

تعیین شکل سطح آزاد و نرخ جریان نشتی در زیر بستر کانالهای رو باز با استفاده از روش اجزای محدود شبکه ثابت هموار شده

محمد جواد کاظم زاده پارسی^{۱*} و فرهنگ دانشمند^۲
۱. گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شیراز
۲. دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۱۰ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۹/۲۲)

چکیده -

واژگان کلیدی :

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: mjk@iaushiraz.net

Free surface and seepage flow rate determination under the bed of open channels using smoothed fixed grid finite element method

M. J. Kazemzadeh-Parsi¹ and F. Daneshmand²

1. Mechanical Engineering Department, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran

2. School of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract: Free surface seepage flow problems in porous medias have many industrial and agricultural applications. In these problems, the geometric shape of the phreatic surface is unknown a priori and therefore the unconfined seepage problems are categorized as variable domain problems. Solving these problems using methods such as finite element method undergoes some difficulties because the domain boundary changes in each iteration and remeshing is inevitable. In the present paper, the smoothed fixed grid finite element method which is a new numerical approach based on non-boundary-fitted meshes is used to solve free surface seepage problems. The use of non-boundary-fitted meshes leads to simplification of solution of variable domain problems. In this method, gradient smoothing technique is used to formulate internal and boundary intersecting elements. To evaluate the applicability of the proposed method, some numerical examples are solved and the results are compared with those presented in the literature.

Keywords: Smoothed fixed grid finite element method, Fluid flow in porous materials, Free surface flow, Non-boundary-fitted meshes.

۱- مقدمه

نیازمند تکنیکهای ویژه‌ای می‌کند.

حل تحلیلی مسائل نشت نامحدود به جز در موارد ساده امکانپذیر نبوده [۳، ۴] و در بسیاری از مسائل واقعی مهندسی استفاده از روشهای عددی اجتناب ناپذیر است. به دلیل مجهول بودن دامنه مسئله و وجود شرایط مرزی غیر خطی، حل عددی این گونه مسئله غالباً به صورت تکراری انجام می‌شود. به این ترتیب که فرایند حل با انتخاب یک حدس اولیه برای مرز مجهول شروع شده و سپس در هر مرحله تکرار شکل مرز تصحیح شده تا در نهایت شرایط مرزی غیر خطی روی سطح آزاد سیال ارضاء شوند. بنابراین به دلیل تغییر هندسه مسئله در هر مرحله تکرار، مسائل نشت نامحدود جزو مسائل دارای دامنه متغیر دسته‌بندی می‌شوند. روشهای عددی متفاوتی تاکنون برای حل این گونه مسائل مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از روشهای متداول برای چنین مسائلی، روش اجزای مرزی است [۵]. در این روش، به دلیل عدم استفاده از اجزای دامنه‌ای، تغییرات مرز به راحتی صورت می‌گیرد. این ویژگی روش اجزای مرزی آن را به یک روش جذاب در زمینه مسائل نشت نامحدود تبدیل کرده است. با وجود این، روش اجزای مرزی دارای محدودیتهایی است که کاربرد آن را در برخی مسائل با

حرکت سیال دارای سطح آزاد در مواد متخلخل که اصطلاحاً نشت نامحدود نیز نامیده می‌شود پدیده‌ای است که در برخی مسائل مهندسی رخ می‌دهد. به عنوان نمونه به مسائل مربوط به سازه‌های آبی اشاره می‌شود که در آنها تمام یا بخشی از سازه از خاک به عنوان یک ماده متخلخل ساخته می‌شود. بررسی پدیده نشت در سازه‌های آبی از آن جهت اهمیت دارد که تعیین نواحی تر و خشک و همچنین تعیین نرخ جریان نشتی عامل تعیین کننده‌ای در طراحی سازه به شمار می‌رود. به عنوان مثال، پدیده شکست سد بر اثر نشت به عنوان یکی از مکانیزمهای مهم شکست سد شناخته می‌شود، زیرا شسته شدن سطح پایین دست سد بر اثر شدت جریان و ضعیف شدن بدنه خاکی سد باعث افزایش شیب پایین دست و در نهایت ناپایداری سد می‌شود [۱]. مسئله دیگری که موضوع مقاله حاضر است بررسی پدیده نشت در بستر کانالهای روباز است. چنین مسائلی در طراحی کانالهای آبیاری بسیار مورد توجه است [۲]. به طور کلی در مسائل نشت نامحدود به دلیل وجود شرایط مرزی غیر خطی روی سطح آزاد سیال و همچنین مجهول بودن شکل هندسی دامنه مسئله، پیچیدگیهایی وجود دارد که حل مسئله را

[۱۳، ۱۴]. روش دیگری که بر این اساس معرفی شده است روش اجزای محدود شبکه ثابت هموار شده است. در این روش هر اجزای به تعدادی سلول هموارسازی تقسیم شده و در هر سلول، گرادیان توابع شکل با استفاده از تکنیک هموارسازی گرادیان [۱۵] محاسبه می‌شود. این کار باعث می‌شود که گرادیان توابع شکل بدون مشتق‌گیری مستقیم از آنها و بلکه از طریق یک انتگرال‌گیری خطی روی وجوه سلولهای هموارسازی محاسبه شود. در نهایت، استفاده از تکنیک هموارسازی گرادیان این مزیت را به همراه دارد که محاسبه ماتریسهای اجزای متقاطع با مرز که قسمتی از آنها خارج از دامنه مسئله قرار دارد به سادگی انجام می‌شود. کاربرد این روش تاکنون در حل مسائل معکوس هندسی در انتقال گرمای هدایت [۱۶ - ۱۸] و مسائل دوبعدی نشت سیال در بدنه سدهای خاکی همگن [۱۹] و ناهمگن [۲۰] همین‌طور مسائل سه‌بعدی نشت نامحدود در بدنه سدهای خاکی همگن و ناهمگن [۲۱] مورد بررسی قرار گرفته است.

در تحقیق حاضر، حل مسائل نشت نامحدود در بستر کانالهای باز انتقال آب با استفاده از روش اجزای محدود شبکه ثابت هموار شده انجام شده و کارایی این روش در تعیین شکل سطح آزاد آب و نرخ جریان نشتی مورد مطالعه قرار گرفته است. در مقاله حاضر، پس از تعریف ریاضی مسائل نشت نامحدود به فرمول‌بندی مسئله براساس روش پیشنهادی پرداخته شده است. در ادامه پس از بیان نحوه پارامتری کردن مرز مجهول و الگوریتم اصلاح سطح، برای بررسی کارایی و تواناییهای روش پیشنهادی چند مثال عددی حل شده و نتایج با جوابهای موجود در دیگر منابع مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که از این روش می‌توان به‌طور مؤثری در حل مسائل نشت سیال در زیر بستر کانالهای آب استفاده کرد.

۲- تعریف ریاضی مسئله

در شکل (۱) طرح شماتیکی از مقطع یک کانال رو باز و نواحی خشک و تر در زیر بستر آن نشان داده شده است. مرز

مشکلاتی روبرو می‌کند. از جمله این محدودیتها می‌توان به حالتی که دامنه مسئله غیرآیزوتروپیک یا ناهمگن باشد اشاره کرد. از نمونه روشهای دیگری که در این زمینه به‌کارگرفته شده‌اند می‌توان به روش تفاضل محدود [۶]، روش حجم محدود [۷] و روش اجزای محدود [۸، ۹] اشاره کرد. گرچه این روشها محدودیت ذکر شده در مورد روش اجزای مرزی را ندارند، اما مشکل مشترکی که در هر سه این روشها وجود دارد وابستگی آنها به شبکه‌های محاسباتی منطبق بر مرز است. بنابراین در حل مسائل دارای دامنه متغیر با این روشها نیاز است که در هر مرحله تکرار که شکل مرز تغییر می‌کند، شبکه محاسباتی نیز اصلاح شده تا تطابق شبکه بر مرز حفظ شود. بنابراین از آن جهت که تولید یا اصلاح شبکه فرایندی وقت‌گیر است، استفاده از این روشها هزینه زیادی را به مسئله تحمیل می‌کند. برای غلبه بر این مشکل، روشهایی تحت عنوان روشهای بدون اجزا پیشنهاد شده‌اند [۱۰]. در این روشها، از یک شبکه محاسباتی از پیش تعیین شده برای حل مسئله استفاده نشده و مسئله توسط تعدادی گره که در دامنه مسئله توزیع می‌شوند، حل می‌شود. روشهای بدون اجزا نیز برای حل مسائل نشت نامحدود [۱۱] و مسائل جریان پتانسیل دارای سطح آزاد [۱۲] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. محدودیت اصلی روشهای بدون اجزای، حجم زیاد محاسباتی و مشکلاتی است که در هنگام ارضای شرایط مرزی در این روشها رخ می‌دهد. پیشنهاد دیگری که در زمینه کاهش وابستگی به شبکه‌های محاسباتی ارائه شده است، استفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز است. ویژگی اصلی روشهایی که براساس شبکه‌های غیر منطبق بر مرز تدوین می‌شوند این است که در آنها به دلیل استقلال مرز دامنه و شبکه محاسباتی از یکدیگر، مرز می‌تواند بدون نیاز به اصلاح شبکه، تغییر کرده و بنابراین حل مسائل دارای دامنه متغیر با این روشها ساده‌تر انجام می‌شود. از جمله روشهای مبتنی بر شبکه‌های غیر منطبق بر مرز به روش اجزای محدود شبکه ثابت اشاره می‌شود که برای اولین بار در حل مسائل الاستیسیته و مسائل بهینه‌سازی شکل به‌کار گرفته شد

