

حل تحلیلی میدان دما برای یک صفحه تخت تحت شرط مرزی جابه‌جایی با استفاده از معادله انتقال حرارت غیرفوری‌ای - مدل کاتانتو

محمد اکبری^{۱*}، فرشاد کوثری^۲، سیف‌الله سعدالدین^۳ و داود طغرایبی سمیرمی^۴

اطلاعات مقاله	چکیده
واژگان کلیدی: تئوری ساختار، حل تحلیلی، انتقال حرارت هدایتی غیرفوری، شار گرمای جابه‌جایی، عایق.	این مقاله یک حل تحلیلی که ترکیبی از روش برهم نهی و تئوری ساختار است را ارائه می‌دهد. این روش بیانگر یک حل دقیق از معادله انتقال حرارت هذلولوی با استفاده از ریاضیات پایه می‌باشد. در این مقاله معادله انتقال حرارت غیرفوری‌ای برای یک صفحه در حالتی که سطح سمت چپ آن عایق و سطح سمت راست آن در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی با محیط قرار دارد، مورد استفاده قرار گرفته است. یک مسئله پیچیده به چند مسئله ساده‌تر تبدیل شده و با حل این مسائل و ترکیب آن‌ها یک حل دقیق برای مسئله اصلی به‌دست می‌آید. مسئله اصلی به چهار مسئله ساده‌تر تبدیل شده که هرکدام دارای یک جمله غیرهمگن است. این جملات عبارتند از تولید انرژی، شرایط اولیه و شرایط مرزی که در هر مسئله مقادیر مختلفی را دارا هستند. با جایگذاری حل‌های به‌دست آمده در معادلات حاکم به سادگی صحت حل‌های به‌دست آمده را می‌توان بررسی کرد.

۱- مقدمه

دقت خوبی برخوردار است. ولی در زمان‌های بسیار کوچک، شارهای حرارتی بسیار بالا و دماهای بسیار پایین نزدیک صفر مطلق، قانون فوری‌ای از دقت مناسبی برخوردار نبوده و در نظر گرفتن اثرات غیرفوری‌ای در توصیف فرآیند پخش حرارت و پیش‌بینی توزیع دما قابل اعتمادتر خواهد بود. انگیزه این پژوهش از بین‌بردن تناقض موجود بین بی‌نهایت در نظر گرفتن سرعت موج حرارتی و تئوری نسبیت انیشتین و در نتیجه ارائه یک نظریه برای تشریح داده‌های تجربی است. استفاده از منابع حرارتی از قبیل لیزر و ماکرو ویو در زمان‌های بسیار کوچک اعمال حرارت و یا فرکانس‌های بالا کاربرد بسیاری در فیزیک تحلیلی، علوم کاربردی و مهندسی دارد. در فرآیندهای پر قدرت و کوتاه و انتقال حرارت هدایتی سریع و متمرکز، مرتبه زمان و یا مکان بسیار کوچک بوده و بنابراین معادله

در سال‌های اخیر برخی تحقیقات بر روی انحراف از معادله کلاسیک انتقال حرارت فوری‌ای متمرکز شده است. در تئوری کلاسیک انتقال حرارت هدایتی که بر پایه قانون فوری‌ای بنا شده است، شار حرارتی یک رابطه خطی با گرادیان دما داشته و سرعت انتشار موج حرارت نامحدود فرض می‌شود. در نتیجه هرگونه اختلال حرارتی ایجاد شده بر روی جسم، بلافاصله از طریق کل شبکه ملکولی حس می‌شود. در اکثر کاربردهای مهندسی این قانون از

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: m.akbari.g80@gmail.com

۱. دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

۲. استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

۳. دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

۴. استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر، اصفهان

هدایت فوریه قابل استفاده نیست. در برخی سیستم‌ها نتایج پیش‌بینی شده منطبق بر داده‌های تجربی نیست زیرا قانون فوریه سرعت انتشار موج حرارت را نامحدود فرض می‌کند [۱]. تئوری کلاسیک انتقال حرارت هدایتی برمبنای یک خصوصیت غیرفیزیکی که سرعت انتشار حرارت را نامحدود فرض می‌کند، بنا شده است. معادله انتقال حرارت غیرفوریه‌ای یک شاخه جدید در انتقال حرارت است که برای کاربردهای جدید مهندسی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. روش‌های گوناگون جهت حل معادله انتقال حرارت را در سه گروه مختلف می‌توان دسته‌بندی کرد: تحلیلی، اختلاف محدود و المان محدود. فقط یک‌سری مسائل ساده به روش تحلیلی قابل حل هستند. با این حال باتوجه به مشکلات موجود در استفاده از روش‌های تحلیلی جهت بررسی مسائل با هندسه‌های پیچیده، شرایط مرزی و یا خصوصیات حرارتی متغیر، توجه به روش‌های عددی افزایش چشمگیری پیدا کرده است. حل‌های مختلفی برای جسم با ابعاد محدود در تحقیقات گذشته ارائه شده است. تانگ و آراکی [۲ و ۳] مسئله انتقال حرارت هدایتی غیرفوریه در یک جسم محدود تحت اختلال حرارتی پریودیک بر روی سطح که به‌صورت پالس لیزر تولید می‌شود را مورد بررسی قرار دادند. اوزیسیک و ویک [۴] طبیعت انتشار موج حرارت در یک جسم نیمه بینهایت را تحت تأثیر یک منبع انرژی حجمی بررسی کرده و برای به‌دست آوردن میدان دما از معادله موج حرارت استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد که تئوری پخش حرارت پیش‌بینی درستی از میدان دما در زمان‌های بسیار کوچک نخواهد داشت. لواندوفسکا و مالدینوفسکی [۵] معادله انتقال حرارت هذلولوی برای یک جسم نیمه بینهایت تحت یک منبع حرارتی در حالتی که ظرفیت گرمای ویژه به‌صورت خطی با دما تغییر می‌کند را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها [۶] یک حل تحلیلی هم برای یک صفحه نازک که به‌صورت متقارن از هر دو وجه تحت گرمایش قرار می‌گرفت، ارائه کردند. بیشری [۷] مدل انتقال حرارت غیرفوریه را برای

