤثر نانو کامپوزیت بیان می‌گردد. ماده پلی متیل متاکریلیت<sup>2</sup> (PMMA) به عنوان ماتریس انتخاب می‌شود که مدول یانگ، چگالی و ضریب پواسون آن عبارت است از [24]:

$$E^m = 2.5 \text{ GPa}, \rho^m = 1150 \text{ kg/m}^3, \nu^m = 0.34$$

همچنین نانو لوله‌های کربنی تک لایه نوع آرمچیر<sup>3</sup> (10, 10) به عنوان تقویت کننده کامپوزیت در نظر گرفته شده است که با در نظر گرفتن ضخامت مؤثر  $h = 0.067 \text{ nm}$  برای نانو لوله، خواص آن به صورت زیر می‌باشد [24]:

$$E_{11}^{cn} = 5.6466 \text{ TPa}, \quad E_{22}^{cn} = 7.0800 \text{ TPa}, \\ G_{12}^{cn} = 1.9445 \text{ TPa}, \quad \nu_{12}^{cn} = 0.175, \\ \rho^{cn} = 1400 \text{ kg/m}^3$$

ضرایب پارامتر کارایی نانو کامپوزیت‌ها از طریق مطابقت نتایج حاصل از قانون ترکیب تعمیم یافته و روش دینامیک مولکولی محاسبه می‌گردد. در اینجا ضرایب  $\eta_1, \eta_2$  و  $\eta_3$  برای سه مقدار مختلف کسر حجمی نانو لوله‌ها، به صورت زیر ارائه می‌شود [24]:

$$V_{cn}^* = 0.12 : \eta_1 = 0.137, \eta_2 = 1.022, \eta_3 = 0.715 \\ V_{cn}^* = 0.17 : \eta_1 = 0.142, \eta_2 = 1.626, \eta_3 = 1.138 \\ V_{cn}^* = 0.28 : \eta_1 = 0.141, \eta_2 = 1.585, \eta_3 = 1.109$$

همچنین لازم به ذکر است که توزیع درجه حرارت در راستای ضخامت پوسته به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی متفاوتی در دو انتهای پوسته لحاظ شده است که به طور مثال شرایط مرزی  $CS$  بیان می‌دارد که انتهای موجود در  $x = 0$  دارای تکیه‌گاه گیردار بوده و لبه دیگر پوسته در  $x = L$  را تکیه‌گاه ساده در بر می‌گیرد.

### 5-1- اعتبار سنجی نتایج

در این بخش نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج موجود در سایر مقالات اعتبار سنجی می‌گردد. از این رو، نتایج حاصل برای کمانش حرارتی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند با نتایج ارائه شده توسط شن و ژیانگ [24] در جدول 1 مقایسه شده است. لازم به ذکر است در صورتی که زاویه راس مخروط نزدیک به صفر قرار داده شود، می‌توان نتایج را برای پوسته‌های استوانه‌ای به دست آورد. همچنین با توجه به اینکه نتایج در مرجع [24] با فرض وابستگی خواص ماده به دما ارائه شده است، در تحقیق حاضر نیز به منظور ارائه نتایج در جدول 1 خواص نانو لوله‌های کربنی در

جدول 1 مقایسه دمای بحرانی کمانش برای پوسته استوانه‌ای نانو کامپوزیت هدفمند

$$(L = \sqrt{100R_1 h}, \frac{R}{h} = 100, h = 1 \text{ mm})$$

مرجع [24]	نتایج حاضر		$V_{cn}^*$
376/55	378/64	UD	0/12
374/64	377/53	FGA	
366/12	369/47	FGO	
388/56	389/53	FGX	
383/90	389/02	UD	0/17
373/90	380/06	FGO	
383/01	388/48	FGA	
397/21	401/21	FGX	
367/41	367/94	UD	0/28
359/99	359/64	FGO	
366/35	369/73	FGA	
382/83	382/19	FGX	

$$\begin{cases} b_{11} = -\frac{n_y^2}{12} - \frac{1}{6} \\ b_{i,1} = \frac{(-1)^{i-2}}{2 \sin^2 \frac{\pi(i-1)}{n_y}} \\ b_{1,j} = \frac{(-1)^{n_y-j}}{2 \sin^2 \frac{\pi(n_y-j+1)}{n_y}} \\ b_{i+1,j+1} = b_{i,j} \end{cases} \quad i, j = 2, \dots, n_y \quad (48)$$

که در رابطه بالا،  $n_y$  تعداد نقاط گره‌ای در راستای محیطی می‌باشد.

