

سنجش کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از مرزهای کارا و ناکارا

حسین عزیزی*

کارشناس ارشد ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد پارس‌آباد مغان، اردبیل، ایران

پذیرش: ۹۰/۱۱/۲۶

دریافت: ۸۹/۱۱/۹

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک رویکرد داده‌ای برای ارزیابی عملکرد مجموعه‌ای از موجودیت‌های متجانس به نام واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها) است که عملکرد آن‌ها براساس اندازه‌های متعدد مشخص می‌شود. DEA سنتی که مبتنی بر مفهوم مرز کارایی است، بهترین نمره کارایی را تعیین می‌کند که می‌توان به هریک از DMUها اختصاص داد. DMUها براساس این نمرات به‌عنوان کارای DEA (کارای خوشبینانه) یا غیرکارای DEA (غیرکارای خوشبینانه) تقسیم‌بندی می‌شوند و DMUهای کارای DEA، مرز کارایی را مشخص می‌کنند. رویکرد مشابهی وجود دارد که از مفهوم مرز ناکارایی برای تعیین بدترین نمره‌ی کارایی نسبی که می‌توان به هر DMU اختصاص داد، استفاده می‌کند. DMUهای واقع روی مرز ناکارایی به‌عنوان ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه تعیین می‌شوند و آن‌هایی که روی مرز ناکارا نیستند، به‌عنوان غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه اعلام می‌شوند.

در مقاله حاضر این بحث مطرح می‌شود که هر دو کارایی نسبی را باید با هم در نظر گرفت و هر رویکردی که فقط یکی از آن‌ها را در نظر گرفته باشد، دچار سوگیری خواهد بود. برای اندازه‌گیری عملکرد کلی DMUها، پیشنهاد می‌شود که هر دو کارایی در قالب یک بازه ادغام شود که در این صورت مدل‌های DEA پیشنهادی برای اندازه‌گیری کارایی را مدل‌های DEA کراندار می‌نامیم. به این ترتیب بازه کارایی تمام مقادیر ممکن کارایی را که منعکس‌کننده دیدگاه‌های مختلف هستند، در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد. یک مثال عددی در مورد شرکت‌های گاز ایران با استفاده از مدل‌های DEA پیشنهادی بررسی می‌شود تا سادگی و سودمندی آن را نشان دهند.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، عملکرد کلی، کارایی بازه‌ای، مدل‌های DEA کراندار، رتبه‌بندی بازه‌ای.

۱- مقدمه

با توجه به این که سازمان‌ها همواره تلاش می‌کنند بهره‌وری خود را بهبود بخشند، از این رو اندازه‌گیری کارایی موضوعی است که به شدت مورد توجه قرار دارد. دلایل این توجه پناه و پنج سال پیش به بهترین وجهی به وسیله فارل^۱ در مقاله کلاسیکش درباره اندازه‌گیری کارایی تولیدی بیان شده است [۱، صص ۲۵۳-۲۸۱].

«مسئله اندازه‌گیری کارایی تولیدی یک صنعت هم برای نظریه‌پردازان اقتصادی و هم برای سیاست‌گذاران اقتصادی حایز اهمیت است. اگر بخواهیم بحث‌های نظری مربوط به کارایی نسبی سیستم‌های اقتصادی مختلف را در معرض آزمایش تجربی قرار دهیم، ضروری است که بتوانیم کارایی را به طور عملی اندازه‌گیری کنیم. به همین ترتیب اگر قرار باشد برنامه‌ریزی اقتصادی بر صنعت خاصی اعمال شود، باید معلوم شود که صنعت مورد نظر تا چه حد می‌تواند با تکیه بر افزایش کارایی خود بدون افزایش دادن منابع مصرفی، خروجی خود را افزایش دهد.»

بیست سال بعد از کار اولیه فارل [۱، صص ۲۵۳-۲۸۱] و براساس عقاید او، چارنز^۲ و د. [۲، صص ۴۲۹-۴۴۴] در پاسخ به نیاز برای روش‌های رضایت‌بخش جهت سنجش کارایی واحدهای تولیدی با ورودی‌های متعدد و خروجی‌های متعدد، روش قدرتمندی را معرفی کردند که بعدها تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)^۳ نامیده شد. ایده اصلی در DEA، ارائه روشی بود که در داخل مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیری (DMUها)^۴ قابل مقایسه بتوان آن‌هایی را که بهترین عملکرد را دارند و یک مرز کارایی را تشکیل می‌دهند، شناسایی کرد.

DEA ابداع شده به وسیله چارنز و د. [۲، صص ۴۲۹-۴۴۴]، عملکرد DMUها را از دیدگاه خوشبینانه اندازه‌گیری می‌کند. کارایی اندازه‌گیری شده در این رویکرد، بهترین کارایی نسبی یا کارایی خوشبینانه نامیده می‌شود و مقدار آن در ماهیت خروجی محدود به مقادیر بزرگ‌تر یا مساوی یک است. اگر بهترین کارایی نسبی یک DMU برابر با یک باشد، گفته می‌شود که کارایی DEA یا کارایی خوشبینانه است؛ در غیر این صورت غیرکارایی^۵ DEA یا غیرکارایی خوشبینانه گفته می‌شود. معمولاً تصور بر این است که DMUهای کارایی خوشبینانه عملکرد بهتری نسبت به DMUهای غیرکارایی خوشبینانه دارند.

از طرف دیگر، عملکرد DMUها را از دیدگاه بدبینانه نیز می‌توان اندازه‌گیری کرد. کارایی‌های اندازه‌گیری شده از دیدگاه بدبینانه را می‌توان با عنوان بدترین کارایی نسبی یا کارایی بدبینانه نامگذاری کرد که مقادیر آن در ماهیت خروجی شامل مقادیر کمتر یا مساوی یک است. در صورتی که مقدار بدترین کارایی نسبی یک DMU یک باشد، گفته می‌شود که آن DMU ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت گفته می‌شود که غیرناکارای^۶ DEA یا غیرناکارای بدبینانه است. معمولاً تصور بر این است که DMUهای ناکارای بدبینانه عملکرد بدتری نسبت به DMUهای غیرناکارای بدبینانه دارند.