یک جسم محدود تحت شار حرارتی پریودیک مورد استفاده قرار داد. وی برای حل از روش تبدیل انتگرال محدود استفاده کرد و دریافت که در مواردی که زمان آسایش به سمت صفر میل کند توزیع دمای به‌دست آمده از معادله انتقال حرارت هذلولوی با پاسخ دمایی به‌دست آمده از معادله کلاسیک فوریه یکسان خواهد بود. جیانگ [۸] از روش تبدیل لاپلاس برای بررسی انتقال حرارت هدایتی هذلولوی در یک کره توخالی که مرزهای آن تحت تأثیر یک تغییر ناگهانی دما قرار دارد، استفاده کرد. موسایی معادله غیرفوریه را برای یک جسم محدود در نظر گرفته و آن را در دو حالت اختلال حرارتی دلخواه پریودیک [۹] و غیرپریودیک [۱۰] حل نموده است. وی برای حل از روش انتگرال فوریه استفاده کرد. بابایی و همکاران [۱۱] یک مسئله هذلولوی ترموالاستیک را برای یک پره حلقوی تحت تأثیر تغییرات ناگهانی دما در پایه پره بررسی نمودند. آن‌ها برای حل روش هیبریدی تبدیل لاپلاس را مورد استفاده قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد که کاربرد توابع شکل هذلولوی به‌خوبی نوسانات عددی در مجاورت نقاط ناپیوستگی را از بین می‌برد. ژیان هو و همکاران [۱۲] یک مدل موج حرارتی متقارن دوبعدی برای انتقال حرارت منتقل شده توسط لیزر در بافت‌های بیولوژیکی آسیب دیده، ارائه کردند. آن‌ها نشان دادند که اثرات غیرفوریه‌ای هنگامی که زمان آسایش مقدار بزرگی داشته باشد، از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. میدان دمای متقارن سه‌بعدی در انتقال حرارت غیرفوریه‌ای در داخل یک کره توخالی با شرایط مرزی مستقل از زمان به‌صورت تحلیلی توسط موسایی [۱۳] بررسی شد. روش حل، روش استاندارد جداسازی متغیرها است. احمدی کیا و ریسمانیان [۱۴] یک روش تحلیلی در حل انتقال حرارت هذلولوی در یک پره که تحت شرایط مرزی پریودیک قرار دارد را با روش تبدیل لاپلاس ارائه نمودند. نتایج به‌دست آمده از مدل انتقال حرارت هذلولوی به‌خوبی رفتار موجی شکل غیرفوریه‌ای را در پره‌های کوچک تحت پدیده‌های سریع نشان می‌داد. بامداد و

انتقال حرارت هدایتی غیرفوری‌ای در یک صفحه با شرایط مرزی و اولیه غیرصفر ارائه شده است. همان‌گونه که در ادامه ذکر خواهد شد با استفاده از ترکیب تئوری ساختار و روش برهم‌نهی یک حل تحلیلی برای این مسئله می‌توان ارائه نمود.

۲- فرمول‌بندی مسئله

۲-۱- مدل هدایت غیرفوری‌ای

تئوری کلاسیک انتقال حرارت هدایتی بر مبنای یک خصوصیت غیرفیزیکی که سرعت انتشار حرارت را نامحدود فرض می‌کند، بنا شده است. بر این اساس معادله انتقال حرارت هدایتی توسط قانون فوریه به صورت زیر ارائه شده است:

$$q^* = -k\nabla T^* \quad (1)$$

که k ضریب انتقال حرارت هدایتی است. معادله انرژی هدایتی نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$\nabla \cdot q^* = -\rho c_p \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (2)$$

با ترکیب معادلات (۱) و (۲) معادله انتقال حرارت هدایتی سهموی به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \alpha \nabla^2 T^* \quad (3)$$

که $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ ، ρ و c_p به ترتیب ضریب پخش

حرارتی، چگالی و ظرفیت گرمای ویژه هستند. معادله انتقال حرارت غیرفوری‌ای اصلاح‌شده با رویکردهای مختلفی گسترش یافته است. معادله انتقال حرارت غیرفوری‌ای یک شاخه جدید در انتقال حرارت است که برای کاربردهای جدید مهندسی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. کاتانو [۲۰]، ورنوت [۲۱] و فشبک [۲۲]

همکاران [۱۵] اثرات غیرفوری‌ای را در سطوح گسترش‌یافته مطالعه نمودند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد که برای کلیه پره‌ها در زمان‌های اولیه، موقعیت نقطه ناپیوستگی وابسته به زمان، زمان آسایش و سطح مقطع پره می‌باشد. به‌علاوه اثرات سطح مقطع بر روی دامنه موج حرارتی منعکس شده از نوک پره به این صورت است که در پره‌های مقعر موج حرارتی منعکس شده وجود ندارد. کیشور و همکاران [۱۶] انتقال حرارت هدایتی غیرهمگن در یک دیسک دایره‌ای توخالی تحت میدان دمای غیردائم همراه با تولید انرژی داخلی را در نظر گرفته و بر روی تغییرات دما و تغییرشکل حرارتی بحث نمودند. آن‌ها نتایج حل عددی را برای دیسک با جنس‌های مختلف به دست آوردند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد که به دلیل تولید انرژی داخلی در دیسک، تغییرشکل حرارتی با ضریب انتقال حرارت هدایتی رابطه عکس دارد. جیانگ [۱۷] از روش تبدیل لاپلاس برای بررسی انتقال حرارت هذلولوی در یک کره توخالی در حالی که سطوح مرزی آن تحت تأثیر تغییرات ناگهانی دما قرار می‌گیرد، استفاده نمود. سد و چا [۱۸] هدایت یک‌بعدی متقارن برای نواحی داخلی و خارجی یک استوانه دایروی شکل را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس مورد تحلیل قرار دادند.