### 4-3- گسسته‌سازی معادلات حرکت

با توجه به عملگرهای مشتق گیر که در بخش‌های 4-1 و 4-2 ارائه گردید، در این بخش معادلات پایداری گسسته‌سازی می‌شوند. بدین منظور مقادیر متغیرهای تغییر مکان در نقطه گره‌ای به صورت رابطه (49) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} U^T &= [U_{11}, U_{12}, \dots, U_{N_x N_y}] \\ V^T &= [V_{11}, V_{12}, \dots, V_{N_x N_y}] \\ W^T &= [W_{11}, W_{12}, \dots, W_{N_x N_y}] \\ \Phi_x^T &= [\Phi_{x11}, \Phi_{x12}, \dots, \Phi_{x N_x N_y}] \\ \Phi_y^T &= [\Phi_{y11}, \Phi_{y12}, \dots, \Phi_{y N_x N_y}] \end{aligned} \quad (49)$$

با توجه به اینکه مقادیر گرهی متغیرهای مکان در دو راستای محوری و محیطی در نظر گرفته شده‌اند، به منظور گسسته‌سازی معادلات پایداری، عملگرهای مشتق گیر ماتریسی به صورت رابطه (50) ارائه می‌گردند:

$$\begin{cases} D_x^r = I_y \otimes \bar{D}_x^r \\ D_y^r = \bar{D}_y^r \otimes I_x \quad (r = 1, 2) \\ D^0 = I_y \otimes I_x \end{cases} \quad (50)$$

در رابطه بالا،  $I_y$  ماتریس همانی  $n_y \times n_y$  می‌باشد. همچنین  $\otimes$  بیانگر ضرب کرونگر<sup>1</sup> می‌باشد [35]. با توجه به رابطه (49) و (50)، معادلات پایداری پوسته مخروطی که در روابط (31)-(35) بیان شده‌اند، به صورت روابط (51)-(55) گسسته‌سازی می‌شوند:

$$L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W + L_{14}\Phi_x + L_{15}\Phi_y = 0, \quad (51)$$

$$L_{21}U + L_{22}V + L_{23}W + L_{24}\Phi_x + L_{25}\Phi_y = 0, \quad (52)$$

$$L_{31}U + L_{32}V + L_{33}W + L_{34}\Phi_x + L_{35}\Phi_y = 0, \quad (53)$$

$$L_{41}U + L_{42}V + L_{43}W + L_{44}\Phi_x + L_{45}\Phi_y = 0, \quad (54)$$

$$L_{51}U + L_{52}V + L_{53}W + L_{54}\Phi_x + L_{55}\Phi_y = 0. \quad (55)$$

که ضرایب  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 5$ ) شامل عملگرهای مشتق گیر عددی می‌باشد که در پیوست ارائه شده است. می‌توان روابط (51)-(55) را به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$(K - K_g)X = 0, \quad X^T = [U^T, V^T, W^T, \Phi_x^T, \Phi_y^T] \quad (56)$$

که در رابطه بالا  $K$  و  $K_g$  به ترتیب ماتریس سفتی و ماتریس سفتی هندسی می‌باشند. با گسسته‌سازی شرایط مرزی و جایگذاری آن‌ها در ماتریس‌های سفتی و حل مسئله مقادیر ویژه به دست آمده، اختلاف دمای بحرانی کمانش به دست می‌آید.

### 5- بحث و نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی متفاوتی به منظور بررسی کمانش حرارتی

2- Poly methyl methacrylate  
3- Armchair

1- Kronecker product

ترکیب ماده نانو کامپوزیت نیز بر رفتار سازه مورد ارزیابی قرار گیرد. شرایط مرزی پوسته در دو انتها به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است. نتایج جدول 3 نشان می‌دهد که افزایش زاویه راس مخروط پایداری سازه را کاهش داده و اختلاف دمای بحرانی کمانش می‌یابد. از طرفی مشاهده می‌شود که میزان کسر حجمی و نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی تأثیر به‌سزایی در رفتار کمانشی پوسته مخروطی دارد. بر خلاف انتظار، افزایش کسر حجمی نانو لوله کربنی موجب روند افزایشی یکنواختی در اختلاف دمای بحرانی کمانش نشده به‌طوریکه پوسته با کسر حجمی  $V_{cn}^* = 0.17$  و  $V_{cn}^* = 0.28$  به ترتیب بیشترین و کمترین پایداری حرارتی را دارا می‌باشند. از طرف دیگر توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت از نوع FGX منجر به ایجاد بیشترین دمای بحرانی کمانش در سازه می‌شود حال آنکه پوسته با توزیع نوع FGO کمترین مقاومت کمانشی را دارد.

تأثیر شرایط مرزی بر رفتار کمانشی پوسته مخروطی نانو کامپوزیتی هدفمند تحت بارگذاری حرارتی به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی و دو نوع توزیع نانو لوله کربنی در جدول 4 بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، انتخاب شرایط مرزی منعطف‌تر در دو انتهای سازه، پایداری پوسته را کاهش داده و منجر به نزول دمای بحرانی کمانش می‌شود. همچنین استنباط می‌گردد که با در نظر گرفتن شرایط مرزی انعطاف پذیرتر، تأثیر نوع توزیع هدفمند نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت بر دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

تغییرات اختلاف دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند بر حسب نسبت طول به شعاع به ازای شرایط مرزی متفاوت و دو مقدار مختلف زاویه راس مخروط در شکل 2 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول به شعاع پایداری حرارتی سازه کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت طول به شعاع تأثیر شرایط مرزی پوسته بر دمای بحرانی کمانش نیز کاهش می‌یابد. البته قابل ذکر است که با کوتاه شدن طول پوسته، اثرات خمش در ناحیه پیش‌کمانش قابل ملاحظه می‌شود و دیگر حل غشایی جهت محاسبه نیروهای پیش‌کمانش مناسب نیست. به همین منظور نتایج برای نسبت طول به شعاع‌های بزرگتر از یک ارائه شده است.