انتانی^۷ و د. عملکرد DMUها را از هر دو دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه بررسی کردند [۳، صص ۳۲-۴۵]. بر این اساس مدل‌های DEA آنها در محاسبه کارایی‌های بازه‌ای DMUها عیب مهمی دارد؛ یعنی برای محاسبه‌ی کارایی خوشبینانه هر DMU، صرف نظر از این‌که چند ورودی و خروجی داشته باشد، فقط از یک ورودی و یک خروجی استفاده می‌شود. به‌علاوه مدل‌های DEA آنها نمی‌توانند DMUهایی را که کارای DEA هستند، به صورت مؤکفی شناسایی کنند. به‌تازگی عزیزی و فتحی اجیرلو نارسایی‌های مدل‌های DEA بازه‌ای انتانی و د. را در ماهیت ورودی بهبود بخشیده‌اند [۳، صص ۳۲-۴۵؛ ۴، صص ۴۱۱-۴۱۸].

وانگ^۸ و لوئو^۹ [۵، صص ۹۰۲-۹۱۵] کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه DMUها را با معرفی کردن دو DMU مجازی اندازه‌گیری می‌کنند: DMU ایده‌آل و DMU آنتی‌ایده‌آل با ادغام این دو کارایی، یک شاخص نزدیکی نسبی به دست می‌آورند که به‌عنوان مبنایی برای رتبه‌بندی DMUها به کار می‌رود. ولی در بیشتر موارد، مدل‌های DEA آنها برای تمام DMUها از وزن‌های ثابتی استفاده می‌کنند.

امیرتیموری [۶، صص ۱۰-۱۶] با استفاده از دو شاخص ایده‌آل و آنتی‌ایده‌آل که براساس مرزهای کارا و ناکارا تشکیل می‌شود، یک اندازه کارایی معرفی کرد. فلسفه این دو شاخص ماکسیم کردن فاصله L_1 وزنی یک DMU خاص نسبت به مرزهای کارا و ناکارا است.

وانگ و د. یک اندازه کارایی متوسط هندسی را برای ارزیابی عملکرد کلی هر DMU پیشنهاد کردند. [۷، صص ۹۲۹-۹۳۷] کارایی متوسط هندسی هر دو اندازه کارایی خوشبینانه و کارایی بدبینانه هر DMU را با هم ادغام می‌کند، بنابراین نسبت به هر کدام از این دو اندازه جامع‌تر است. وانگ و لان^{۱۰}؛ چین^{۱۱} و د. این رویکرد را به‌تازگی بسط داده‌اند [۸، صص ۲۷۶۰-۲۷۷۱؛ ۹، صص ۲۴۶-۲۵۶].



وانگ و چین یک اندازه عملکرد کلی جدید را برای نمره‌دهی DMUها پیشنهاد کردند [۱۰، صص ۶۶۶۳-۶۶۷۹]. رویکرد DEA پیشنهادی آن‌ها کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه DMUها را هم‌زمان در نظر می‌گیرد. اندازه عملکرد کلی تعریف شده به وسیله آن‌ها نه فقط بزرگی دو کارایی مختلف را در نظر می‌گیرد، بلکه راستای آن‌ها را نیز در نظر می‌گیرد. بنابراین تصور می‌شود که نسبت به اندازه کارایی متوسط هندسی وانگ و د. جامع‌تر است [۷، صص ۹۲۹-۹۳۷].

در این مقاله پیشنهاد می‌شود که دو کارایی خوشبینانه و بدبینانه به صورت یک بازه با هم ادغام شوند، تا این‌که بتوان کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه را از یک زوج مدل DEA یکپارچه به دست آورد که در این‌جا کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه هر کدام با وزن‌های متغیری اندازه‌گیری می‌شوند. کارایی بازه‌ای را می‌توان به عنوان یک اندازه عملکرد کلی هر DMU تلقی کرد. مهم‌تر این‌که در سنجش کارایی بازه‌ای با استفاده از مدل‌های DEA پیشنهادی ما، کارایی خوشبینانه هر DMU نسبت به همه DMUهای دیگر اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از تمام اطلاعات ورودی و خروجی محاسبه می‌شود، نه فقط یک ورودی و یک خروجی.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲ به طور خلاصه مدل‌های اساسی DEA برای اندازه‌گیری بهترین و بدترین کارایی‌های نسبی DMUها معرفی می‌شود. در بخش ۳ نیز در آغاز مدل‌های DEA کراندار ارائه شده سپس نشان داده می‌شود که مدل‌های DEA کراندار می‌توانند اطلاعات ترجیح ارزیاب را بر وزن‌های ورودی و خروجی دخیل دهند. بخش ۴ به طور خلاصه شاخص \mathcal{A} را معرفی می‌کند که کارایی‌های بازه‌ای DMUها را مقایسه و رتبه‌بندی می‌کند. در بخش ۵، یک مثال عددی برای مدل‌های DEA کراندار ارائه شده است تا کاربردهای بالقوه آن برای اندازه‌گیری عملکرد مشخص شود. نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۶ ارائه می‌شود.

۲- مدل‌های DEA برای اندازه‌گیری بهترین و بدترین کارایی‌های نسبی

۲-۱- مدل DEA برای اندازه‌گیری بهترین کارایی‌های نسبی DMUها

فرض کنید n تعداد DMU برای ارزیابی وجود دارد که هر DMU نیز با m ورودی و s خروجی تشکیل شده است. x_{ij} ($i = 1, \dots, m$) و y_{rj} ($r = 1, \dots, s$) را مقدار ورودی و خروجی DMU_j ($j = 1, K, n$) تعریف می‌کنیم که همه آن‌ها معلوم و مثبت می‌باشند و براساس مفهوم کارایی، کارایی DMU_j ($j = 1, K, n$) چنین تعریف می‌شود.