لام و فانگ [۱۹] یک روش تحلیلی ارائه دادند که در آن با ترکیب روش‌های برهم‌نهی و تئوری ساختار یک حل برای انتقال حرارت غیرفوری‌ای در یک ورقه مستطیلی با مرزهای عایق و تولید حرارت داخلی به دست آمد. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که دقت حل آن‌ها به تعداد جملات سری فوریه به دست آمده بستگی دارد. مروری بر این مقالات نشان می‌دهد که مطالعات گوناگونی در زمینه‌های مختلف انجام شده است. در هرکدام از کارهای انجام شده جنبه‌های مختلف انتقال حرارت هدایتی غیرفوری‌ای مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج به دست آمده کاملاً مفید هستند. با این حال کمبود یک مطالعه عمومی درحالی‌که شرایط مرزی و اولیه غیرصفر بوده و تولید انرژی نیز وجود داشته باشد، مشاهده می‌شود. در این مقاله یک حل دقیق برای

با محیط قرار دارد. در راستای بی‌بعدسازی معادلات متغیرهای بدون بعد زیر تعریف می‌شوند:

$$x = \frac{cx^*}{2\alpha}, \quad t = \frac{c^2 t^*}{2\alpha}, \quad T = \frac{kcT^*}{\alpha f_r}, \quad q = \frac{q^*}{f_r}, \quad (7)$$

$$g = \frac{4\alpha \dot{g}'''}{cf_r}, \quad T_\infty = \frac{kcT_\infty^*}{\alpha f_r}, \quad T_s = \frac{kcT_s^*}{\alpha f_r}$$

با استفاده از معادلات (۴)، (۵) و (۶) شکل بدون بعد معادله انتقال حرارت غیرفوری را می‌توان به‌دست آورد. از اینرو معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در شکل بدون بعد به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = -2q \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{g}{2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (10)$$

که $f(x, t)$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial t} + g \quad (11)$$

شرایط اولیه با در نظر گرفتن متغیرهای بدون بعد به‌صورت زیر فرض می‌شوند:

$$T(x, 0) = \varphi(x) \quad (12)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = \frac{g}{2} \quad (13)$$

همچنین شرایط مرزی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = m(T - T_\infty), \quad m = \frac{-2\alpha h}{kc} \quad (14)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

در این مطالعه عبارت تولید انرژی داخلی، g ، برای کاربردهای لیزر به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$g(x) = g_0 \exp(-\mu x) \quad (16)$$

یک معادله دیگر برای معادله انتقال حرارت غیرفوری به شکل زیر ارائه دادند:

$$q^* + \tau_0 \frac{\partial q^*}{\partial t^*} = -k \nabla T^* \quad (4)$$

که τ_0 زمان آسایش حرارتی نامیده می‌شود. زمان آسایش وابسته به مکانیزم انتقال حرارت است و بیانگر زمان مورد نیاز جهت رسیدن به شرایط دائم برای یک المان پس از اعمال ناگهانی گرادیان دما بر روی آن المان است. مقدار زمان آسایش برای مواد همگن مانند فلزات، بین 10^{-14} تا 10^{-8} ثانیه و برای مواد غیرهمگن مانند گوشت، ماسه، شن و ... بین 10^{-3} تا 10^3 ثانیه می‌باشد. در واقع زمان آسایش یک پارامتر زمانی بسیار کوچک بوده و جزء خواص ذاتی یک ماده است. اگر زمان آسایش به سمت صفر میل کند $\tau_0 = 0$ ، مدل هدایت غیرفوری به مدل کلاسیک فوری تبدیل می‌شود. قانون بقای انرژی همراه با تولید انرژی داخلی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$-\frac{\partial q^*}{\partial x^*} + \dot{g}''' = \rho c_p \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (5)$$

که \dot{g}''' تولید انرژی داخلی بر واحد حجم را نشان می‌دهد. با جای‌گذاری معادله (۴) در معادله (۵) معادله انتقال حرارت هذلولوی همراه با تولید انرژی داخلی به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\alpha \nabla^2 T^* = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \tau_0 \frac{\partial^2 T^*}{\partial t^{*2}} + Q(x, t) \quad (6)$$

که $Q(x, t)$ جمله منبع حرارتی است. حل‌های گوناگونی برای معادله (۶) با شرایط مرزی و اولیه مختلف در مقالات قبلی انجام شده است.

۲-۲- انتقال حرارت غیرفوری

صفحه‌ای که از یک ماده همگن تشکیل شده است را در نظر بگیرید که سطح سمت چپ آن عایق ($q_s'' = 0$) و سطح سمت راست آن در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی

غیرهمگن هستند. با استفاده از تئوری ساختار [۱۹] جهت محاسبه T_1 تا T_3 خواهیم داشت:

$$T_1(x, t) = F(x, t, \psi(x)) \quad (۱۹-الف)$$

$$T_2(x, t) = (2 + \frac{\partial}{\partial t})F(x, t, \varphi(x)) \quad (۱۹-ب)$$

$$T_3(x, t) = \int_0^t F(x, t - \eta, f(x, \eta))d\eta \quad (۱۹-ج)$$

که $T_1(x, t)$ به وسیله روش سری فوریه به دست می آید. $T_2(x, t)$ و $T_3(x, t)$ به سادگی با استفاده از روش تئوری ساختار محاسبه می شوند. این بدین معنی است که اگر حل مسئله شماره ۱ موجود باشد، به راحتی می توان مسئله های شماره ۲ و ۳ را حل نمود. اما $T_4(x, t)$ با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دست می آید. ابتدا باید مسئله شماره ۱ حل شود. این مسئله با شرایط

$$f(x, t) = \varphi(x) = \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0$$

در نظر گرفته می شود. بنابراین معادله انرژی این مسئله و شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad (۲۰-الف)$$

$$\frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (۲۰-ب)$$

$$T_1(1, t) = 0 \quad (۲۰-ج)$$

$$T_1(x, 0) = 0 \quad (۲۰-د)$$

$$\frac{\partial T_1(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (۲۰-ه)$$

با استفاده از بسط سری فوریه حل عمومی معادله عبارت است از:

$$T_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) [\cos(\beta_n x) + \sin(\beta_n x)] \quad (۲۱)$$

$$g(x, t) = g_0 \exp(-\mu x) \exp(-t) \quad (۱۷)$$

که

$$g_0 = \frac{2I_0\mu(1-R)}{f_r} \quad (۱۸)$$

که I_0 حداکثر توان لیزر، μ ضریب جذب و R ضریب انعکاس جسم است. در این مدل تغییرات مکانی g_0 در نظر گرفته نشده است.