تغییرات اختلاف دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند بر حسب نسبت شعاع به ضخامت به ازای انواع متفاوت توزیع هدفمند نانو لوله‌های کربنی و مقادیر مختلف کسر حجمی نانو لوله در شکل 3 ارائه شده است. شرایط مرزی پوسته در دو انتها گیردار فرض شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت شعاع به ضخامت، اختلاف

جدول 4 تأثیر شرایط مرزی بر اختلاف دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند ( $\beta = 30^\circ, \frac{L}{R_1} = 3, \frac{R}{h} = 40$ )

$V_{cn}^*$						شرایط مرزی
0/28		0/17		0/12		
FGX	UD	FGX	UD	FGX	UD	
272/2	204/2	304/0	236/5	282/0	218/8	CC
191/2	148/9	221/9	182/3	201/6	164/8	SC
186/4	143/6	214/8	174/8	195/3	158/4	CS
145/1	117/2	175/8	151/6	155/5	134/2	SS
149/4	114/9	171/3	137/6	156/7	125/6	FC
124/0	98/8	147/7	124/3	132/1	111/3	FS
147/8	114/4	170/0	137/1	155/7	125/1	CF
121/8	97/0	145/1	122/3	129/9	109/4	SF

دمای  $400\text{ K}$  در نظر گرفته شده است. همچنین دمای اولیه سازه نیز  $300\text{ K}$  فرض شده است. شرایط مرزی مسئله در دو انتها تکیه گاه ساده بوده و توزیع درجه حرارت نیز در راستای ضخامت به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است.

در جدول 2 نیز اختلاف دمای بحرانی کمانش پوسته‌های مخروطی ساخته شده از مواد هدفمند با نتایج ارائه شده توسط اکبری و همکارانش [33] مقایسه شده است. نتایج برای شرایط مرزی و پروفایل‌های متفاوت ماده هدفمند ارائه شده است. فرض شده است که ماده هدفمند از ترکیب فولاد ( $SUS304$ ) و سیلیکون نیتريد ( $Si_3N_4$ ) تشکیل شده است که خواص آن در مرجع [33] بیان گردیده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، مطابقت قابل قبولی در نتایج وجود دارد.

### 2-5- تأثیر عوامل مختلف بر دمای بحرانی کمانش

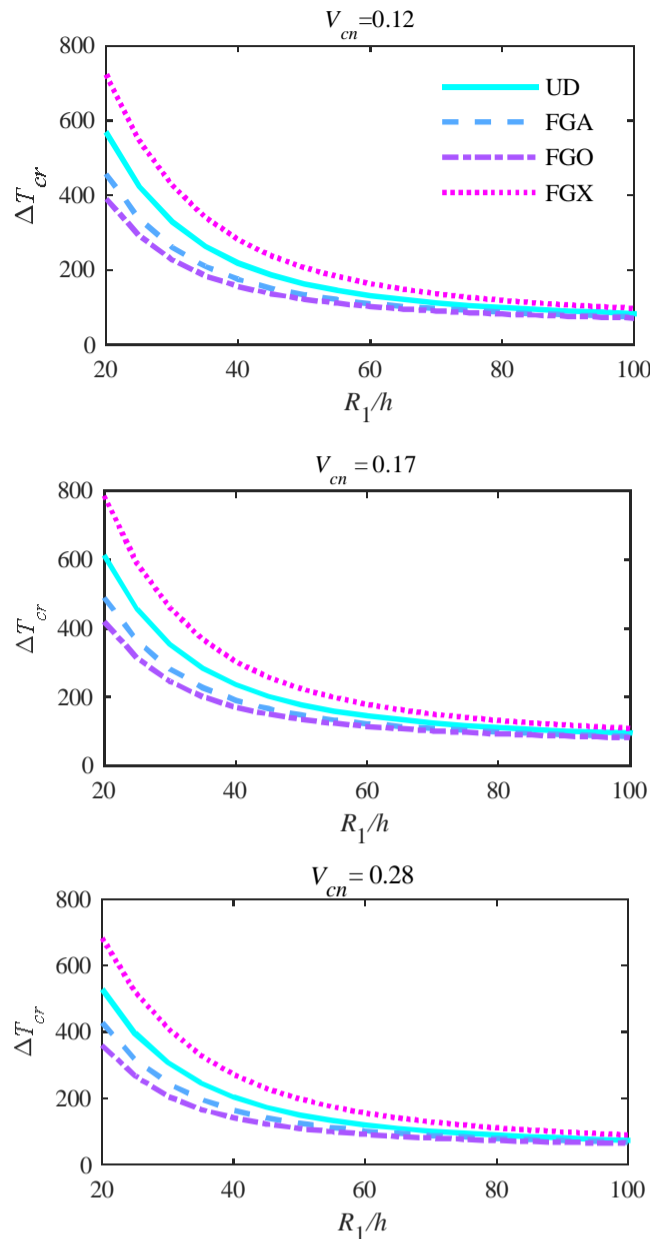
در این بخش نتایج عددی متفاوتی جهت بررسی تأثیر عوامل مختلف بر رفتار کمانشی پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند تحت بارگذاری حرارتی ارائه شده است. تغییرات اختلاف دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی نانو کامپوزیتی به ازای مقادیر مختلف زاویه راس مخروط در جدول 3 ارائه شده است. سه مقدار متفاوت کسر حجمی برای نانو لوله در نظر گرفته شده است و علاوه بر توزیع یکنواخت در راستای ضخامت، چهار نوع توزیع هدفمند لحاظ شده است تا علاوه بر تأثیر زاویه راس مخروط، اثرات