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

که در این جا v_i ($i = 1, \dots, m$) و u_r ($r = 1, \dots, s$) به ترتیب وزن‌های ورودی و خروجی اختصاص داده شده به m ورودی و s خروجی هستند. چارنژ و د. برای تعیین وزن‌های ورودی و خروجی مدل CCR مشهور زیر را ابداع کردند که نام آن از مخفف اسامی آن‌ها گرفته شده است [۲، صص ۴۲۹-۴۴۴]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \theta_j = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2)$$

در مدل (۲) زیرنویس θ نشان‌دهنده DMU تحت ارزیابی است و v_i و u_r متغیرهای تصمیم‌گیری و ε بسیار کوچک غیرارشمیدسی است. با استفاده از تبدیل چارنژ و کوپر^{۱۲}، مدل برنامه‌ریزی کسری (۲) را می‌توان برای حل تبدیل به مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر این‌گونه اندازه‌گیری کرد [۱۱، صص ۱۸۱-۱۸۶]:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

اگر یک مجموعه از وزن‌های مثبت در مدل (۳) وجود داشته باشد که باعث شود $\theta_o^* = 1$ ، در آن صورت DMU_o کارای DEA یا کارای خوشبینانه خواهد بود. در غیر این صورت می‌توان آن را غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه نامید تا ناکارای DEA برای این‌که غیرکارای DEA به‌طور لزوم به‌معنای ناکارای DEA نیست.



۲-۲- مدل DEA برای اندازه‌گیری بدترین کارایی‌های نسبی DMUها

کارایی یک اندازه نسبی است و آن را در محدوده‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. مدل CCR کارایی خوشبینانه هر DMU را با مینیمم‌سازی در محدوده بزرگ‌تر یا مساوی یک اندازه‌گیری می‌کند. در صورتی که کارایی یک DMU با ماکسیمم‌سازی در محدوده کم‌تر یا مساوی یک محاسبه شود، به آن اصطلاحاً کارایی بدبینانه و یا بدترین کارایی نسبی می‌گویند. کارایی بدبینانه DMU_o را می‌توان با مدل DEA بدبینانه زیر اندازه‌گیری کرد [۴]:

$$\begin{aligned} \max \quad \varphi_o &= \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad \varphi_j &= \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m,$$

مدل (۴) با تغییری مجدد می‌تواند به مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned} \max \quad \varphi_o &= \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} &= 1, \\ u_r, v_i &\geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5)$$

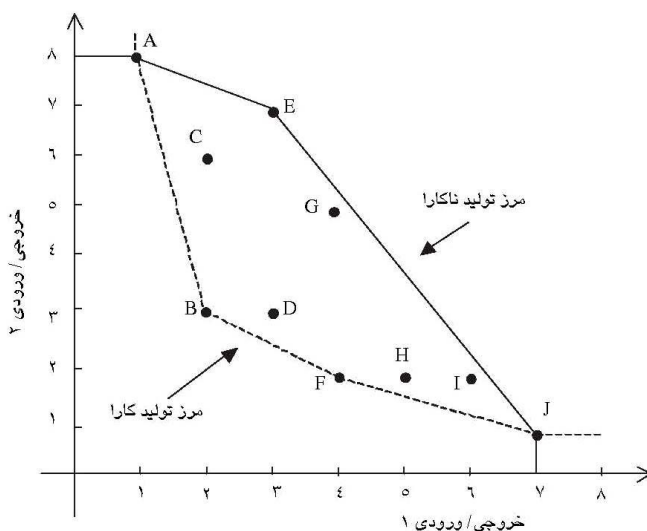
در صورتی مجموعه‌ای از وزن‌های مثبت وجود داشته باشد که سبب شود $\varphi_o^* = 1$ باشد، آن‌گاه گفته می‌شود که DMU_o ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه است؛ در غیر این صورت گفته می‌شود که غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه است. واضح است که غیرناکارای بدبینانه لزوماً به معنای کارای خوشبینانه نیست. تمام واحدهای ناکارای بدبینانه یک مرز ناکارایی را تعیین می‌کنند. برخلاف مدل‌های CCR (۲) و (۳) که می‌توان به آن‌ها مدل‌های DEA خوشبینانه گفت - مدل‌های DEA بدبینانه (۴) و (۵) در جستجوی مجموعه‌ای از نامطلوب‌ترین وزن‌ها برای هر DMU هستند.

برای نشان دادن تفاوت بین مرز کارا (مرز بهترین عملکرد) و مرز ناکارا (مرز بدترین عملکرد) از مثالی با داده‌های دو ورودی و یک خروجی که در جدول ۱ نشان داده شده است، استفاده می‌شود.

همه خروجی‌ها برای سادگی به ۱ نرمال‌سازی شده‌اند. مرزهای کارایی و ناکارایی این مثال در شکل ۱ نشان داده شده‌اند، به طوری که این شکل نشان می‌دهد، ۳ تا از DMUها روی مرز ناکارا (خط ممتد) هستند که ما آن‌ها را ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه می‌نامیم و دیگر DMUها را نسبت به مرز ناکارایی، غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه می‌نامیم. همچنین ۴ تا از DMUها روی مرز کارا (خط مقطع) واقع شده‌اند که ما آن‌ها را کارای DEA یا کارای خوشبینانه می‌نامیم و دیگر DMUها را نسبت به مرز کارایی، غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه می‌نامیم که در این جا واحدهای کارای DEA و ناکارای DEA هم‌پوشانی، یعنی واحدهای مشترک نیز دارند.