۳-۲- روش برهم نهی و تئوری ساختار

یکی از قدیمی ترین، ساده ترین و پرکاربردترین روشها برای حل مسائل انتقال حرارت هدایتی، روش برهم نهی است. این روش را برای مسائل انتقال حرارت با جملات غیرهمگن می توان به کار برد. اگر توابع مجهول و مشتقات آنها در یک معادله دیفرانسیل پاره ای توان بالاتر از یک نداشته باشند، معادله دیفرانسیل پاره ای را خطی می نامند. در این روش یک مسئله پیچیده به چند مسئله ساده تر تبدیل شده و با ترکیب حل این مسائل به حل مسئله اصلی می توان دست یافت. در این مقاله مسئله اصلی به چهار مسئله ساده تر تبدیل شده که هر کدام دارای یک جمله غیرهمگن شامل شرایط مرزی، اولیه و یا تولید انرژی داخلی به شکل زیر هستند:

$$f(x, t) = \varphi(x) = \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{مسئله شماره ۱}$$

$$f(x, t) = \psi(x) = \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{مسئله شماره ۲}$$

$$\varphi(x) = \psi(x) = \frac{\partial T(1, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{مسئله شماره ۳}$$

$$\varphi(x) = \psi(x) = f(x, t) = 0 \quad \text{مسئله شماره ۴}$$

بنابراین حل عمومی مسئله اصلی، مجموع میدانهای دمای به دست آمده از مسئله های ساده ۱ تا ۴ است:

$$T(x, t) = T_1(x, t) + T_2(x, t) + T_3(x, t) + T_4(x, t)$$

همچنین باید توجه کرد که T_1 ، T_2 ، T_3 و T_4 به ترتیب بیانگر نرخ تغییرات دمای اولیه، شرط اولیه، تولید انرژی داخلی و انتقال حرارت جابه جایی با محیط به عنوان جمله

$$T_2(x,t) = \int_0^1 \varphi(\zeta) d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-t}}{\eta_n} \left[\int_0^1 \varphi(\zeta) \cos(n\pi\zeta) d\zeta \right] [(\sin(\eta_n t) + \eta_n \cos(\eta_n t))] \cos(n\pi x) \quad (۳۱)$$

$$T_3(x,t) = \int_0^t \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2(t-\xi)}) \int_0^1 f(\zeta, \xi) d\zeta \right] d\xi + \int_0^t \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-(t-\xi)}}{\eta_n} \left[\int_0^1 f(\zeta, \xi) \cos(n\pi\zeta) d\zeta \right] (\sin \eta_n(t-\xi) \cos(n\pi x)) \right\} d\xi \quad (۳۲)$$

در نهایت $T_4(x,t)$ با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دست می‌آید. مسئله شماره ۴ با شرایط زیر حل می‌شود:

$$\varphi(x) = \psi(x) = f(x,t) = 0 \quad (۳۳)$$

$$\frac{\partial^2 T_4}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial T_4}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} \quad (الف-۳۴)$$

$$T_4(x,0) = 0 \quad (ب-۳۴)$$

$$\frac{\partial T_4(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (ج-۳۴)$$

$$\frac{\partial T_4(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (د-۳۴)$$

$$\frac{\partial T_4(1,t)}{\partial x} = m(T_4 - T_{\infty}) \quad (ه-۳۴)$$

پس از یک سری عملیات ریاضی $T_4(x,t)$ به شکل زیر به دست می‌آید:

با استفاده از شرط مرزی $\frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = 0$ خواهیم داشت:

$$T_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos(\beta_n x) \quad (۲۲)$$

همچنین با استفاده از شرط مرزی $T_1(1,t) = 0$ داریم:

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (۲۳)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۲۱) نسبت به x و t و جای‌گذاری نتایج در معادله (۲۰) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} + \frac{dT_n(t)}{dt} + \beta_n^2 T_n(t) = 0 \quad (۲۴)$$

حل معادله بالا عبارت است از:

$$T_n(t) = e^{-t} [a_n \sin(\eta_n t) + b_n \cos(\eta_n t)] \quad (۲۵)$$

که

$$\eta_n = \sqrt{\beta_n^2 - 1} \quad (۲۶)$$

از معادله (۲۲) تا (۲۵) نتیجه می‌شود:

$$T_n(t) = e^{-t} [a_n \sin(\eta_n t) + b_n \cos(\eta_n t)] \times \cos \beta_n x \quad (۲۷)$$

حال با استفاده از شرایط اولیه خواهیم داشت:

$$b_n = 0 \quad (۲۸)$$

که

$$a_n = \frac{2}{\eta_n} \int_0^1 \psi(\zeta) \cos(\beta_n \zeta) d\zeta \quad (۲۹)$$

در نهایت حل مسئله شماره ۱ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T_1(x,t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \int_0^1 \psi(\zeta) d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-t}}{\eta_n} \left[\int_0^1 \psi(\zeta) \cos(n\pi\zeta) d\zeta \right] \sin(\eta_n t) \cos(n\pi x) = F(x,t, \psi(\zeta)) \quad (۳۰)$$

حال با استفاده از تئوری ساختار خواهیم داشت:

اثرگذاری میدان‌های دمای به‌دست آمده در زمان‌های مختلف برای دیوار یک‌بعدی که سطح سمت چپ آن عایق و سطح سمت راست آن در معرض جابه‌جایی با محیط قرار دارد، است. این شکل یک رفتار گذرا از انتقال حرارت هذلولوی در یک دیوار محدود را نشان می‌دهد. از این شکل مشاهده می‌شود که در زمان‌های کوچک T_1 در مقایسه با T_2 و T_3 غالب بوده و T_4 تقریباً ثابت است. به‌طور کلی T_1 به‌خصوص در نزدیکی سطح سمت چپ نقش بزرگ‌تری را ایفا کرده و T_4 بزرگ‌ترین نقش را در نزدیک سطح سمت راست خواهد داشت. از این رو در می‌یابیم که در زمان‌های کوچک اثر T_1 و T_4 در مقایسه با T_2 و T_3 غالب است. این به‌دلیل تغییرات ناگهانی سریعی است که در $t > 0$ اتفاق می‌افتد. همچنین شار حرارتی که از سطح سمت راست در $x = 1$ منتقل می‌شود نقش زیادی در بزرگ‌شدن مقدار T_4 دارد. با افزایش زمان (شکل ۱-ب و ۱-ج) اثر T_3 بر روی دمای کلی افزایش می‌یابد. افزایش T_3 به‌دلیل وارد شدن انرژی به دیوار از سطح سمت چپ است. از شکل‌ها می‌توان مشاهده نمود که در $t = 0.7$ ، T_1 و T_3 اثر بیشتری بر روی دمای کلی نسبت به T_2 و T_4 خواهند داشت. در برخی از زمان‌ها T_2 اثر ناچیزی بر روی میدان دمای کلی دارد. این موضوع به‌دلیل این است که نقش دمای اولیه به مرور در حال کاهش است. هنگامی که زمان به $t = 1$ می‌رسد (شکل ۱-ج) T_3 بزرگ‌ترین نقش را در دمای کلی بازی می‌کند. این بدین معنی است که دمای دیوار سمت راست که ثابت است در این زمان به داخل دیوار نفوذ کرده و کل دامنه تحت تأثیر این دما قرار می‌گیرد. همان‌گونه که از شکل ۱ مشاهده می‌شود شیب تغییرات T_4 در کل دامنه حل در زمان‌های مختلف ناچیز است.

$$T_4(x,t) = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t} \left(\frac{-2T_\infty \sin \beta_n}{\beta_n \gamma_n} \sin \gamma_n t - \frac{2T_\infty \sin \beta_n}{\beta_n} \cos \gamma_n t \right) \cos(n\pi x) \quad (35)$$

که

$$\beta_n \tan \beta_n = -m, \gamma_n = \sqrt{\beta_n^2 - 1} \quad (36)$$

در نهایت توزیع کلی دما در داخل صفحه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

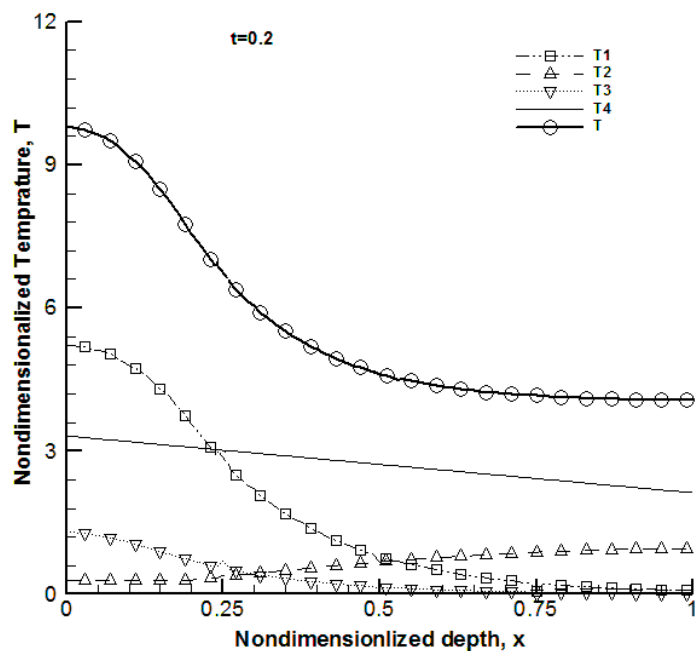
$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t) + T_3(x,t) + T_4(x,t)$$

۳- نتایج و بحث

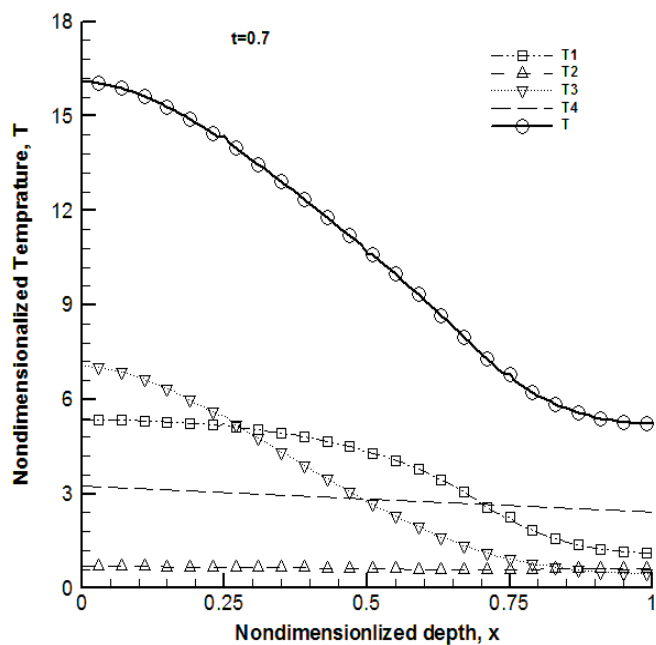
در این مقاله توزیع دما در یک دیوار یک‌بعدی با شرایط اولیه و مرزی غیرصفر بررسی شد. مطابق با کار قبلی که توسط لام و فانگ [۲۲] انجام شده است مقدار $g_0 = 100$ و $\mu = 5$ در نظر گرفته شد. همچنین باید توجه کرد که تمامی میدان‌های به‌دست آمده از $T_1(x,t)$ تا $T_4(x,t)$ به شکل سری‌های بینهایت هستند. با استفاده از تست خطای نسبی می‌توان نوشت:

$$\frac{|T_{n+1}(x,t) - T_n(x,t)|}{|T_{n+1}(x,t)|} < \varepsilon \quad (37)$$

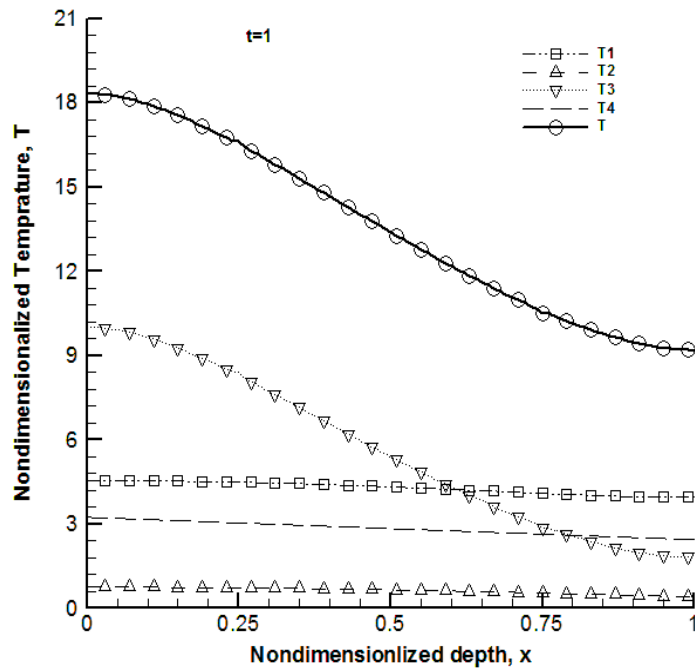
که $T_{n+1}(x,t)$ و $T_n(x,t)$ دو ترم متوالی دما در سری موجود و $\varepsilon = 10^{-6}$ خطای نسبی است که در این مطالعه در نظر گرفته شده است. در این مطالعه معادله دیفرانسیل پاره‌ای اصلی را به چهار مسئله ساده‌تر تبدیل کرده که به‌ترتیب نمایانگر نرخ تغییرات دمای اولیه، شرط اولیه، تولید انرژی داخلی و شار حرارتی منتقل شده از طریق جابه‌جایی از سطح سمت راست دیوار بوده و توسط معادلات (۳۰) تا (۳۵) ارائه شده‌اند. شکل ۱ نشانگر



شکل ۱-الف- اثرگذاری میدان‌های دما در $t=0.2$ برای یک دیوار با سطح سمت چپ عایق و سطح سمت راست در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی با محیط



شکل ۱-ب- اثرگذاری میدان‌های دما در $t=0.7$ برای یک دیوار با سطح سمت چپ عایق و سطح سمت راست در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی با محیط



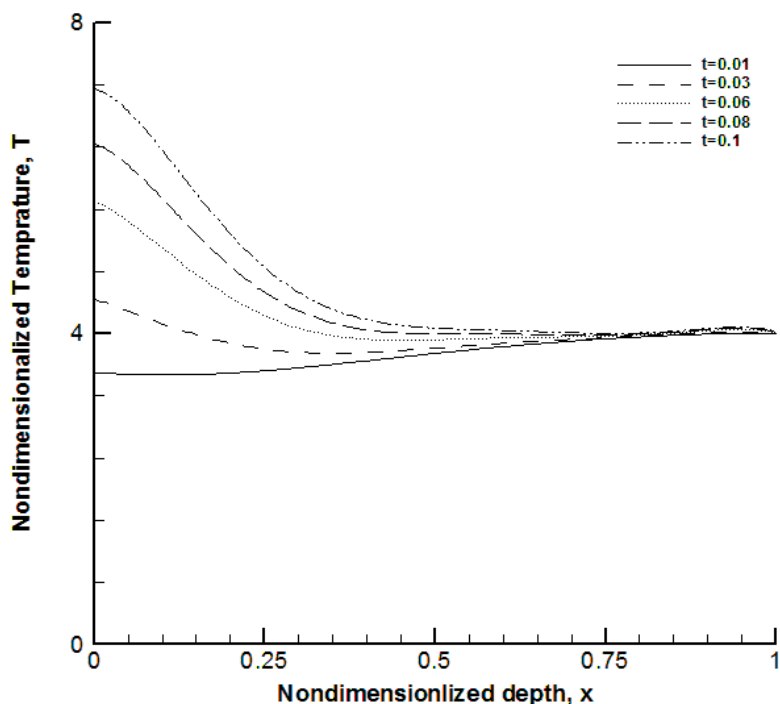
شکل ۱-ج- اثرگذاری میدان‌های دما در $t=1$ برای یک دیوار با سطح سمت چپ عایق و سطح سمت راست در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی با محیط

داخل دیوار از $t=0$ تا $t=5$ در شکل ۲ نشان داده شده است. این موضوع از شکل ۲-الف قابل مشاهده است که دمای نقاط نزدیک سطح سمت چپ در مقایسه با نقاط دیگر سریع‌تر تحت تأثیر قرار گرفته که دلیل آن را تمرکز بیشتر انرژی در نزدیکی سطح سمت چپ و ناچیز بودن اثر سطح سمت راست بر روی میدان دما می‌توان دانست. هنگامی که زمان افزایش می‌یابد انرژی بیشتری به پایین دست دیوار منتقل می‌شود. این موضوع قابل مشاهده است که میدان دما در زمان‌های مختلف دارای شکل مشابهی است. همان‌گونه که در شکل ۲-ب نشان داده شده است با افزایش زمان از $t=0.1$ تا $t=5$ انرژی از سطح سمت چپ به کل دامنه حل نفوذ کرده و توزیع دماهای مختلف از یکدیگر دور می‌شوند. نتیجه دیگری که از این اشکال می‌توان به دست آورد این است که شکل پروفیل‌های دما تقریباً بعد از زمان $t=0.1$ ثابت باقی می‌ماند. علت آن این است که با افزایش زمان و جذب بیشتر انرژی دمای کل دیواره بالاتر رفته و در واقع دیوار به یک تعادل حرارتی می‌رسد. همچنین قابل مشاهده است که اختلاف دما بین دیوار سمت چپ و سمت راست