جدول 2 مقایسه دمای بحرانی کمانش برای پوسته مخروطی ساخته شده از مواد هدفمند ( $\beta = 15^\circ, \frac{L}{h} = 300, \frac{R}{h} = 300$ )

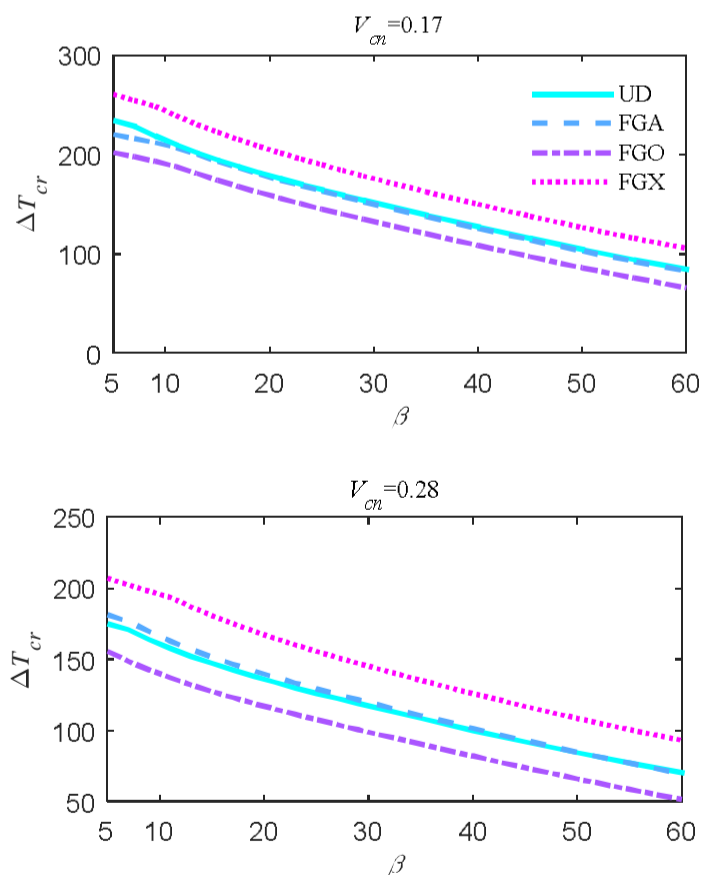
$k = 1$		$k = .5$		$k = 0$		شرایط مرزی
مرجع [33]	نتایج حاضر	مرجع [33]	نتایج حاضر	مرجع [33]	نتایج حاضر	
150/1	152/2	168/3	170/5	228/7	232/3	CC
149/8	149/8	168/0	167/9	228/2	228/7	SC
149/8	149/7	167/9	167/8	228/1	228/5	CS
149/4	149/1	167/4	167/3	227/9	227/2	SS
79/8	76/2	88/1	84/9	114/1	113/7	SF

جدول 3 تغییرات اختلاف دمای بحرانی کمانش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند به ازای مقادیر متفاوت زاویه راس مخروط، کسر حجمی و نوع توزیع نانو لوله کربنی ( $SS, \frac{L}{R_1} = 2, \frac{R_1}{h} = 40$ )

$\beta^\circ$				$V_{cn}^*$	
60	45	30	15		
77/10	103/59	134/22	171/06	UD	0/12
74/74	101/31	131/82	168/73	FGA	
75/36	102/71	134/26	172/18	FGV	
59/50	86/18	116/66	153/05	FGO	
96/61	123/77	155/46	194/21	FGX	
84/65	115/74	151/65	194/87	UD	0/17
82/66	114/08	150/02	193/33	FGA	
82/71	114/73	151/63	196/01	FGV	
66/03	97/18	132/49	174/21	FGO	
105/76	138/01	175/78	222/42	FGX	
70/34	92/05	117/15	147/26	UD	0/28
69/68	92/93	119/62	151/72	FGA	
68/35	91/08	117/26	148/55	FGV	
51/55	73/81	98/83	127/46	FGO	
93/09	116/94	145/14	180/85	FGX	



شکل 3 تغییرات اختلاف دمای بحرانی کماتش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند بر حسب نسبت شعاع به ضخامت به ازای انواع متفاوت توزیع هدفمند و مقادیر مختلف کسر حجمی نانو لوله ( $\beta = 30^\circ, \frac{L}{R_1} = 2$ )



شکل 4 تغییرات اختلاف دمای بحرانی کماتش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند بر حسب تغییرات زاویه راس مخروط به ازای انواع متفاوت توزیع هدفمند و مقادیر مختلف کسر حجمی نانو لوله ( $\frac{R_1}{h} = 40, \frac{L}{R_1} = 2$ )