جدول ۱ داده‌ها برای ده DMU با دو ورودی و یک خروجی

J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	DMU
۷	۶	۵	۴	۴	۳	۳	۲	۲	۱	ورودی ۱
۱	۲	۲	۵	۲	۷	۳	۶	۳	۸	ورودی ۲
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	خروجی



شکل ۱ مرزهای تولید کارا و ناکارا برای ده DMU



۳- مدل‌های DEA کراندار برای اندازه‌گیری کارایی‌های بازه‌ای DMUها

از نظر تئوری، کارایی‌های خوشبینانه و بدبینانه باید یک بازه را تشکیل دهند. برای این منظور، کارایی‌های خوشبینانه مدل‌های (۲) یا (۳) را باید تعدیل کرد. فرض کنید α ($0 < \alpha \leq 1$) ضریب تعدیل باشد. در این صورت کارایی‌های خوشبینانه تعدیل شده را می‌توان به صورت $\tilde{\theta}_j^* = \alpha \theta_j^*$ ($j = 1, \dots, n$) نوشت که باید شرط $\tilde{\theta}_j^* = \alpha \theta_j^* \leq \varphi_j^*$ ($j = 1, \dots, n$) را تأمین کنند؛ یعنی $\alpha \leq \min_{j=1, K, n} \{ \varphi_j^* / \theta_j^* \}$ بر این اساس بازه کارایی مربوط به DMU_j ($j = 1, \dots, n$) را می‌توان به صورت $[\alpha \theta_j^*, \varphi_j^*]$ بیان کرد. اکنون پارامتر α را طوری تعیین می‌کنیم که برای تمام بازه‌های $[\alpha \theta_j^*, \varphi_j^*]$ ($j = 1, \dots, n$)، شرط $\alpha \theta_j^* \leq \varphi_j^*$ برقرار باشد:

$$\min_{j=1, \dots, n} \{ \varphi_j^* / \theta_j^* \} \geq \frac{\min_{j=1, K, n} \{ \varphi_j^* \}}{\max_{j=1, K, n} \{ \theta_j^* \}} = \frac{\varphi_{\min}^*}{\theta_{\max}^*},$$

که در این جا $\theta_{\max}^* = \max_{j=1, K, n} \{ \theta_j^* \}$ و $\varphi_{\min}^* = \min_{j=1, K, n} \{ \varphi_j^* \}$

کافی است $\alpha = \varphi_{\min}^* / \theta_{\max}^*$ را قرار داد تا مشکل تعیین α حل شود. بنابراین کارایی‌های DMUها را می‌توان در محدوده‌ی بازه $[\alpha, 1]$ به دست آورد [۱۳].
 دو مدل برنامه‌ریزی کسری زیر منعکس‌کننده این ایده است:

$$\begin{aligned} \max/\min \quad \phi_o &= \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad \alpha &\leq \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.$$

مدل‌های بالا می‌توانند به دو مدل برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل شوند:

$$\begin{aligned}
 \max/\min \quad & \phi_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r (\alpha y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned}
 \tag{V}$$

هر کدام از مدل‌های (۶) و (۷) مدل‌های DEA کراندار نامیده می‌شوند. فرض کنید که ϕ_o^{U*} و ϕ_o^{L*} به ترتیب مقدار ماکسیمم و مینیمم تابع هدف مدل‌های (۷) باشند. در این صورت، آن‌ها با همدیگر تشکیل یک بازه کارایی را می‌دهند که با نماد $[\phi_o^{L*}, \phi_o^{U*}]$ مشخص می‌شود و محدوده کارایی DMU_o است. از طریق تکرار این راهکار می‌توان بدترین و بهترین کارایی‌های نسبی تمام DMU ها و بازه کارایی آن‌ها را، یعنی $[\phi_j^{L*}, \phi_j^{U*}]$ ($j = 1, \dots, n$) را پیدا کرد.

در رابطه با بازه کارایی $[\phi_o^{L*}, \phi_o^{U*}]$ تعاریف زیر وجود دارد:

تعریف ۱: DMU_o را ناکارای DEA یا ناکارای بدبینانه گوئیم، اگر و تنها اگر $\phi_o^{U*} = 1$ ، در غیر این صورت آن را غیرناکارای DEA یا غیرناکارای بدبینانه گوئیم.

تعریف ۲: DMU_o را کارای DEA یا کارای خوشبینانه گوئیم، اگر و تنها اگر $\phi_o^{L*} = \alpha$ ، در غیر این صورت آن را غیرکارای DEA یا غیرکارای خوشبینانه گوئیم.

تعریف ۳: DMU_o را نامعین DEA گوئیم، اگر و تنها اگر نه کارای DEA و نه ناکارای DEA باشد.

تعریف ۴: DMU_o را یک واحد ویژه DEA گوئیم، اگر و تنها اگر هم کارای DEA و هم ناکارای DEA باشد.

تمام DMU های کارای DEA یک مرز تولید کارا را مشخص می‌کنند. در حالی که تمام DMU های ناکارای DEA با همدیگر تعریفی از یک مرز تولید ناکارا دارند که به مرز ناکارایی نیز معروف است. اما در مورد آن دسته از واحدهای نامعین DEA می‌توان گفت که همیشه به وسیله دو مرز کارا و ناکارا احاطه شده‌اند. لازم به ذکر است که بعضی از DMU ها احتمالاً هم کارای DEA و هم ناکارای DEA باشند. چنین DMU هایی از بازه کارایی وسیع $[\alpha, 1]$ برخوردار هستند (شکل ۱).



۳-۱- مدل‌های DEA کراندار با اطلاعات ترجیح درباره وزن‌ها

به منظور محدود کردن وزن‌های ضریب u_r ($r=1, \dots, s$) و/یا v_i ($i=1, \dots, m$)، از رویکرد ناحیه اطمینان یا روش نسبت مخروطی استفاده می‌شود. جزئیات آن را می‌توان در منبع شماره ۱۴ مشاهده کرد [۱۴]. وانگ و د. چگونگی قرار دادن اطلاعات ترجیح ارزیابی‌کننده درباره وزن‌های ورودی و خروجی در مدل‌های DEA کراندار را مورد بحث قرار داده‌اند [۱۵، صص ۲۶۷-۲۵۳].