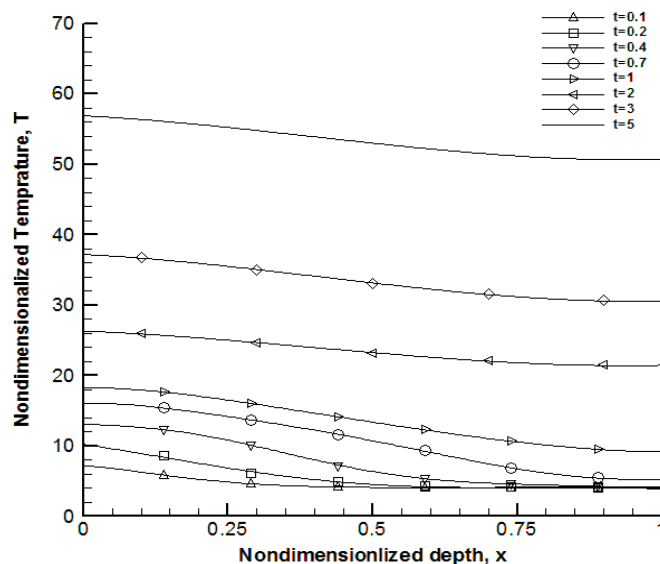
همچنین در شکل ۲-الف مشاهده می‌شود به دلیل تولید انرژی داخلی با گذشت زمان دمای کلی در مجاورت سطح سمت چپ به شدت افزایش می‌یابد. اما اگر به سمت راست دیوار حرکت کنیم توزیع دما محدود به یک مقدار ثابت در سطح سمت راست دیوار می‌شود. این موضوع به این صورت توصیف می‌شود که مقدار انتقال حرارت جابه‌جایی در دیوار سمت راست بسیار بزرگ بوده و تمامی انرژی تولید شده در داخل دیوار به محیط منتقل می‌شود. در نتیجه اثر تولید انرژی داخلی از بین رفته و یک توزیع دمای یکنواختی از $x=0.75$ به بعد ایجاد می‌کند. این موضوع در شکل ۲-ب نیز قابل مشاهده است. اما باید توجه نمود که با افزایش دما از $t=0.1$ تا $t=5$ مقدار دمای بدون بعد در تمامی زمان‌ها یکسان نخواهد بود. دلیل این موضوع این است که با گذشت زمان انرژی تولید شده در دیوار به شدت زیاد شده و شار حرارتی منتقل شده از طریق جابه‌جایی به محیط نمی‌تواند بر مقدار انرژی تولید شده در دیوار به شدت زیاد شده و شار حرارتی منتقل شده از طریق جابه‌جایی به محیط غلبه کند. همچنین باید توجه کرد که در تمامی میدان‌های دما نشان داده شده شیب دما در $x=1$ برابر صفر است. تاریخچه زمانی دما در

عبارت دیگر تولید انرژی داخلی با شار حرارتی منتقل شده از مرز سمت راست به محیط، در تعادل قرار می‌گیرد.

کمتز شده و تقریباً در زمان‌های مختلف یکسان می‌شود که نشانگر رسیدن به شرایط تعادل حرارتی است. به



شکل ۲-الف- میدان دما در زمان‌های مختلف از $t=0.01$ تا $t=0.1$



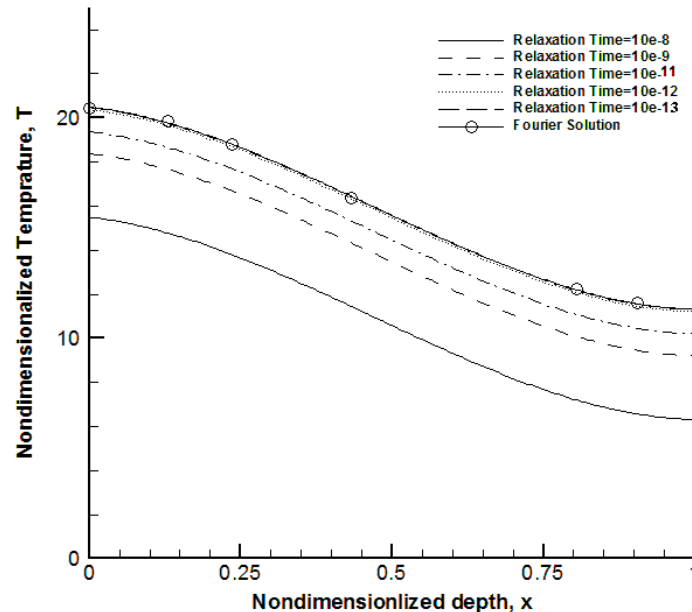
شکل ۲-ب- میدان دما در زمان‌های مختلف از $t=0.1$ تا $t=5$

غیرفوری‌های زمان‌های آسایش مختلفی در نظر گرفته شده است. همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود در زمان آسایش بزرگ (10^{-8}) حل معادله غیرفوری‌های دمای کمتری را نسبت به حل فوری‌های پیش‌بینی می‌کند و هرچه

در شکل ۳ دمای بدون بعد در دیوار با استفاده از حل معادله انتقال حرارت فوری‌های و غیرفوری‌های نشان داده شده است. در حل معادله انتقال حرارت فوری‌های زمان آسایش برابر صفر و در حل معادله انتقال حرارت

زمان‌های آسایش کوچکتر از 10^{-13} تغییری در میدان دما ایجاد نشده و هر دو معادله نتیجه واحدی را ارائه می‌دهند. این موضوع نشان دهنده این است که اگر زمان آسایش به سمت صفر میل کند، معادله انتقال حرارت فوریه و غیرفوریه پیش‌بینی یکسانی از دما خواهند داشت.

زمان آسایش به سمت صفر میل می‌کند، حل معادله انتقال حرارت فوریه‌ای و غیرفوریه‌ای به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند. در نهایت هنگامی که زمان آسایش به 10^{-13} می‌رسد، دمای بدون بعد به دست آمده از حل معادله حرارت فوریه‌ای و غیرفوریه‌ای کاملاً بر هم منطبق می‌گردند. به علاوه با به دست آوردن دمای بدون بعد در



شکل ۳- میدان دما با استفاده از معادله انتقال حرارت فوریه و غیرفوریه در زمان‌های آسایش مختلف

۴- نتیجه گیری

- با گذشت زمان اثر T_3 بر روی میدان دمای کلی افزایش می‌یابد.
- در $t = 0.7$ ، T_1 و T_3 در مقایسه با T_2 و T_4 تأثیر بیشتری بر روی میدان دما دارند.
- هنگامی که زمان به $t = 1$ می‌رسد، نقش T_3 نقش بزرگ‌تری را در دمای کلی بازی می‌کند.
- نقاط نزدیک سطح سمت چپ سریع‌تر از نقاط پایین دست دیوار تحت تأثیر تولید انرژی داخلی قرار می‌گیرند.
- با افزایش زمان انرژی بیشتری به پایین دست دیوار منتقل می‌شود. همچنین قابل مشاهده است که پروفیل دما در کلیه زمان‌ها دارای شکل مشابهی می‌باشد.