تحقیق حاضر با نتایج موجود در مقالات دیگر اعتبار سنجی شد و سپس با

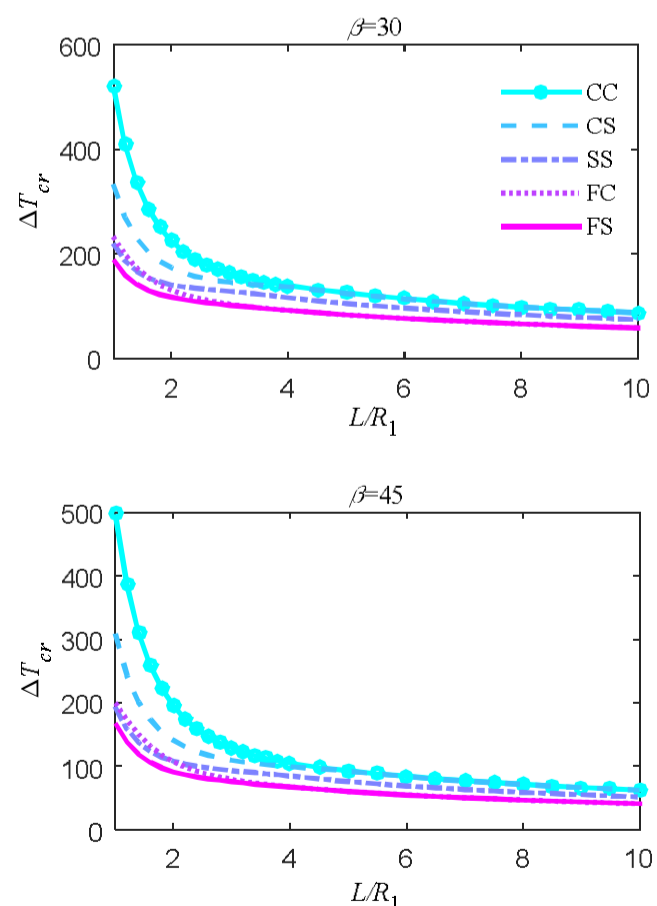
دمای بحرانی کماتش کاهش می‌یابد. همچنین استنباط می‌گردد که با افزایش نسبت شعاع به ضخامت، تأثیر نوع توزیع هدفمند نانو لوله کربنی بر پایداری حرارتی سازه نانو کامپوزیتی کاهش می‌یابد. از طرف دیگر، بیشترین تأثیر نوع توزیع هدفمند نانو لوله بر دمای بحرانی کماتش به ازای کسر حجمی  $V_{cn}^* = 0.17$  می‌باشد.

شکل 4 تغییرات اختلاف دمای بحرانی کماتش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند را بر حسب تغییرات زاویه راس مخروط نشان می‌دهد. نتایج برای سه مقدار مختلف کسر حجمی و چهار نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت ارائه شده است. همچنین شرایط مرزی تکیه گاه ساده در لبه‌های پوسته در نظر گرفته شده است.

شکل مود اول کماتش حرارتی پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند در شکل 5 نمایش داده شده است. کسر حجمی نانو لوله  $V_{cn}^* = 0.28$  و توزیع هدفمند نوع  $FGX$  برای پوسته در نظر گرفته شده است. همچنین شرایط مرزی پوسته در دو انتها تکیه‌گاه ساده فرض شده است. به علاوه، تأثیر شرایط مرزی بر دمای بحرانی کماتش و شکل مود مرتبط با آن در شکل 6 نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود افزایش تغییر مکان در لبه‌های دارای تکیه گاه آزاد موجب کاهش دمای بحرانی کماتش می‌شود.

### 6- نتیجه گیری

تحلیل کماتش حرارتی پوسته‌های مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند ارائه گردید. خواص مکانیکی مؤثر مواد نانو کامپوزیت با استفاده از قانون ترکیب تعمیم داده شده بیان گردید. روابط حاکم با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری پوسته دانه ارائه گردید. با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته و عملگر مشتق‌گیر متناوب به ترتیب در راستای محوری و محیطی، معادلات پایداری به صورت عددی گسسته‌سازی شد و با حل مسئله مقادیر ویژه اختلاف دمای بحرانی کماتش محاسبه گردید.



شکل 2 تغییرات اختلاف دمای بحرانی کماتش پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند بر حسب نسبت طول به شعاع به ازای شرایط مرزی متفاوت و مقادیر مختلف زاویه راس مخروط ( $FGX, V_{cn}^* = 0.17, \frac{R_1}{h} = 50$ )



پوسته مخروطی ساخته شده از مواد نانو کامپوزیتی هدفمند می‌شود.

3. شرایط مرزی تأثیر قابل توجهی بر رفتار کمانشی پوسته مخروطی تحت بارگذاری حرارتی دارد، به طوری که در نظر گرفتن تکیه‌گاه‌های انعطاف پذیرتر پایداری سازه را کاهش می‌دهد. از طرفی با افزایش نسبت طول به شعاع سازه وابستگی دمای بحرانی کمانش به شرایط مرزی کاهش می‌یابد.