$$h = h_c \quad \text{on } AB \quad (4)$$

که در این رابطه h_c حداکثر عمق سیال در کانال است. بر روی مرز زهکش CD که از طریق آن سیال وارد فیلتر زهکش می‌شود، شرایط مرزی اتمسفری اعمال می‌شود. به عبارت دیگر فشار روی این سطح باید صفر باشد و شرط مرزی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$h = y \quad \text{on } CD \quad (5)$$

بر روی سطح آزاد آب BC دو شرط مرزی به طور هم‌زمان باید اعمال شوند که عبارت‌اند از شرط مرزی فشار صفر و شرط مرزی نفوذ ناپذیری. این شرایط مرزی نیز به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad \text{on } BC \quad (6\text{-الف})$$

$$h = y \quad \text{on } BC \quad (6\text{-ب})$$

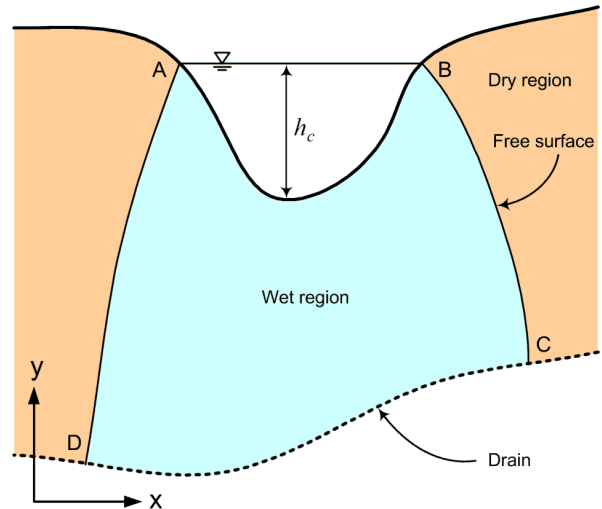
در معادله فوق n بردار یکه عمود بر سطح آزاد آب است. گرچه معادله حاکم بیان شده در معادله (۳) یک معادله دیفرانسیل خطی است، اما مجهول بودن شکل هندسی دامنه مسئله و غیر خطی بودن شرط مرزی بیان شده در معادله (۶-ب)، موجب پیچیده شدن حل این گونه مسائل می‌شود.

لازم به ذکر است در صورتی که در قسمتی از مسئله شرط مرزی تقارنی وجود داشته باشد، این شرط به صورت شرط مرزی نفوذ ناپذیری اعمال می‌شود. پس از حل معادله حاکم و شرایط مرزی بیان شده در معادله‌های (۳ تا ۶) و به دست آمدن شکل سطح آزاد آب و میدان هد پیزومتريک در دامنه مسئله، می‌توان نرخ جریان نشتی q از هر سطح مورد نظر را با استفاده از سرعت داری بیان شده در معادله (۲) به صورت زیر به دست آورد.

$$q = -k \int \nabla h \, d\Gamma \quad (7)$$

۳- روش اجزای محدود شبکه ثابت هموار شده

در روش اجزای محدود استاندارد، دامنه مسئله به تعدادی جزء تقسیم‌بندی می‌شود که اصطلاحاً شبکه محاسباتی نامیده می‌شود. شبکه‌بندی باید به نحوی انجام شود که وجوه اجزا



شکل ۱- طرح شماتیکی از مقطع یک کانال روباز و نشت سیال در بستر کانال و تشکیل نواحی تر و خشک و سطح آزاد آب

بین نواحی خشک و تر، سطح آزاد آب بوده و هدف از حل مسئله نشت نامحدود به دست آوردن شکل و مکان این سطح و نیز نرخ جریان نشتی از بستر کانال است. هد پیزومتريک در هر نقطه از دامنه مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$h = \frac{p}{\rho g} + y \quad (1)$$

که در آن p ، ρ و g به ترتیب فشار، چگالی آب و شتاب جاذبه‌اند. در صورتی که v به عنوان بردار سرعت داری سیال در محیط متخلخل در نظر گرفته شود، می‌توان آن را برحسب هد پیزومتريک به صورت زیر بیان کرد.

$$v = -k \nabla h \quad (2)$$

در این معادله k ضریب هدایت هیدرولیکی است. در صورتی که معادله (۲) در معادله پیوستگی یا قانون بقای جرم جاگذاری شود، معادله حاکم زیر که تحت عنوان معادله لاپلاس شناخته می‌شود به دست خواهد آمد.

$$\nabla^2 h = 0 \quad (3)$$

شرایط مرزی مورد نیاز برای حل معادله دیفرانسیل فوق در ادامه تشریح می‌شود. با توجه به شکل (۱)، توزیع فشار روی سطوح داخلی کانال AB به صورت فشار هیدرواستاتیک است، شرایط مرزی روی این سطوح به صورت زیر بیان می‌شوند.

به کار بردن روش باقی مانده‌های وزن دار برای ایجاد شکل ضعیف معادلات حاکم و سپس استفاده از روش گالرکین برای انتخاب توابع وزن، معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی طبیعی را به صورت زیر گسسته کرد [۲۲].

$$KH = R \quad (9)$$

در معادله فوق R بردار بارگذاری و K ماتریس ضرایب است که به صورت زیر برحسب مشتقات توابع شکل تعریف می‌شود.

$$K = \int_{\Omega} B^T B d\Omega \quad (10)$$

در معادله فوق ماتریس B عبارت است از گرادیان توابع شکل که به صورت زیر بیان می‌شود.

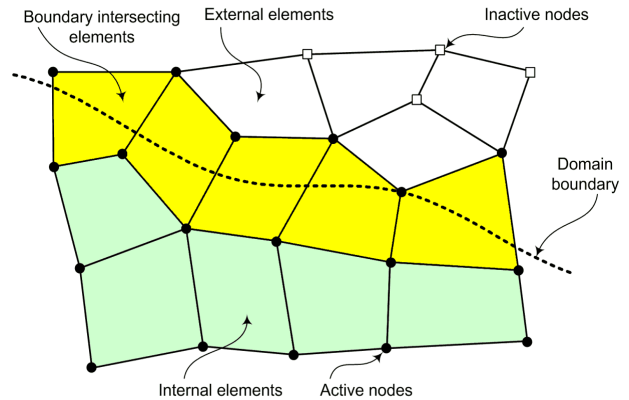
$$B = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} N \quad (11)$$

محاسبه ماتریس ضرایب در معادله (۱۰) نیازمند انتگرال‌گیری روی دامنه مسئله است. در روش اجزای محدود استاندارد، به دلیل تطابق شبکه بر مرز، این انتگرال به یک سری انتگرال روی اجزای شکسته شده و با استفاده از نگاشت مختصات و روش انتگرال‌گیری گوس محاسبه می‌شود. در مقاله حاضر، به دلیل عدم تطابق شبکه بر مرز، انتگرال بیان شده در معادله (۱۰) به انتگرال روی اجزای داخلی و قسمت داخلی اجزای متقاطع با مرز شکسته می‌شود. به عبارت دیگر معادله (۱۰) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$K = \sum_{i \in IE} \int_{\Omega_i} B^T B d\Omega + \sum_{i \in BIE} \int_{\omega_i} B^T B d\Omega \quad (12)$$

در معادله فوق IE و BIE به ترتیب بیانگر مجموعه اجزای داخلی و مجموعه اجزای متقاطع با مرز هستند. Ω_i بیانگر ناحیه جزء داخلی ω_i و i ام نیز بیانگر قسمت داخلی جزء متقاطع با مرز i ام است.