از آنجایی که u_r ($r=1, \dots, s$) و v_i ($i=1, \dots, m$) وزن‌های ضریب با بُدهای متفاوتند، در این صورت معمولاً غیرقابل مقایسه هستند. می‌توان برای حذف بُعد هر ضریب ورودی و خروجی از تبدیل مقیاس استفاده کرد تا اطلاعات ترجیح ارزیابی‌کننده در نظر گرفته شود. فرض کنید

$$\tilde{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{\max_j \{y_{rj}\}} = \frac{y_{rj}}{y_r^{\max}}, \quad r=1, \dots, s; \quad j=1, \dots, n \quad (8)$$

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max_j \{x_{ij}\}} = \frac{x_{ij}}{x_i^{\max}}, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n \quad (9)$$

از آنجایی که مدل DEA خاصیت تغییرناپذیری نسبت به واحد دارد، از این روش استفاده از تبدیل مقیاس برای داده‌های ورودی و خروجی، کارایی DMUها را تغییر نمی‌دهد، بنابراین

$$\phi_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} = \frac{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i \tilde{x}_{io}}{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r \tilde{y}_{ro}} \quad (10)$$

که در این جا u_r ($r=1, \dots, s$) و v_i ($i=1, \dots, m$) وزن‌های ضریب متناظر با داده‌های مقیاس ورودی و خروجی هستند. این‌ها بُعد ندارند و قابل مقایسه هستند. می‌توان از آن‌ها برای بیان ترجیح ارزیابی‌کننده استفاده کرد. ارزیابی‌کننده ممکن است ترجیحات زیر را ارائه کند: $\gamma \leq \tilde{v}_{i5} / \tilde{v}_{i6} \leq \delta$, $\alpha \leq \tilde{u}_{r5} / \tilde{u}_{r6} \leq \beta$, $\tilde{v}_{i\tau} = \tilde{v}_{i\tau}$, $\tilde{u}_{r\tau} = \tilde{u}_{r\tau}$, $\tilde{v}_{i_1} \geq \tilde{v}_{i_2}$, $\tilde{u}_{r_1} \geq \tilde{u}_{r_2}$ و غیره. با جایگزینی (۸) و (۹) در (۱۰)، معادله زیر را می‌توان به دست آورد:

$$\phi_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} = \frac{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i \tilde{x}_{io}}{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r \tilde{y}_{ro}} = \frac{\sum_{i=1}^m (\tilde{v}_i / x_i^{\max}) x_{io}}{\sum_{r=1}^s (\tilde{u}_r / y_r^{\max}) y_{ro}} \quad (11)$$

از این جا می‌دانیم که

$$\tilde{u}_r = u_r y_r^{\max}, \quad r=1, \dots, s \quad (12)$$

$$\tilde{v}_i = v_i x_i^{max}, \quad i = 1, \dots, m \quad (۱۳)$$

نشان می‌دهد که از ضرایب وزنی u_r ($r = 1, \dots, s$) و v_i ($i = 1, \dots, m$) ضرب در بیشینه‌های داده‌های خروجی و ورودی می‌توان برای بیان ترجیح ارزیابی‌کننده استفاده کرد. بنابراین اطلاعات ترجیح ارزیابی‌کننده را که در بالا ذکر شده است، می‌توان به‌طور هم‌ارز به صورت $u_{r\gamma} y_{r\gamma}^{max} = u_{r\phi} y_{r\phi}^{max}$ ، $v_{i\lambda} x_{i\lambda}^{max} \geq v_{i\tau} x_{i\tau}^{max}$ ، $u_{r\lambda} y_{r\lambda}^{max} \geq u_{r\tau} y_{r\tau}^{max}$ ، $\alpha \leq u_{r\delta} y_{r\delta}^{max} / u_{r\phi} y_{r\phi}^{max} \leq \beta$ ، $v_{i\tau} x_{i\tau}^{max} \geq v_{i\phi} x_{i\phi}^{max}$ بیان کرد. این‌گونه اطلاعات در مورد وزن‌های ضریب را به آسانی می‌توان در مدل‌های DEA کراندار الحاق کرد.

فرض کنید

$$\mathcal{U} = \left\{ u = (u_r) \left| \begin{array}{l} u_{r\lambda} y_{r\lambda}^{max} \geq u_{r\tau} y_{r\tau}^{max}, u_{r\tau} y_{r\tau}^{max} = u_{r\phi} y_{r\phi}^{max}, \\ \alpha \leq u_{r\delta} y_{r\delta}^{max} / u_{r\phi} y_{r\phi}^{max} \leq \beta \end{array} \right. \right\} \quad (۱۴)$$

$$\mathcal{V} = \left\{ v = (v_i) \left| \begin{array}{l} v_{i\lambda} x_{i\lambda}^{max} \geq v_{i\tau} x_{i\tau}^{max}, v_{i\tau} x_{i\tau}^{max} \geq v_{i\phi} x_{i\phi}^{max}, \\ \gamma \leq v_{i\delta} x_{i\delta}^{max} / v_{i\phi} x_{i\phi}^{max} \leq \delta \end{array} \right. \right\} \quad (۱۵)$$

مدل‌های DEA کراندار (\mathcal{V}) با اطلاعات ترجیح درباره وزن‌ها را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \max/\min \quad & \phi_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r (\alpha y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1, \\ & (u_r) \in \mathcal{U}, \\ & (v_i) \in \mathcal{V}, \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (۱۶)$$

۴- شاخص \mathcal{A} برای مقایسه و رتبه‌بندی بازه کارایی DMUها

در سنجش کارایی بازه‌ای، از آن جایی که نمره کارایی نهایی هر DMU با یک بازه مشخص می‌شود، لذا یک رویکرد رتبه‌بندی ساده ولی عملی برای مقایسه و رتبه‌بندی کارایی‌های DMUها مورد نیاز است. برای رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای پیش از این چند رویکرد توسعه داده شده‌اند ولی همگی آن‌ها معایبی دارند، به‌خصوص وقتی که اعداد بازه‌ای مرکز یکسان ولی عرض‌های متفاوت دارند، همگی آن‌ها از افتراق دادن این اعداد عاجز هستند.