در این مقاله حل تحلیلی انتقال حرارت هدایتی غیرفوریه‌ای یک‌بعدی در یک دیوار تخت بررسی شد. هدف از این مطالعه ارائه یک روش تحلیلی برای بررسی پدیده موج حرارتی در یک دیوار محدود با شرایط مرزی غیرصفر (سطح سمت چپ عایق و سطح سمت راست در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی با محیط) و شرایط اولیه غیرصفر می‌باشد. یافته‌های کلیدی و نتایج به دست آمده از حل انجام شده به شرح زیر است:

- در زمان‌های کوچک اثر T_1 در مقایسه با T_2 و T_3 بیشتر و T_4 تقریباً ثابت بوده و T_2 و T_3 تأثیرگذاری کمتری در دمای کلی دارند.

تقدیر و تشکر

این تحقیق با حمایت پارک علم و فناوری دانشگاه سمنان طبق طرح حمایت از پایان‌نامه‌های دکتری به شماره قرارداد ۳۱۵/۹۰۷/۱۰۳ انجام شده است.

- پس از $t = 0.1$ شکل میدان‌های دما تقریباً مشابه است.
- با میل کردن زمان آسایش به سمت صفر معادله انتقال حرارت فوریه و غیرفوریه پیش‌بینی یکسانی را از دما در دیوار تخت خواهند داشت.

مراجع

- [1] Qiu, T.Q., Juhasz, T., Suarez, C., Bron, W.E., Tien, C.L. (1994). "Femtosecond laser heating of multi-layer metals—II. Experiments". International journal of heat and mass transfer, Vol. 37, No. 17, pp. 2799-2808.
- [2] Tang, D.W., Araki, N. (1996). "Analytical solution of non-Fourier temperature response in a finite medium under laser-pulse heating". Heat and Mass Transfer, Vol. 31, No. 5, pp. 359-363.
- [3] Tang, D.W., Araki, N. (2000). "Non-Fourier heat conduction behavior in finite mediums under pulse surface heating". Materials Science and Engineering: A, Vol. 292, No. 2, pp. 173-178.
- [4] Özişik, M.N., Vick, B. (1984). "Propagation and reflection of thermal waves in a finite medium". International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 27, No. 10, pp. 1845-1854
- [5] Lewandowska, M., Malinowski, L. (1998). "Hyperbolic heat conduction in the semi-infinite body with the heat source which capacity linearly depends on temperature". Heat and Mass Transfer, Vol.33, No. 5-6, pp. 389-393.
- [6] Lewandowska, M., Malinowski, L. (2006). "An analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for the case of a finite medium symmetrically heated on both sides". International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 33, No. 1, pp. 61-69.
- [7] Abdel-Hamid, B. (1999). "Modeling non-Fourier heat conduction with periodic thermal oscillation using the infinite integral transform". Applied Mathematical Modeling, Vol. 23, No. 12, pp. 899-914.
- [8] Jiang, F. (2006). "Solution and analysis of hyperbolic heat propagation in hollow spherical objects". Heat and Mass Transfer, Vol. 42, No. 12, pp. 1083-1091.
- [9] Moosaie, A. (2007). "Non-Fourier heat conduction in a finite medium subjected to arbitrary periodic surface disturbance". International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 34, No. 8, pp. 996-1002.
- [10] Moosaie, A. (2008). "Non-Fourier heat conduction in a finite medium subjected to arbitrary non-periodic surface disturbance". International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 35, No. 3, pp. 376-383.
- [11] Babaei, M.H., Chen, Z.T. (2008). "Hyperbolic heat conduction problem in a functionally graded hollow sphere". International Journal of Thermophysics, Vol. 29, No. 4, pp. 1457-1469.
- [12] Zhou, J., Zhang, Y., Chen, J.K. (2008). "Non-Fourier heat conduction effect on laser-induced thermal damage in biological tissues". Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, Vol. 54, No. 1, pp. 1-19.
- [13] Moosaie, A. (2009). "Axisymmetric non-Fourier temperature field in a hollow sphere". Archive of Applied Mechanics, Vol. 79, No. 8, pp. 679-694.
- [14] Ahmadikia, H., Rismanian, M. (2011). "Analytical solution of non-Fourier heat conduction problem on a fin under periodic boundary conditions". Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 25, No. 11, pp. 2919-2926.
- [15] Bamdad, K., Azimi, A., Ahmadikia, H. (2012). "Thermal performance analysis of arbitrary-profile fins with non-fourier heat conduction behavior". Journal of Engineering Mathematics, Vol. 76, No. 1, pp. 181-193.

- [16] Gaikwad, K.R., Ghadle, K.P. (2012). "Nonhomogeneous heat conduction problem and its thermal deflection due to internal heat generation in a thin hollow circular disk". *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 35, No. 6, pp. 485-498.
- [17] Jiang, F. (2006). "Solution and analysis of hyperbolic heat propagation in hollow spherical objects". *Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, No. 12, pp. 1083-1091.
- [18] Sadd, N.H., Cha, C.Y. (1982). "Axisymmetric non-Fourier temperatures in cylindrically bounded domains". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 17, No. 3, pp.129-136.
- [19] Lam, T.T., Fong, E. (2011). "Application of solution structure theorem to non-Fourier heat conduction problems: Analytical approach". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol 54, No. 23, pp. 4796-4806.
- [20] Cattaneo, C. (1958). "Sur une former de l'equation de la chaleur elinant le paradoxe d'une propagation instance". *C.R. Acad. Sci*, Vol. 247, pp. 431-432.
- [21] Vernotte, P. (1958). "Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur". *C.R. Acad. Sci*, Vol. 246, pp. 3154-3155.
- [22] Morse, P. M., Feshbach, H. (1953). "Methods of theoretical physics". New York, McGraw-Hill, pp. 165-166.
- [23] Ready, J. (1978). "Industrial Application of Lasers Academic presses". New York.