جمله اول از سمت راست معادله (۱۲) شامل انتگرال‌گیری روی دامنه اجزای داخلی است و به سادگی با استفاده از نگاشت مختصات و روش انتگرال‌گیری گوس قابل محاسبه است. اما محاسبه جمله دوم از سمت راست این معادله که شامل انتگرال‌گیری روی قسمت داخلی اجزای متقاطع با مرز است

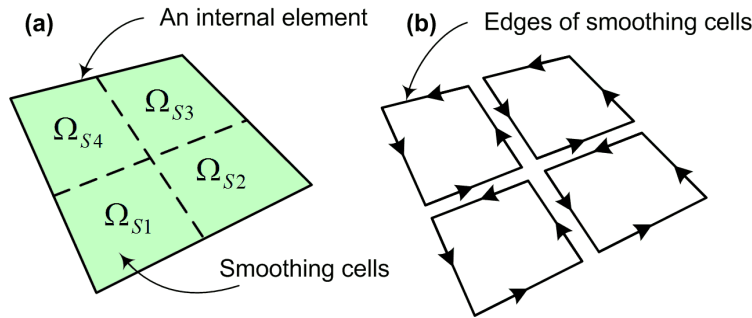


شکل ۲- نمونه‌ای از یک شبکه متقاطع با مرز که در آن مرز دامنه از درون اجزا عبور کرده است

بر مرز دامنه منطبق باشد. ساخت شبکه‌های منطبق بر مرز به ویژه هنگامی که مسئله در دست حل، یک مسئله دارای دامنه متغیر باشد، فرایندی پرهزینه است. زیرا در هر مرحله تکرار که هندسه مسئله تغییر می‌کند، شبکه نیز باید اصلاح شده تا تغییرات هندسی را دنبال کند. یکی از راههای پرهیز از اصلاح شبکه، استفاده از شبکه‌های غیر منطبق بر مرز است. در شبکه‌های غیر منطبق بر مرز، مرز دامنه می‌تواند مستقل از شبکه تغییر کرده و نیاز به اصلاح شبکه برطرف می‌شود. در شکل (۲) نمونه‌ای از یک شبکه غیر منطبق بر مرز نشان داده شده است. همانطور که در این شکل دیده می‌شود قسمتی از مرز دامنه از درون اجزا عبور کرده و در نتیجه اجزا با توجه به موقعیتشان نسبت به مرز به سه دسته اجزای داخلی، خارجی و متقاطع با مرز تفکیک شده‌اند. در تحقیق حاضر، مجموعه اجزای داخلی و متقاطع با مرز اصطلاحاً اجزا فعال و گره‌های قرارگرفته روی این اجزا گره‌های فعال نامیده شده است. در این صورت، میدان متغیر وابسته توسط اجزای فعال و برحسب مقادیر گره‌ای در گره‌های فعال به صورت زیر تقریب‌زده می‌شود.

$$h^h(x) = N^T H \quad (8)$$

در معادله فوق N برداری شامل توابع شکل و H برداری شامل مقادیر گره‌ی مربوط به گره‌های فعال است. به این ترتیب پس از ساخته شدن توابع تقریب و تشکیل بردار N می‌توان با



شکل ۳- الف) نمونه‌ای از یک جزء داخلی و تجزیه آن به سلولهای هموارسازی، ب) مسیرهای محاسبه انتگرالهای خطی

یک تابع تکه‌تکه ثابت^۱ در نظر گرفته می‌شود [۱۵].

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1/A_S & x \in \Omega_S \\ 0 & x \notin \Omega_S \end{cases} \quad (15)$$

در معادله فوق A_S مساحت سلول هموارسازی است. چنین انتخابی برای تابع هموارسازی φ_S موجب می‌شود که جمله اول از سمت راست معادله (۱۴) صفر شده و این معادله به صورت زیر برحسب انتگرال خطی روی وجوه سلولهای هموارسازی تبدیل شود.

$$\tilde{\nabla} N_i^S = \frac{1}{A_S} \int_{\Gamma_S} N_i \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (16)$$

به عبارت دیگر استفاده از تکنیک هموارسازی گرادیان و انتخاب مناسب تابع هموارسازی، موجب شد که گرادیان توابع شکل بدون نیاز به مشتق‌گیری مستقیم از توابع شکل، به صورت یک انتگرال خطی روی مرز سلول هموارسازی مطابق معادله (۱۶) به دست آید. بنابراین با استفاده از معادله (۱۶) برای محاسبه مشتقات توابع شکل، می‌توان ماتریس گرادیان هموار شده $\tilde{\mathbf{B}}_S$ را به صورت زیر در هر سلول هموارسازی تعریف کرد.

$$\tilde{\mathbf{B}}_S = \frac{1}{A_S} \int_{\Gamma_S} \mathbf{n} N \, d\Gamma \quad (17)$$

لازم به ذکر است که انتگرالهای بیان شده در معادله‌های (۱۶) و (۱۷) انتگرالهای خطی بوده و به سادگی با استفاده از روش گوس یک نقطه‌ای قابل محاسبه‌اند. برای این منظور لازم است در ابتدا نقطه برخورد وجوه سلولهای هموارسازی و مرز دامنه محاسبه شده و بخش داخلی وجوه سلولهای هموارسازی در نظر گرفته شود. سپس با تعریف یک نگاشت مختصات و آنگاه

نیاز به دقت بیشتری دارد. زیرا قسمت داخلی اجزای متقاطع با مرز از الگوی هندسی مشخصی پیروی نکرده و نمی‌توان مستقیماً از نگاشت برای انجام انتگرال‌گیری روی این نواحی استفاده کرد.

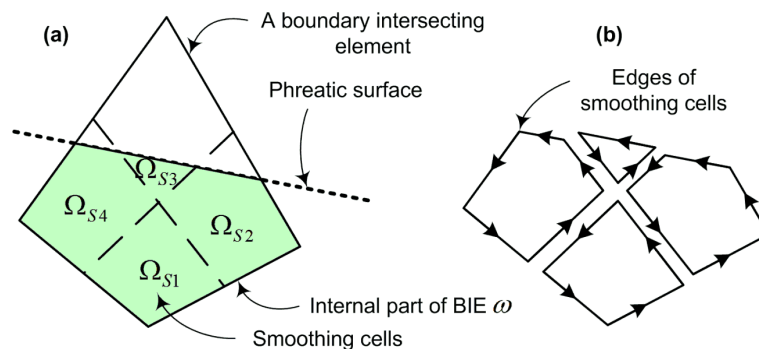
در مقاله حاضر، محاسبه مشتقات توابع شکل در معادله (۱۱) و محاسبه تمام انتگرالهای دامنه‌ای در معادله (۱۲) براساس تکنیک هموارسازی گرادیان انجام شده است. در این روش هر جزء به تعدادی سلول هموارسازی تقسیم شده و سپس در هر سلول هموارسازی، با تعریف یک هسته هموارسازی، گرادیان توابع شکل به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\tilde{\nabla} N_i^S = \int_{\Omega_S} \nabla N_i \phi_S \, d\Omega \quad (13)$$

در معادله فوق N_i تابع شکل مربوط به گره i ام، ϕ_S هسته هموارسازی مربوط به سلول هموارسازی S ام و Ω_S دامنه این سلول است. در شکل (۳) یک جزء داخلی و تقسیم‌بندی آن به سلولهای هموارسازی نشان داده شده است. با استفاده از قضیه انتگرال‌گیری جزء به جزء، معادله فوق به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\tilde{\nabla} N_i^S = - \int_{\Omega_S} N_i \nabla \varphi_S \, d\Omega + \int_{\Gamma_S} N_i \varphi_S \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (14)$$

که در آن Γ_S مرز سلول هموارسازی و \mathbf{n} بردار یکه عمود بر مرز آن است. در صورتی که تابع هموارسازی φ_S به صورت مناسبی انتخاب شود می‌توان مشتقات توابع شکل را به نحو ساده‌تری نیز بیان کرد. بنابراین برای این منظور، تابع هموارسازی φ_S به صورت