4. نتایج نشان داد که با افزایش نسبت شعاع به ضخامت پوسته مخروطی، تأثیر نوع توزیع نانو لوله‌های کربنی بر اختلاف دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

### 7- پیوست (الف)

ضرایب  $L_{ij}$  به صورت روابط (الف-1) تا (الف-27) ارائه می‌شود:

$$L_{11} = A_{11}D_x^2 + A_{11}\sin(\beta)\bar{R}D_x^1 + A_{66}\bar{R}D_y^2 - A_{22}\sin^2(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-1)}$$

$$L_{12} = -(A_{22} + A_{66})\sin(\beta)\bar{R}D_y^1 + (A_{12} + A_{66})\bar{R}D_x^1D_y^1 \quad \text{(الف-2)}$$

$$L_{13} = A_{12}\cos(\beta)\bar{R}D_x^1 - A_{22}\sin(\beta)\cos(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-3)}$$

$$L_{14} = B_{11}D_x^2 + B_{11}\sin(\beta)\bar{R}D_x^1 + B_{66}\bar{R}D_y^2 - B_{22}\sin^2(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-4)}$$

$$L_{15} = -(B_{22} + B_{66})\sin(\beta)\bar{R}D_y^1 + (B_{12} + B_{66})\bar{R}D_x^1D_y^1 \quad \text{(الف-5)}$$

$$L_{21} = (A_{12} + A_{66})\bar{R}D_x^1D_y^1 + (A_{22} + A_{66})\sin(\beta)\bar{R}D_y^1 \quad \text{(الف-6)}$$

$$L_{22} = A_{66}D_x^2 + A_{22}\bar{R}D_y^2 + A_{66}\sin(\beta)\bar{R}D_x^1 - A_{66}\sin^2(\beta)\bar{R}D^0 - k_sA_{44}\cos^2(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-7)}$$

$$L_{23} = (A_{22} + k_sA_{44})\sin(\beta)\bar{R}D_y^1 \quad \text{(الف-8)}$$

$$L_{24} = (B_{22} + B_{66})\sin(\beta)\bar{R}D_y^1 + (B_{12} + B_{66})\bar{R}D_x^1D_y^1 \quad \text{(الف-9)}$$

$$L_{25} = B_{66}D_x^2 + B_{22}\bar{R}D_y^2 + B_{66}\sin(\beta)\bar{R}D_x^1 - B_{66}\sin^2(\beta)\bar{R}D^0 + k_sA_{44}\cos(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-10)}$$

$$L_{31} = -A_{12}\cos(\beta)\bar{R}D_x^1 - A_{22}\cos(\beta)\sin(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-11)}$$

$$L_{32} = (A_{22} + k_sA_{44})\cos(\beta)\bar{R}D_y^1 \quad \text{(الف-12)}$$

$$L_{33} = k_sA_{55}D_x^2 + k_sA_{55}\sin(\beta)\bar{R}D_x^1 + k_sA_{44}\bar{R}D_y^2 - A_{22}\cos^2(\beta)\bar{R}D^0 + \frac{(A_{22}N_x^T - A_{12}N_\theta^T)\sin(\beta)L}{A_{22}\ln\left(1 + \frac{L\sin(\beta)}{R_1}\right)}\bar{R}D_x^2 \quad \text{(الف-13)}$$

$$L_{34} = k_sA_{55}D_x^1 - B_{12}\cos(\beta)\bar{R}D_x^1 + (k_sA_{55}\sin(\beta)\bar{R} - B_{22}\sin(\beta)\cos(\beta)\bar{R})D^0 \quad \text{(الف-14)}$$

$$L_{35} = (k_sA_{44}\bar{R} - B_{22}\cos(\beta)\bar{R})D_y^1 \quad \text{(الف-15)}$$

$$L_{41} = B_{11}D_x^2 + B_{11}\sin(\beta)\bar{R}D_x^1 + B_{66}\bar{R}D_y^2 - B_{22}\sin^2(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-16)}$$

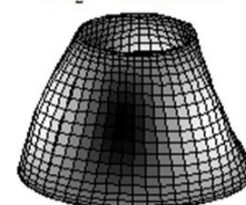
$$L_{42} = -(B_{22} + B_{66})\sin(\beta)\bar{R}D^0 + (B_{12} + B_{66})\bar{R}D_x^1D_y^1 \quad \text{(الف-17)}$$

$$L_{43} = -k_sA_{55}D_x^1 + B_{12}\cos(\beta)\bar{R}D_x^1 - B_{22}\sin(\beta)\cos(\beta)\bar{R}D^0 \quad \text{(الف-18)}$$

$$L_{44} = [D_{11}D_x^2 + D_{11}\sin(\beta)\bar{R}D_x^1 + D_{66}\bar{R}D_y^2 - D_{22}\sin^2(\beta)\bar{R}D^0 - k_sA_{55}D^0] \quad \text{(الف-19)}$$