یک راه برای نشان دادن بازه $A = [a_L, a_R]$ ، به صورت $A = \langle m(A), w(A) \rangle$ است که در این جا $m(A)$ و $w(A)$ نقطه وسط و پهنای بازه A هستند؛ یعنی:

$$m(A) = \frac{1}{2}(a_L + a_R), \quad w(A) = \frac{1}{2}(a_R - a_L)$$

در این جا برخی از ویژگی‌های اساسی شاخص \mathcal{A} را بیان می‌کنیم و قوت بالاتر آن را نسبت به روش‌های دیگر نشان می‌دهیم [۱۶، صص ۲۸-۴۳].

۴-۱- شاخص مقبولیت: شاخص قضاوت مقدار

تعریف ۵: فرض کنید \otimes یک رابطه ترتیب بسط یافته بین بازه‌های $A = [a_L, a_R]$ و $B = [b_L, b_R]$ روی خط حقیقی \mathcal{R} باشد. آن‌گاه برای $m(A) \leq m(B)$ ، یک فرض $(A \otimes B)$ می‌سازیم که معنای ضمنی آن این است که از نظر مقدار، A پایین‌تر از B (یا B بالاتر از A) است. در این جا اصطلاح «پایین‌تر» (یا «بالاتر») مشابه «کوچک‌تر» («بزرگ‌تر») است.

تعریف ۶: فرض کنید I مجموعه همه بازه‌های بسته روی خط حقیقی \mathcal{R} باشد. در این جا یک تابع مقبولیت $(\cdot, \cdot) : I \times I \rightarrow [0, \infty)$ تعریف می‌شود، به طوری که $(A \otimes B)$ یا $(A, B)_{\otimes}$ و یا به طور خلاصه \mathcal{A}_{\otimes} از این فرمول به دست می‌آید:

$$\mathcal{A}_{\otimes} = \frac{m(B) - m(A)}{w(B) + w(A)}$$

\mathcal{A}_{\otimes} را می‌توان به عنوان «درجه مقبولیت این‌که بازه اول نسبت به بازه دوم پایین‌تر باشد» تفسیر کرد.

درجه مقبولیت $A \otimes B$ را می‌توان باز براساس موقعیت نسبی میانگین و پهنای بازه B نسبت به میانگین و پهنای بازه A به صورت زیر تقسیم‌بندی کرد:

$$\mathcal{A}(A \otimes B) \begin{cases} = 0 & \text{اگر } m(A) = m(B) \\ > 0, < 1 & \text{اگر } a_R > b_L \text{ و } m(A) < m(B) \\ \geq 1 & \text{اگر } a_R \leq b_L \text{ و } m(A) < m(B) \end{cases}$$

اگر $\mathcal{A}(A \otimes B) = 0$ ، آن‌گاه فرض « A پایین‌تر از B است» پذیرفته نمی‌شود. اگر $0 < \mathcal{A}(A \otimes B) < 1$ ، آن‌گاه مفسر فرض $A \otimes B$ را با درجات مختلف رضایت از صفر تا یک (بدون احتساب صفر و یک) می‌پذیرد. اگر $\mathcal{A}(A \otimes B) \geq 1$ ، آن‌گاه مفسر مطلقاً از فرض $A \otimes B$ راضی می‌شود؛ یعنی به عبارت دیگر می‌پذیرد که $A \otimes B$ صحیح است.

ویژگی ۱: اگر $\mathcal{A}(A \otimes B) > 0$ ، آن‌گاه برای یک مسئله بیشینه‌سازی (به‌طور مثال A و B دو بازه سود هستند و مسئله از ما می‌خواهد که سود بیشینه را انتخاب کنیم)، بازه B بر بازه A مرجح است و برای یک مسئله کمینه‌سازی (به‌طور مثال A و B دو بازه هزینه هستند)، A بر B از نظر مقدار ترجیح داده می‌شود.

ویژگی ۲: برای هر نوع قضاوت مقدار، شاخص \mathcal{A} همواره تصمیم‌گیرنده را راضی می‌کند: برای هر دو بازه A و B روی \mathfrak{R} داریم:

$$\text{یا } \mathcal{A}(A \otimes B) > 0$$

$$\text{یا } \mathcal{A}(B \otimes A) > 0$$

$$\text{و یا هم } \mathcal{A}(A \otimes B) = \mathcal{A}(B \otimes A) = 0$$

ویژگی ۳: این شاخص پیشنهادی تراگذر است: برای هر سه بازه A ، B و C روی \mathfrak{R}

داریم:

$$\text{اگر } \mathcal{A}(A \otimes B) \geq 0 \text{ و } \mathcal{A}(B \otimes C) \geq 0$$

$$\text{آن‌گاه } \mathcal{A}(A \otimes C) \geq 0$$

$$\text{ولی معنای آن، این نیست که } \mathcal{A}(A \otimes B), \mathcal{A}(B \otimes C) \geq \max\{\mathcal{A}(A \otimes B), \mathcal{A}(B \otimes C)\}$$

ویژگی ۴: اگر $\mathcal{A}(B_1 \otimes B_2) = 0$ و $w(B_1) = w(B_2)$ ، آن‌گاه $B_1 \equiv B_2$ ، یعنی B_1 با B_2

یکسان است.