شکل ۴- الف) نمونه‌ای از یک جزء متقاطع با مرز و تجزیه آن به سلولهای هموارسازی، ب) مسیرهای محاسبه انتگرالهای خطی

پیروی نکرده و بنابراین استفاده از روشهای مرسوم برای محاسبه انتگرالهای دامنه‌ای روی این نواحی با مشکلاتی همراه است. این درحالی است که انتگرالهای خطی روی وجوه سلولهای هموارسازی بسیار ساده‌تر از انتگرالهای دامنه‌ای قابل محاسبه‌اند. بنابراین در روش حاضر، به دلیل عدم محاسبه انتگرالهای دامنه‌ای، از مشکلات مربوط به آنها نیز اجتناب شده است. در شکل (۴) یک جزء متقاطع با مرز و سلولهای هموارسازی و مرزهای آن که انتگرالهای خطی باید روی آنها محاسبه شوند، نشان داده شده است. از مزایای دیگر روش حاضر این است که به دلیل عدم استفاده از نگاشت مختصات برای انجام انتگرال‌گیریهای دامنه‌ای، محدودیتی روی زوایای داخلی اجزا وجود ندارد [۱۵].

۴- پارامتری کردن مرز مجهول و الگوریتم حل

هدف این تحقیق حل مسائل نشت نامحدود و دستیابی به یک شکل تقریبی برای سطح آزاد جریان سیال است. یکی از راههایی که در این مورد وجود دارد پارامتری کردن مرز مجهول و سپس جستجو در یک فضای پارامتری با ابعاد محدود است. برای این منظور، در این مقاله، تعداد محدودی نقاط کلیدی روی سطح آزاد در نظر گرفته و از طریق اتصال این نقاط توسط تعدادی پاره خط مرز مجهول تشکیل می‌شود. در این صورت اگر مختصات این نقاط کلیدی به طور مناسبی معین شوند، مرز مجهول توسط یک خط شکسته تقریب زده می‌شود. طرح شماتیکی از نحوه پارامتری کردن مرز در

استفاده از روش انتگرال‌گیری گوس، انتگرالهای بیان شده در معادله‌های (۱۶) و (۱۷) قابل محاسبه‌اند. لازم به ذکر است جزئیات این محاسبات در مرجع [۱۶] ارائه شده است. بنابراین با جاگذاری \tilde{B}_S از معادله فوق به جای ماتریس گرادیان B در معادله (۱۲) و شکستن انتگرال روی هر جزء به انتگرال روی سلولهای هموارسازی، داریم:

$$K = \sum_{i \in IE} \sum_S \int_{\Omega_S} \tilde{B}_S^T \tilde{B}_S d\Omega + \sum_{i \in BIE} \sum_S \int_{\omega_S} \tilde{B}_S^T \tilde{B}_S d\Omega \quad (18)$$

در اینجا باید توجه شود که ماتریس گرادیان هموار شده \tilde{B}_S در هر سلول هموارسازی یک ماتریس ثابت است. بنابراین عبارتهای زیر انتگرال در معادله فوق عبارتهای ثابتی بوده و از زیر انتگرال خارج می‌شوند و ماتریس ضرایب K به صورت زیر بیان می‌شود.

$$K = \sum_{i \in IE} \sum_S (\tilde{B}_S^T \tilde{B}_S A_S) + \sum_{i \in BIE} \sum_S (\tilde{B}_S^T \tilde{B}_S A_S) \quad (19)$$

به عبارت دیگر، در روش حاضر، محاسبه ماتریس ضرایب بدون انجام انتگرال‌گیری دامنه‌ای و تنها از طریق محاسبه انتگرالهای خطی روی وجوه سلولهای هموارسازی انجام شد. در شکل (۳) مسیرهایی که این انتگرالهای خطی روی آنها باید محاسبه شود برای یک جزء داخلی نشان داده شده است.

ویژگی قابل توجه روش حاضر هنگام محاسبه ماتریسهای اجزای متقاطع با مرز آشکار می‌شود. در این اجزا شکل هندسی قسمتهای داخلی آنها از الگوی هندسی مشخصی

باشند که نقاط کلیدی در معادله (۲۰) نتوانند بیانگر نقاط روی سطح آزاد باشند، حل مسئله امکانپذیر نخواهد بود.

همانطور که بیان شد حل عددی مسائل نشت نامحدود در یک فرایند تکراری انجام می‌شود. به این صورت که در ابتدا یک حدس اولیه برای بردار پارامترهای مجهول P در نظر گرفته و سپس در یک فرایند تکراری، پارامترهای شکل اصلاح شده تا شرایط مرزی غیر خطی روی سطح آزاد ارضا شود. بنابراین با توجه به شرط مرزی بیان شده در معادله (۶-ب) و معرفی یک پارامتر پایدارسازی، پارامترهای شکل باید طوری اصلاح شوند که ارتفاع نقاط کلیدی واقع بر روی سطح آزاد آب از معادله زیر پیروی کنند.

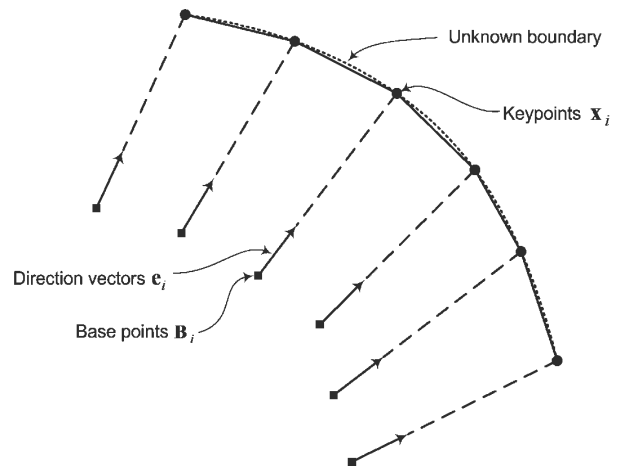
$$y_i^{new} = y_i^{old} + (h_i - y_i^{old})\alpha \quad (22)$$

در معادله فوق y_i^{old} و y_i^{new} ارتفاع نقطه کلیدی i ام به ترتیب در مرحله تکرار قبل و بعد هستند. h_i عبارت است از هد پیزومتریک محاسبه شده در مکان نقطه کلیدی i ام و α پارامتر پایدارسازی است. در صورتی که مختصات نقاط کلیدی از معادله (۲۰) در معادله (۲۲) جاگذاری شود، می‌توان به دستور زیر برای اصلاح پارامتر مجهول r_i در مرحله تکرار جدید دست یافت.

$$r_i^{new} = \frac{1}{e_{yi}} \left(r_i^{old} + (h_i - B_{yi} - e_{yi} r_i^{old}) \right) \quad (23)$$

از آنجا که متغیر میدان h تابعی غیرخطی از پارامترهای مجهول P است، پارامتر پایدارسازی α در معادله فوق بیانگر نوعی پارامتر آزادسازی است که باعث یکنواخت شدن نرخ همگرایی و کاهش نوسان و پرش احتمالی در پارامترهای مجهول در مراحل تکرار مختلف می‌شود. انتخاب این پارامتر به صورت تجربی انجام می‌شود و با مشاهده نوسان و پرش در مقدار پارامترهای مجهول، پارامتر α باید کاهش یابد.

نکته دیگری که باید مورد اشاره قرار گیرد معیار خاتمه فرایند تکراری فوق است. در تحقیق حاضر، فرایند تکرار زمانی خاتمه می‌یابد که میزان تغییر در پارامترهای مجهول در دو مرحله تکرار متوالی از حد معینی کوچکتر شود. به عبارت دیگر شرط خاتمه فرایند تکراری به صورت زیر نوشته می‌شود.