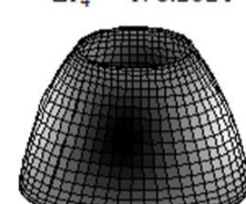
$$L_{45} = (D_{12} + D_{66})\bar{R}D_x^1D_y^1 - D_{22}\sin(\beta)\bar{R}D_y^2 - D_{66}\sin(\beta)\bar{R}D_y^2 \quad \text{(الف-20)}$$

$$\Delta T_1 = \Delta T_{cr} = 341.1371 \quad \Delta T_2 = 362.1150$$



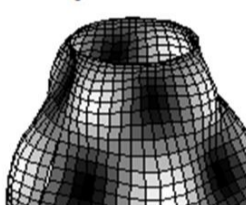
$$\Delta T_3 = 383.5378$$

$$\Delta T_4 = 478.2624$$



$$\Delta T_5 = 490.2170$$

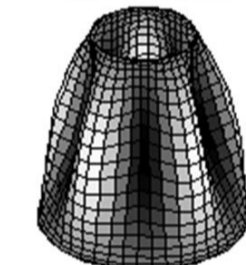
$$\Delta T_6 = 656.3345$$



شکل 5 شش مدل کمانش حرارتی پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند ( $SS, FGX, v_{cn}^* = 0.28, \beta = 30^\circ, \frac{L}{R_1} = 2, \frac{R_1}{h} = 20$ )

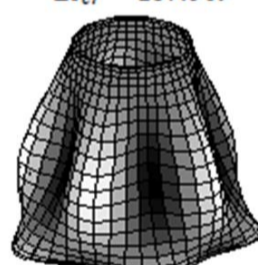
$$CC \quad \Delta T_{cr} = 236.5115$$

$$SS \quad \Delta T_{cr} = 151.6528$$



$$CF \quad \Delta T_{cr} = 137.049$$

$$FS \quad \Delta T_{cr} = 124.321$$



شکل 6 تأثیر شرایط مرزی بر شکل کمانش حرارتی پوسته مخروطی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌های هدفمند ( $UD, v_{cn}^* = 0.17, \beta = 30^\circ, \frac{L}{R_1} = 2, \frac{R_1}{h} = 40$ )

ارائه نتایج عددی تأثیر پارامترهای مرتبط بر رفتار کمانشی پوسته مخروطی نانو کامپوزیتی مورد ارزیابی قرار گرفت. خلاصه‌ای از دستاوردهای این تحقیق در ادامه ارائه می‌شود:

1. مقادیر کسر حجمی و نوع توزیع هدفمند نانو لوله‌های کربنی در راستای ضخامت پوسته مخروطی تأثیر به‌سزایی در اختلاف دمای بحرانی کمانش دارد. افزایش کسر حجمی نانو لوله لزوماً منجر به افزایش پایداری سازه نمی‌شود و توزیع هدفمند نوع  $FGX$  بیشترین دمای بحرانی کمانش را نتیجه می‌دهد.
2. افزایش زاویه راس مخروط، نسبت طول به شعاع و نسبت شعاع به ضخامت باعث کاهش اختلاف دمای بحرانی کمانش

- [13] R. Ansari, E. Hasrati, M. F. Shojaei, R. Gholami, A. Shahabodini, Forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using a numerical strategy, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 69, pp. 294-305, 2015.
- [14] B.S. Aragh, A.H. Nasrollah Barati, H. Hedayati, Eshelby-Mori-Tanaka approach for vibrational behavior of continuously graded carbon nanotube-reinforced cylindrical panels, *Compos B Eng.*, Vol. 43, pp. 1943-1954, 2012.
- [15] M.H. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, M. Heshmatian, Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Material Design*, Vol. 49, pp. 583-590, 2013.
- [16] S.J. Mehrabadi, B. Sobhani Aragh, Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes, *Thin Wall Structures*, Vol. 80, pp. 130-141, 2014.
- [17] Alibeigloo, Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity, *European Journal of Mechanics A/Solid*, Vol. 44, pp. 104-115, 2014.
- [18] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 111, pp. 291-300, 2014.
- [19] Z.X. Lei, K.M. Liew, J.L. Yu, Free Vibration Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Cylindrical Panels, *International Journal of Material Science*, Vol. 1, pp. 36-40, 2013.
- [20] K. M. Liew, Z. X. Lei, J. L. Yu, L. W. Zhang, Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach, *Computer Methods in Applied Mech.*, Vol. 268, pp. 1-17, 2014.
- [21] H. S. Shen, Y. Xiang, Thermal postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 123, pp. 383-392, 2015.
- [22] R. Moradi-Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method, *Material Design*, Vol. 44, pp. 256-266, 2013.
- [23] S.M. Hosseini, Application of a hybrid mesh-free method based on generalized finite difference (GFD) method for natural frequency analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotubes. *CMES-Computer Modeling Engineering Science*, Vol. 95, pp. 1-29, 2013.
- [24] H.S. Shen, Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells. *Composite Part B Engineering*, Vol. 43, pp. 1030-1038, 2012.
- [25] H.S. Shen, Torsional postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Composite Structures*, Vol. 116, pp. 477-488, 2014.
- [26] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, *Computer Methods in Applied Mechanics*, Vol. 213, pp. 196-205, 2012.
- [27] H.S. Shen, Y. Xiang, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells under combined axial and radial mechanical loads in thermal environment, *Composite Part B Engineering*, Vol. 52, pp. 311-322, 2013.
- [28] M. Rabani Bidgoli, M. Saeed Karimi, A. Ghorbanpour Arani, Nonlinear vibration and instability analysis of functionally graded-CNT-reinforced cylindrical shells conveying viscous fluid resting on orthotropic Pasternak medium, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, (just-accepted), 2015.
- [29] Y. Heydarpour, M. M. Aghdam, P. Malekzadeh, Free vibration analysis of rotating functionally graded carbon nanotube-reinforced composite truncated conical shells, *Composite Structures*, Vol. 117, pp. 187-200, 2014.
- [30] J. E. Jam, Y. Kiani, Buckling of pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced conical shells, *Composite Structures*, Vol. 125, pp. 586-595, 2015.
- [31] F. Tornabene, E. Viola, D.J. Inman, 2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 328, pp. 259-290, 2009.
- [32] J. Torabi, Y. Kiani, M. R. Eslami, Linear thermal buckling analysis of truncated hybrid FGM conical shells, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 50, pp. 265-272, 2013.
- [33] M. Akbari, Y. Kiani, M. R. Eslami, Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports, *Acta Mechanica*, pp. 1-19, 2014.
- [34] C. Shu, *Differential Quadrature and its Application in Engineering*, London: Springer, 2000.
- [35] R. Ansari, V. Mohammadi, M. Faghih Shojaei, R. Gholami, H. Rouhi, Nonlinear vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on surface stress elasticity theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 45, pp. 143-152, 2014.
- [36] R. Ansari, J. Torabi, Free vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical shells surrounded by elastic foundation subjected to thermal loading, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 271-282, 2015 (In Persian)