حال اگر $\mathcal{A}(B_1 \otimes B_2) = 0$ و $w(B_1) \neq w(B_2)$ ، آن‌گاه بدیهی است که $B_1 \not\equiv B_2$. ولی از

راه شاخص \mathcal{A} ، یک مقایسه مستقیم بین آن‌ها تفسیر می‌کند که B_1 و B_2 از یکدیگر پایین‌تر نیستند. در این صورت این سؤال مطرح می‌شود: چه طور گزینه ترجیحی (بیشینه) را انتخاب کنیم؟



ویژگی ۵: یک بازه $D = \langle m(D), w(D) \rangle$ را در نظر می‌گیریم که پایین‌تر از بازه‌های هم‌مرکز B_1 و B_2 است. آن‌گاه در مقایسه با D ، درجه پذیرش برتری بازه‌ای که عدم اطمینان کم‌تری دارد، بالاتر از برتری بازه‌ای است که عدم اطمینان بالاتری دارد. به صورت نمادی، اگر

$$\mathcal{A}(D \otimes B_1) > 0$$

$$\mathcal{A}(D \otimes B_2) > 0$$

و داشته باشیم $\mathcal{A}(B_1 \otimes B_2) = 0$ ، ولی $B_1 \neq B_2$ ، آن‌گاه

$$w(B_1) < w(B_2) \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{A}(D \otimes B_1) > \mathcal{A}(D \otimes B_2) \quad (i)$$

$$w(B_1) > w(B_2) \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{A}(D \otimes B_1) < \mathcal{A}(D \otimes B_2) \quad (ii)$$

در این‌جا شرط (i) نشان می‌دهد که در مقایسه با D ، برتری B_1 باورپذیرتر از برتری B_2 است. از این رو B_1 به‌عنوان گزینه بیشینه‌ساز بر B_2 مرجح است. این نتیجه با دریافت شهودی خودمان کاملاً سازگار است: اگر بازه‌های B_1 و B_2 مقدار مورد انتظار یکسانی داشته باشند، ولی B_1 عدم اطمینان کم‌تری نسبت به B_2 داشته باشد، در آن صورت B_1 بر B_2 مرجح است.

حال اگر فرض کنیم که بازه مرجع $D^* = \langle m(D^*), w(D^*) \rangle$ برتر از بازه‌های هم‌مرکز

B_1 و B_2 باشد، چه تصادفی می‌افتد؛ یعنی اگر

$$\mathcal{A}(B_1 \otimes D^*) > 0$$

$$\mathcal{A}(B_2 \otimes D^*) > 0$$

و داشته باشیم $\mathcal{A}(B_1 \otimes B_2) = 0$ ، ولی $B_1 \neq B_2$ ، آن‌گاه

$$w(B_1) < w(B_2) \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{A}(B_1 \otimes D^*) > \mathcal{A}(B_2 \otimes D^*) \quad (i)$$

$$w(B_1) > w(B_2) \text{ اگر و تنها اگر } \mathcal{A}(B_1 \otimes D^*) < \mathcal{A}(B_2 \otimes D^*) \quad (ii)$$

در این‌جا، شرط (i) بیان می‌کند که در مقایسه با D^* ، پایین‌تر بودن B_1 باورپذیرتر از پایین‌تر بودن B_2 است. بنابراین B_1 باید به‌عنوان گزینه کمینه‌کننده بهتر بر B_2 ترجیح داده شود. برعکس از این شرط نمی‌توان استنباط کرد که B_2 گزینه بیشینه‌ساز ترجیحی نسبت به B_1 است.

می‌توان درباره کارکرد شاخص \mathcal{A} یک جمله کلی بیان کرد: موقعیت میانگین یک بازه نسبت به میانگین یک بازه مرجع دیگر بالاتر یا پایین‌تر بودن آن را مشخص می‌کند. در این صورت پهنای بازه‌های بالاتر (یا پایین‌تر) نسبت به بازه دیگر تعیین‌کننده میزان رضایت فرد تصمیم‌گیرنده از بالاتر یا پایین‌تر بودن آن بازه نسبت به بازه مرجع است.

۵- نمایش مدل‌های پیشنهادی: یک کاربرد در شرکت‌های گاز ایران

در این قسمت یک مثال عددی را با استفاده از کارایی‌های بازه‌ای مدل‌های DEA کراندار بررسی می‌کنیم تا مزایا و قدرت افتراق خوب آن را نشان دهیم. تمام مدل‌ها با استفاده از نرم‌افزار GAMS حل می‌شوند. برای این مثال عددی، مقدار بی‌نهایت کوچک غیرارشمیدسی $\epsilon=10^{-1}$ منظور شده است.

مثال ۱: برای تأکید بر کاربرد عملی این روش، آن را برای مجموعه داده‌های متشکل از ۱۱ شرکت گاز (DMU) در ۱۱ منطقه‌ی ایران اعمال می‌کنیم. داده‌های این تحلیل از عملیات سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۴ گرفته شده‌اند. ما از پنج متغیر از مجموعه داده‌ها به‌عنوان ورودی‌ها و خروجی‌ها استفاده می‌کنیم. ورودی‌ها شامل تعداد کارکنان^{۱۳} و بودجه^{۱۴} و خروجی‌ها شامل حجم لوله‌ها^{۱۵}، تعداد مشتریان جدید^{۱۶} و میزان انشعابات^{۱۷} است [۱۷، صص ۲۱-۲۸]. داده‌های ورودی و خروجی نرمال‌سازی شده دوره‌های شش ماهه که در این مثال استفاده شده‌اند، در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲ مجموعه داده‌های نرمال‌سازی شده یازده DMU