شکل ۵- پارامتری کردن مرز مجهول از طریق تعریف تعدادی نقاط کلیدی روی مرز

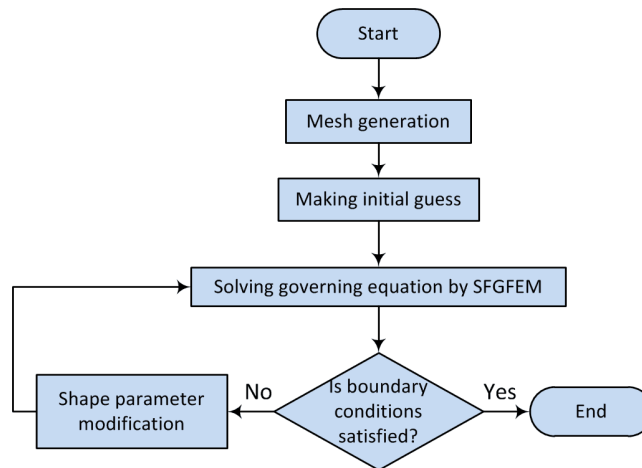
شکل (۵) نشان داده شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، مکان هر نقطه کلیدی توسط یک نقطه پایه، یک بردار جهت و فاصله آن تا نقطه پایه تعیین می‌شوند. به عبارت دیگر مکان نقاط کلیدی روی سطح آزاد به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$x_i = B_i + r_i e_i \quad (20)$$

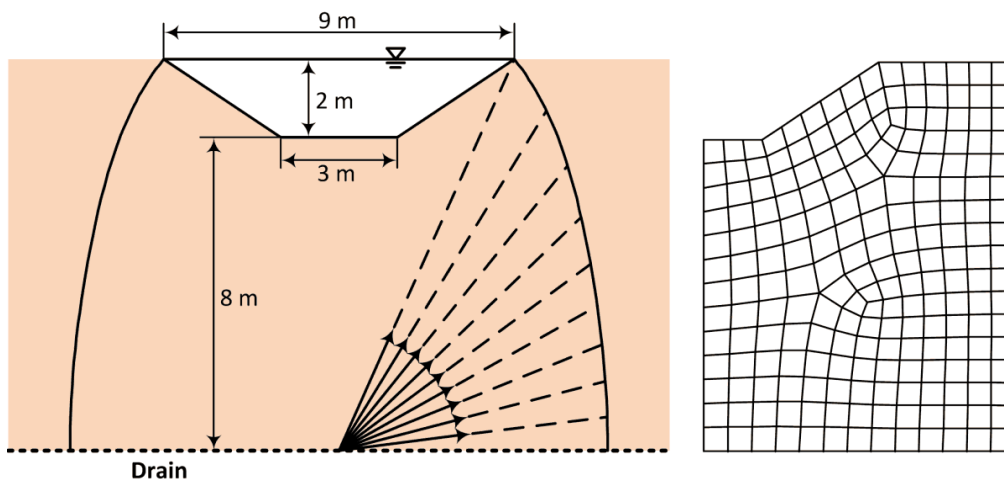
در معادله فوق B_i ، e_i و x_i به ترتیب مختصات نقطه پایه، بردار جهت و مختصات نقطه کلیدی i ام است. r_i نیز بیانگر فاصله نقطه کلیدی تا نقطه پایه است. در تحقیق حاضر، مختصات نقاط پایه و بردارهای جهت ثابت و تنها فاصله نقاط کلیدی تا نقاط پایه، r_i ، به عنوان پارامترهای مجهول در نظر گرفته شده است. بنابراین به ازای هر نقطه کلیدی تنها یک پارامتر مجهول وجود خواهد داشت. در صورتی که از n نقطه کلیدی برای تقریب مرز استفاده شود، بردار پارامترهای مجهول به صورت زیر مرتب می‌شود.

$$P = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T \quad (21)$$

در اینجا لازم است توجه شود نقاط پایه و بردارهای جهت باید به نحوی انتخاب شوند که سطح ساخته شده از طریق نقاط کلیدی که مختصات آنها در معادله (۲۰) ارائه شده است بتواند بیانگر تقریبی از سطح آزاد سیال باشد. به عبارت دیگر در صورتی که انتخاب نقاط پایه و بردارهای جهت به صورتی



شکل ۶- الگوریتم کلی حل مسئله نشت نامحدود



شکل ۷- ابعاد مقطع کانال در مثال اول به همراه نحوه پارامتری کردن سطح آزاد آب و شبکه غیر منطبق بر مرز مورد استفاده

۵-۱- مثال اول: کانال قرار گرفته روی یک سطح زهکش

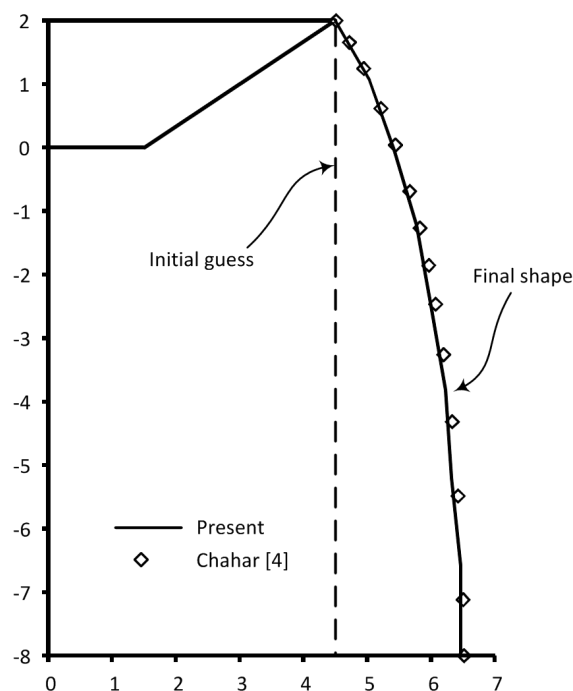
در مثال اول جریان نشتی در ناحیه بین زیر بستر یک کانال متقارن با مقطع دوزنقه و سطح زهکش افقی در زیر آن مورد بررسی قرار گرفته است. ابعاد هندسی کانال، عمق زهکش، عمق آب در کانال و نحوه انتخاب نقاط پایه و بردارهای جهت برای پارامتری کردن مرز مجهول در شکل (۷) نشان داده شده است. با توجه به تقارن موجود، تنها نیمی از دامنه مسئله مدل سازی شده است. شبکه غیر منطبق بر مرز مورد استفاده نیز در این شکل نشان داده شده است. همانطور که در شکل (۷) دیده می شود، انتخاب نقاط پایه و بردارهای جهت به نحوی انجام شده است که توانایی بازسازی مرز مجهول را

$$\sum_{i=1}^n |r_i^{\text{new}} - r_i^{\text{old}}| \leq \varepsilon \quad (24)$$

در این رابطه ε آستانه قابل قبول تغییر در دو مرحله تکرار متوالی است و باید به طور تجربی معین شود. با توجه به موارد بیان شده، الگوریتم کلی حل مسئله در شکل (۶) نشان داده شده است.

۵- مثالهای عددی

در این تحقیق برای بررسی کارایی روش پیشنهادی، چند مثال عددی حل شده و در دو مورد برای اعتباربخشی به نتایج، شکل سطح آزاد حاصل از روش پیشنهادی با نتایج ارائه شده در دیگر منابع مورد مقایسه قرار گرفته است.



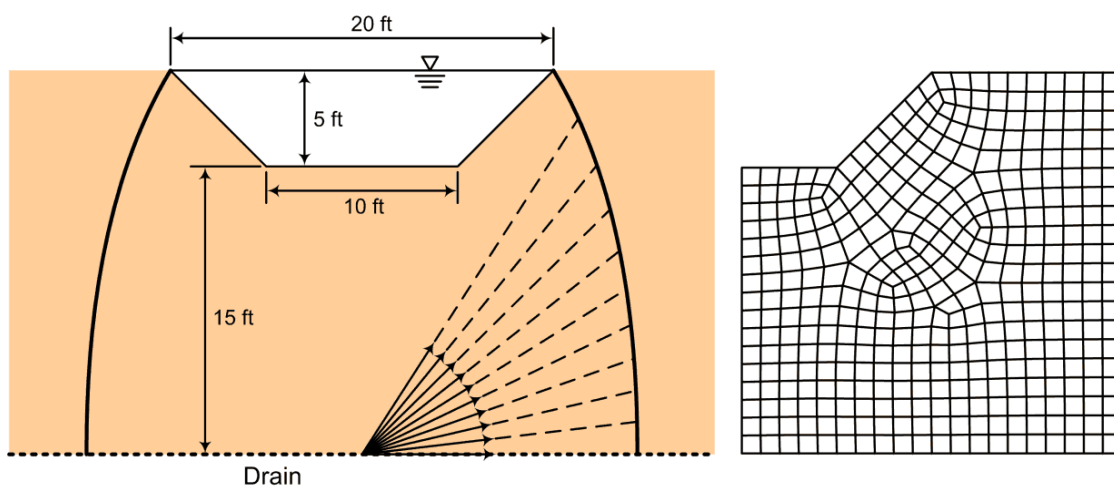
شکل ۸- شکل سطح آزاد به دست آمده برای مثال اول و مقایسه آن با مرجع [۴]