$$L_{51} = -(B_{22} + B_{66}) \sin(\beta) \bar{R} D^0 + (B_{12} + B_{66}) \bar{R} D_x^1 D_y^1 \quad (21-الف)$$

$$L_{52} = B_{66} D_x^2 + B_{66} \sin(\beta) \bar{R} D_x^1 + B_{22} \bar{R} D_y^2 - B_{66} \sin^2(\beta) \bar{R} D^0 + k_s A_{44} \cos(\beta) \bar{R} D^0 \quad (22-الف)$$

$$L_{53} = -(k_s A_{44} \bar{R} - B_{22} \bar{R}) D_y^1 \quad (23-الف)$$

$$L_{54} = (D_{12} + D_{66}) \bar{R} D_x^1 D_y^1 + D_{22} \sin(\beta) \bar{R} D_y^2 + D_{66} \sin(\beta) \bar{R} D_y^2 \quad (24-الف)$$

$$L_{55} = D_{66} D_x^2 + D_{66} \sin(\beta) \bar{R} D_x^1 + D_{22} \bar{R} D_y^2 - D_{66} \sin^2(\beta) \bar{R} D^0 - k_s A_{44} D^0 \quad (25-الف)$$

که در روابط بالا

$$\bar{R} = I_\theta \otimes \text{diag} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{R_1 + \sin(\beta) x_1} \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + \sin(\beta) x_2} \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{R_1 + \sin(\beta) x_{n_x}} \end{array} \right) \quad (26-الف)$$

$$\bar{\bar{R}} = I_\theta \otimes \text{diag} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{(R_1 + \sin(\beta) x_1)^2} \\ 1 \\ \frac{1}{(R_1 + \sin(\beta) x_2)^2} \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{1}{(R_1 + \sin(\beta) x_{n_x})^2} \end{array} \right) \quad (27-الف)$$

## 8- مراجع

- [1] H.S. Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9-19, 2009.
- [2] L.L. Ke, J. Yang, S. Kitipornchai, Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 20, pp. 28-37, 2013.
- [3] M.H. Yas, N. Samadi, Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, pp. 119-128, 2012.
- [4] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments, *Engineering Structures*, Vol. 56, pp. 698-708, 2013.
- [5] R. Ansari, M. Faghih Shojaei, V. Mohammadi, R. Gholami, F. Sadeghi, Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams, *Composite Structures*, Vol. 113, pp. 316-327, 2014.
- [6] B. Thomas, P. K. Inamdar, T. Roy, Thermal analysis of randomly oriented carbon nanotube reinforced functionally graded Timoshenko beam, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 28, pp. 1779-1788, 2014.
- [7] Alibeigloo, K. M. Liew, Elasticity Solution of Free Vibration and Bending Behavior of Functionally Graded Carbon Nanotube-Reinforced Composite Beam with Thin Piezoelectric Layers Using Differential Quadrature Method, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 7, 2015.
- [8] H.S. Shen, C.L. Zhang, Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates, *Material Design*, Vol. 31, pp. 3403-3411, 2010.
- [9] G. Arani, S. Maghamikia, M. Mohammadimehr, A. Arefmanesh, Buckling analysis of laminated composite rectangular plates reinforced by SWCNTs using analytical and finite element methods, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 25, pp. 809-820, 2011.
- [10] S.J. Mehrabadi, A.B. Sobhani, V. Khoshkharesh, A. Taherpour, Mechanical buckling of nanocomposite rectangular plate reinforced by aligned and straight single-walled carbon nanotubes, *Composite Part B-Engineering*, Vol. 43, pp. 2031-2040, 2012.
- [11] M. R. Nami, M. Janghorban, Free vibration of thick functionally graded carbon nanotube-reinforced rectangular composite plates based on three-dimensional elasticity theory via differential quadrature method, *Advanced Composite Materials*, pp. 1-12, 2014.
- [12] Alibeigloo, Three-dimensional thermoelasticity solution of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate embedded in piezoelectric sensor and actuator layers, *Composite Structures*, Vol. 118, pp. 482-495, 2014.