نشان داده شده است. با توجه به تقارن موجود، تنها نیمی از دامنه مسئله مدل‌سازی شده و شبکه غیر منطبق بر مرز مورد استفاده نیز در این شکل نشان داده شده است. در این مثال برای بررسی اثر انتخاب حدس اولیه برای شکل سطح آزاد، چند حدس اولیه متفاوت انتخاب شده و مسئله برای هر حالت به طور جداگانه حل شده و نتایج در شکل (۱۰) ارائه شده است. در این شکل، حدس اولیه، نحوه تغییر شکل سطح آزاد در چند مرحله تکرار و شکل نهایی حاصل از هر حالت نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود انتخاب حدس اولیه‌های متفاوت تاثیر قابل توجهی بر روی شکل نهایی سطح آزاد نداشته و در هر حالت شکل سطح آزاد پس از چند مرحله تکرار به شکل نهایی همگرا می‌شود. برای اعتبارسنجی نتایج حاصله، شکل نهایی سطح آزاد با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۳] مورد مقایسه قرار گرفته است. همانطور که در شکل (۱۱) دیده می‌شود، نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج ارائه شده در مرجع [۲۳] از تطابق خوبی برخوردارند. نرخ جریان نشتی نیز برای این مسئله با استفاده از معادله (۷) برابر

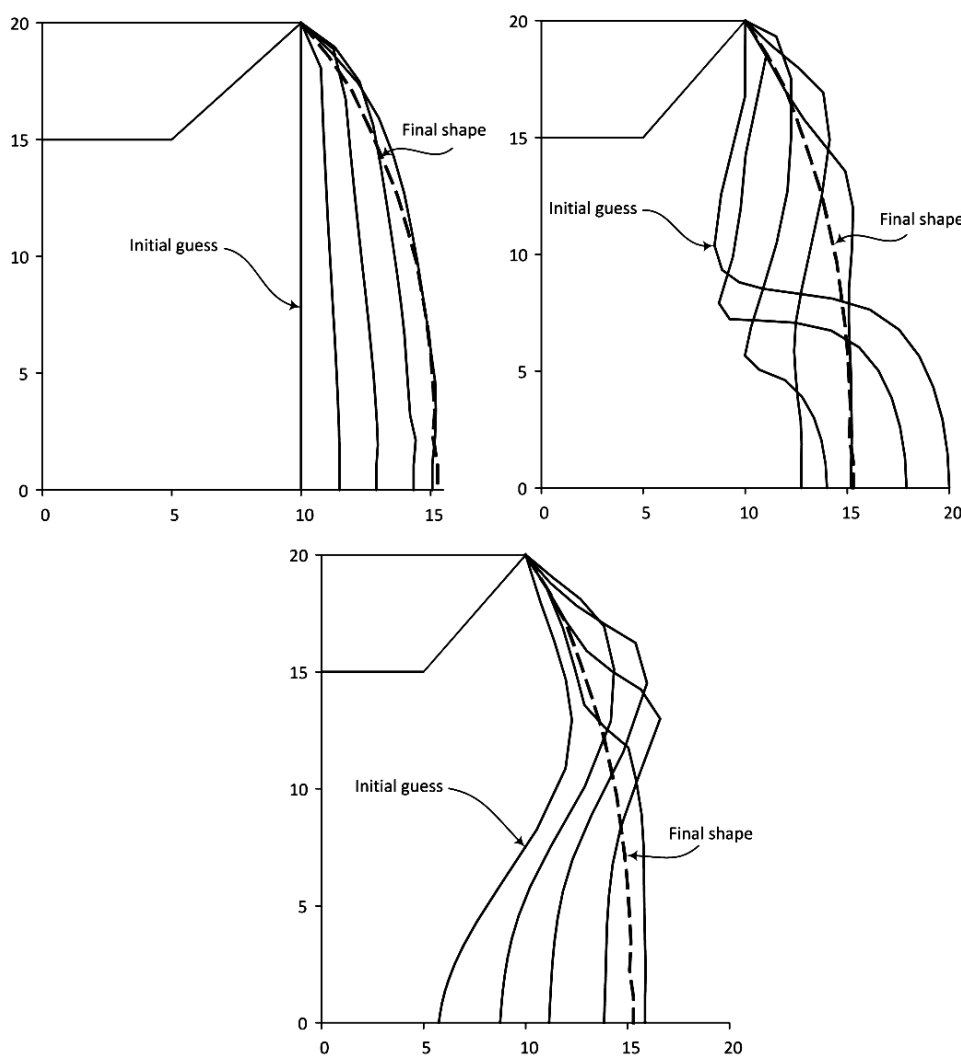
داشته باشند. با انتخاب یک حدس اولیه برای شکل سطح آزاد و استفاده از روش پیشنهادی، شکل سطح آزاد و نرخ جریان نشتی از بستر کانال به دست آمد. حدس اولیه و شکل نهایی سطح آزاد به دست آمده برای این مسئله در شکل (۸) نشان داده شده است. علاوه بر این، شکل سطح آزاد ارائه شده در منبع [۴] نیز در این شکل نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود، نتایج حاصل از هر دو روش از تطابق خوبی برخوردار هستند. نرخ جریان نشتی از بستر کانال برای این مسئله با استفاده از معادله (۷) برابر $q = 6.75 \text{ m}^2/\text{s}$ به ازای طول واحد عمود بر دامنه مسئله برای یک نیم از مقطع کانال به دست آمد.

۵-۲- مثال دوم: کانال قرار گرفته روی یک سطح زهکش

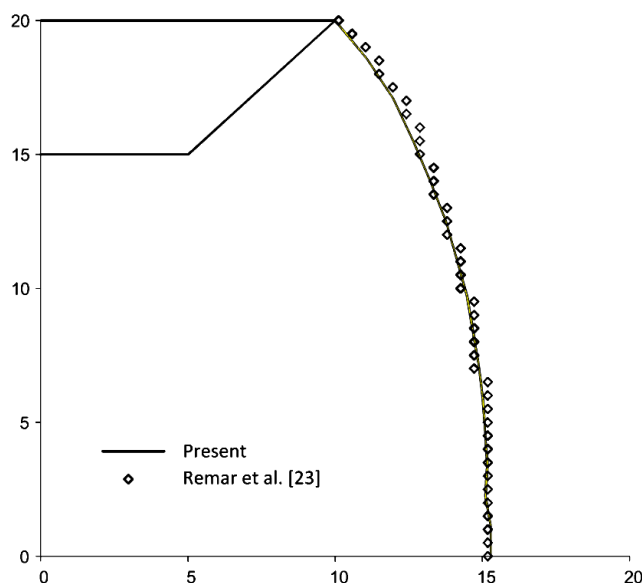
در دومین مثالی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است نیز به جریان در زیر بستر یک کانال متقارن با مقطع دوزنقه پرداخته شده است. ابعاد کانال و عمق زهکش در شکل (۹) نشان داده شده است. در این شکل، نحوه انتخاب نقاط پایه و بردارهای جهت برای پارامتری کردن مرز مجهول نیز



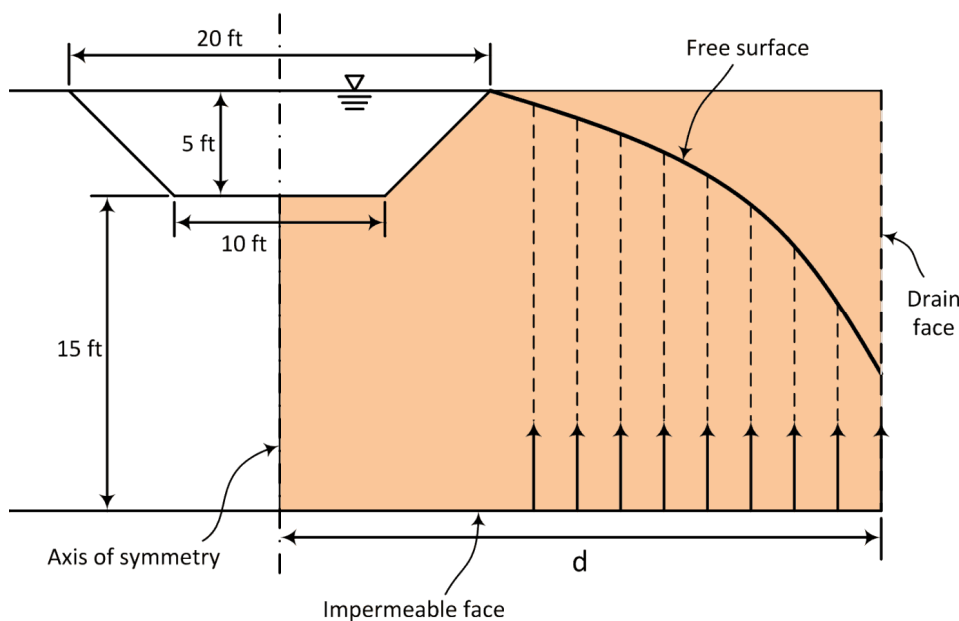
شکل ۹- ابعاد مقطع کانال در مثال دوم به همراه نحوه پارامتری کردن سطح آزاد آب و شبکه غیر منطبق بر مرز مورد استفاده



شکل ۱۰- انتخاب چند حدس اولیه متفاوت برای شکل سطح آزاد آب در مثال دوم



شکل ۱۱- شکل سطح آزاد به دست آمده برای مثال دوم و مقایسه آن با مرجع [۲۳]



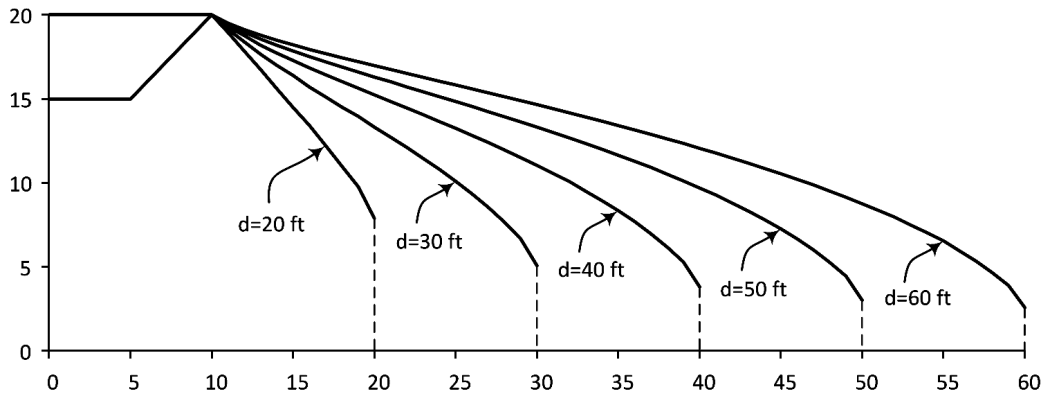
شکل ۱۲- ابعاد مقطع کانال در مثال سوم به همراه نحوه پارامتری کردن سطح آزاد آب

متقارن دوزنقه‌ای قرار گرفته روی یک سطح نفوذ ناپذیر که سطح زهکش در طرفین کانال قرار گرفته باشد مورد بررسی قرار گرفته است. ابعاد مقطع کانال و محل قرارگیری سطح زهکش در شکل (۱۲) نشان داده شده است. در این شکل، فاصله محور تقارن کانال و سطوح زهکش جانبی با d نشان داده شده و مسئله برای پنج حالت 20 ft ، 30 ft ، 40 ft ،

$q = 16.56\text{ ft}^2/\text{sec}$ به ازای طول واحد عمود بر دامنه مسئله و برای یک نیم از مقطع کانال به دست آمد.

۵-۳- مثال سوم: کانال قرار گرفته روی یک سطح نفوذ ناپذیر با زهکش جانبی

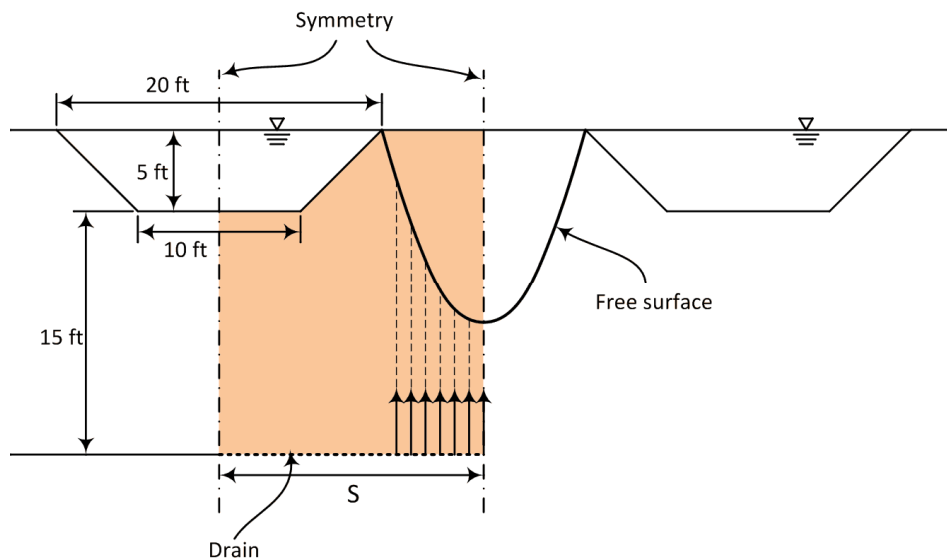
در سومین مثال، جریان سیال نشتی در زیر بستر یک کانال



شکل ۱۳- شکل سطح آزاد در مثال سوم برای حالت‌های متفاوت فاصله زهکش

جدول ۱- نرخ جریان نشتی در زیر بستر کانال در مثال سوم به ازای طول واحد عمود بر دامنه

فاصله زهکش (ft)	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰
نرخ جریان نشتی ft^2/sec	۳/۲۴	۳/۹۳	۴/۹۴	۶/۵۸	۹/۶۰

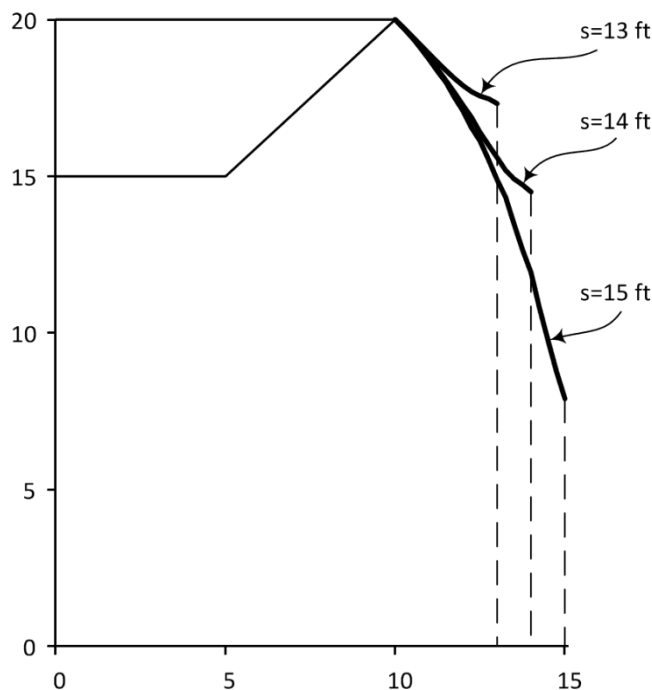


شکل ۱۴- ابعاد مقطع کانال در مثال چهارم به همراه نحوه پارامتری کردن سطح آزاد آب

۵-۴- مثال چهارم: ردیفی از کانالهای موازی قرار گرفته روی یک سطح زهکش

در آخرین مثال عددی، جریان نشتی زیر بستر ردیفی از کانالهای موازی که بر روی یک سطح زهکش قرار دارند مورد بررسی قرار گرفته است. ابعاد کانالها و عمق زهکش در شکل (۱۴) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل دیده می‌شود، مسئله دارای دو محور تقارن بوده و بنابراین ناحیه

۵۰ ft و ۶۰ ft حل شده است. همانند مثالهای قبلی، در اینجا نیز از تقارن موجود استفاده شده و تنها یک نیم از دامنه مسئله مدل‌سازی شده و نحوه انتخاب نقاط پایه و بردارهای جهت نیز در شکل (۱۲) نشان داده شده است. پس از حل مسئله، شکل سطح آزاد جریان برای هر یک از حالتها به دست آمده و در شکل (۱۳) رسم شده است. نرخ جریان عبوری نیز برای هر یک از حالتها در جدول (۱) ارائه شده است.



شکل ۱۵- شکل سطح آزاد در مثال چهارم برای حالت‌های متفاوت فاصله کانال‌های موازی

جدول ۲- نرخ جریان نشستی در زیر بستر کانال در مثال چهارم به ازای طول واحد عمود بر دامنه

۱۵	۱۴	۱۳	فاصله بین محور تقارن (ft)
۱۶/۸۵	۱۶/۴۱	۱۵/۶۵	نرخ جریان نشستی ft^2/sec

استفاده شد. به کارگیری شبکه‌های غیر منطبق بر مرز باعث شد که در هر مرحله تکرار که شکل هندسی مسئله تغییر می‌کند، به اصلاح شبکه نیازی نباشد. این ویژگی باعث شد که حل مسائل دارای ناحیه متغیر به سادگی صورت گیرد. علاوه بر آن، استفاده از تکنیک هموارسازی گرادیان موجب شد که انجام کلیه انتگرال‌گیری‌های دامنه‌ای برای محاسبه ماتریس‌های اجزا، به تعدادی انتگرال خطی روی وجوه سلول‌های هموار سازی تقلیل پیدا کند. بنابراین انتگرال‌گیری روی قسمت داخلی اجزای متقاطع با مرز که شکل هندسی آنها از الگوی مشخصی پیروی نمی‌کند، به سادگی انجام شد. تعیین شکل هندسی مرز مجهول از طریق پارامتری کردن مرز و تعریف تعدادی پارامتر مجهول و سپس جستجو در فضای پارامتری حاصل به نحوی که شرایط مرزی غیر خطی روی سطح آزاد آب ارضا شوند، انجام شد.

بین این دو محور تقارن مدل‌سازی شده است. در این شکل فاصله بین دو محور تقارن با s نشان داده شده و مسئله برای سه حالت مختلف $s=13 \text{ ft}$ ، $s=14 \text{ ft}$ و $s=15 \text{ ft}$ مورد بررسی قرار گرفته است. نحوه پارامتری کردن سطح آزاد جریان نیز در شکل (۱۴) نشان داده شده است. پس از حل مسئله، شکل سطح آزاد جریان برای هر سه حالت در شکل (۱۵) نشان داده شده است. نرخ جریان نشستی نیز در جدول (۲) برای هر حالت ارائه شده است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسائل نشست سیال دارای سطح آزاد در زیر بستر کانال‌های باز مورد بررسی قرار گرفت و از یک روش جدید براساس شبکه‌های غیر منطبق بر مرز برای حل مسئله

مؤثری در حل مسائل نشت نامحدود در زیر بستر کانالهای باز استفاده کرد.

برای بررسی کارایی روش پیشنهادی چند مثال عددی حل شد و نتایج با جوابهای موجود در منابع مقایسه شد. در این تحقیق نشان داده شد که می توان از شبکه های غیر منطبق برمرز به طور

واژه نامه

1. piecewise constant

مراجع

1. Middlebrooks, T.A., "Earth Dam Practice in the United States," *Transaction of the American Society of Civil Engineers, Geotechnical*, Vol. 118, pp. 697-722, 1953.
2. Swamee, P.K., Mishra, G.C., and Chahar, B.R., "Optimal Design of Transmission Canal," *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, Vol. 128, No. 4, pp. 234-243, 2002.
3. Swamee, P.K., and Kashyap, D., "Design of Minimum Seepage-Loss Nonpolygonal Canal Sections with Drainage Layer at shallow depth," *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, Vol. 130, No. 2, pp. 166-170, 2004.
4. Chahar, B.R., "Analysis of Seepage From Polygon Channels," *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, Vol. 133, No. 4, pp. 451-460, 2007.
5. Chen, J.T., Hsiao, C.C., Chiu, Y.P., and Lee, Y.T., "Study of Free-Surface Seepage Problems Using Hypersingular Equations," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 755-769, 2007.
6. Huang, T.K., "Stability Analysis of an Earth Dam Under Steady State Seepage," *Computers and Structures*, Vol. 58, No. 6, pp. 1075-1082, 1996.
7. Darbandi, M., Torabi, S.O., Saadat, M., Daghighi, Y., and Jarrahbashi, D., "A Moving-Mesh Finite-Volume Method to Solve Free-Surface Seepage Problem in Arbitrary Geometries," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 31, pp. 1609-1629, 2007.
8. Zienkiewicz, O.C., Mayer, P., and Cheung, Y.K., "Solution of Anisotropic Seepage by Finite Elements," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 92, No. 1, pp. 111-120, 1966.
9. Gioda, G, and Gentile, C., "A Nonlinear Programming Analysis of Unconfined Steady-State Seepage," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 11, pp. 283-305, 1987.
10. Liu, G.R., *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, CRC Press, New York, 2003.
11. Guangxin, L., Jinhong, G., and Yuxin, J., "Free Surface Seepage Analysis Based on the Element-Free Method," *Mechanics Research Communications*, Vol. 30, pp. 9-19, 2003.
۱۲. دانشمند، ف.، و کاظم زاده پارسی، م.ج.، "شبیه سازی عددی مسائل جریان پتانسیل با سطح آزاد به روش گالرکین بدون اجزای با استفاده از شبکه گرهی و انتگرال گیری ثابت،" *مجله علمی پژوهشی فنی و مهندسی مدرس*، دانشگاه تربیت مدرس، شماره ۲۸، صفحات ۲۹ - ۴۵، ۱۳۸۶.
13. Garcia, M.J., and Gonzalez, C.A., "Shape Optimization of Continuum Structures Via Evolution Strategies and Fixed Grid Finite Element Analysis," *Journal of structural and multidisciplinary optimization*, Vol. 26, pp. 92-98, 2004.
14. Daneshmand, F., and Kazemzadeh-Parsi, M.J., "Static and Dynamic Analysis of 2D and 3D Elastic Solids Using the Modified FGFEM," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 45, pp. 755-765, 2009.
15. Liu, G.R., Dai, K.Y., and Nguyen, T.T., "A Smoothed Finite Element for Mechanics Problems," *Computational Mechanics*, Vol. 39, pp. 859-877, 2007.
16. Kazemzadeh-Parsi, M.J., and Daneshmand, F., "Solution of Geometric Inverse Heat Conduction Problems by Smoothed Fixed Grid Finite Element Method," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, pp. 599-611, 2009.
17. Kazemzadeh-Parsi, M.J., and Daneshmand, F., "Cavity Shape Identification with Convective Boundary Conditions Using Non-Boundary-Fitted Meshes," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 57, pp. 283-305, 2010.
18. Kazemzadeh-Parsi, M.J., and Daneshmand, F., "Inverse Geometry Heat Conduction Analysis of Functionally Graded Materials Using Smoothed Fixed Grid Finite Element Method," Accepted for publication in *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2012.

۱۹. کاظم زاده پارسی، م.ج.، و دانشمند، ف.، "روش اجزای محدود شبکه ثابت هموار شده در حل مسائل نشت نامحدود در سدهای خاکی"، مجموعه مقالات هشتمین کنفرانس هیدرولیک ایران، دانشگاه تهران، ۲۴ تا ۲۶ آذرماه ۱۳۸۸.
20. Kazemzadeh-Parsi, M.J., and Daneshmand, F., "Unconfined Seepage Analysis in Earth Dams Using Smoothed Fixed Grid Finite Element Method," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 36, pp. 780-797, 2012.
21. Kazemzadeh-Parsi, M.J., and Daneshmand, F., "Three Dimensional Smoothed Fixed Grid Finite Element Method for the Solution of Unconfined Seepage Problems," *Finite Elements in Analysis and Design*, Submitted, 2012.
22. Reddy, J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1993.
23. Remar, J., Bruch, J.C., and Sloss, J.M., "Numerical Solutions to Some Free Surface Flows Through Nonhomogeneous Media," *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 20, pp. 143-167, 1984.