شرکت‌ها	ورودی‌ها		خروجی‌ها	
	بودجه	تعداد کارکنان	حجم لوله‌ها	تعداد مشتریان جدید
A	-/۸۹۷۳	۰/۹۶۹۸	۱/۰۰۰۰	-/۳۰۷۷
B	-/۳۸۸۴	۰/۹۹۴۳	-/۵۳۳۵	-/۴۹۷۸
C	-/۷۸۶۴	۱/۰۰۰۰	-/۲۵۵۵	-/۲۹۳۵
D	-/۶۸۷۹	۰/۷۹۲۶	-/۹۱۳۰	۱/۰۰۰۰
E	۱/۰۰۰۰	۰/۷۰۸۲	-/۹۳۸۵	-/۸۲۲۶
F	-/۹۶۶۲	۰/۶۰۰۸	-/۲۶۵۶	-/۳۴۷۳
G	-/۸۲۶۱	۰/۶۱۳۱	-/۵۶۵۸	-/۵۹۱۷
H	-/۹۱۶۹	۰/۹۴۱۶	-/۴۶۱۴	-/۴۸۶۳
I	-/۶۲۲۳	۰/۴۴۷۷	۰,۳۴۰۸	-/۶۶۲۸
J	-/۸۸۱۳	۰/۷۶۳۹	-/۸۸۱۹	-/۹۷۹
K	-/۸۸۷۶	۰/۹۸۷۰	-/۷۹۴۵	-/۶۱۰۵



از جدول ۳ می‌توان به روشنی دریافت که پنج تا از DMUها، یعنی DMU_D ، DMU_B ، DMU_I ، DMU_E و DMU_J برحسب مدل خوشبینانه (۳)، کارای DEA شناسایی شده‌اند. این پنج واحد کارای DEA روی هم یک مرز کارایی BDEIJ را تعیین می‌کنند. به‌طور معمول تصور می‌شود که عملکرد پنج واحد کارای خوشبینانه باید بهتر از شش واحد دیگر باشد که غیرکارای خوشبینانه هستند. عملکرد یازده DMU برحسب کارایی خوشبینانه آن‌ها به‌صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$DMU_B \sim DMU_D \sim DMU_E \sim DMU_I \sim DMU_J \phi DMU_G \phi$$

$$DMU_A \phi DMU_K \phi DMU_F \phi DMU_H \phi DMU_C$$

که در این جا نماد «~» نشان‌دهنده «بی‌تفاوت بودن» و نماد ϕ نشان‌دهنده «برتر بودن» است.

جدول ۳ کارایی‌های نسبی برای یازده DMU به‌وسیله مدل‌های (۳) و (۵)

شرکت‌ها	کارایی خوشبینانه	کارایی بدبینانه
A	۱/۱۳۴۸	۱/۰۰۰۰
B	۱/۰۰۰۰	۰/۸۹۰۴
C	۳/۲۰۳۲	۱/۰۰۰۰
D	۱/۰۰۰۰	۰/۲۸۳۰
E	۱/۰۰۰۰	۰/۴۳۹۹
F	۲/۳۲۷۰	۱/۰۰۰۰
G	۱/۲۷۸۶	۰/۵۰۲۷
H	۲/۳۷۴۲	۰/۶۹۱۷
I	۱/۰۰۰۰	۰/۵۱۵۷
J	۱/۰۰۰۰	۰/۳۲۷۳
K	۱/۴۴۳۴	۰/۵۸۳۳

از دیدگاه کارایی بدبینانه، سه DMU ، یعنی DMU_A ، DMU_C و DMU_F ناکارای بدبینانه هستند. آن‌ها روی هم یک مرز ناکارایی ACF را تعریف می‌کنند. تصور می‌شود که عملکرد این سه واحد ناکارای بدبینانه ضعیف‌تر از هشت واحدی است که غیرناکارای بدبینانه ارزیابی شده‌اند. عملکرد یازده DMU برحسب کارایی بدبینانه آن‌ها به‌صورت زیر رتبه‌بندی می‌شود:

$$DMU_D \phi DMU_J \phi DMU_E \phi DMU_G \phi DMU_I \phi DMU_K \phi \\ DMU_H \phi DMU_B \phi DMU_A \sim DMU_C \sim DMU_D$$

سنجش‌های فوق براساس دیدگاه‌های متفاوتی صورت گرفته‌اند. از این رو ممکن است نتایج متفاوتی نیز داشته باشند. هر نتیجه‌گیری ارزیابی که فقط یکی از این دو دیدگاه را در نظر بگیرد، بدون تردید یک‌طرفه، غیر واقع‌گرایانه، و غیر متقاعدکننده خواهد بود.

برای به دست آوردن بازه کارایی هر DMU با استفاده از مدل‌های DEA کراندار (۷)، نخست α را به دست می‌آوریم. با توجه به جدول ۳ داریم:

$$\theta_{max}^* = ۳/۲۰۳۲ \text{ و } \phi_{min}^* = ۰/۲۸۳۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۰/۲۸۳۰}{۳/۲۰۳۲} = ۰/۰۸۸۳$$

در نتیجه می‌توان بازه کارایی DMUها را حساب کرد که در جدول ۴ نشان داده شده است. به‌طور واضح دیده می‌شود که مدل‌های DEA کراندار نه تنها سه DMUی ناکارای بدبینانه را به‌طور دقیق مشخص می‌کنند بلکه پنج DMU کارای خوشبینانه را هم به‌طور کامل مشخص می‌کنند. $DMU_B, DMU_D, DMU_E, DMU_I, DMU_J$ واحدهای کارای DEA مشخص شده‌اند و DMU_A, DMU_C, DMU_F سه واحد ناکارای DEA هستند. چنین نتایج ارزیابی، کاملاً با نتایج به دست آمده به‌وسیله مدل CCR سنتی (۳) و مدل بدترین کارایی نسبی (۵) سازگار هستند.

جدول ۴ بازه کارایی، مقدار شاخص ϕ و ترتیب رتبه‌بندی برای یازده DMU

رتبه	مقدار شاخص ϕ	$w(A_i)$	$m(A_i)$	بازه‌ی کارایی	شرکت‌ها
۹	۰/۰۶۲۲	۰/۴۴۹۹	۰/۵۵۰۱	[۰/۱۰۰۲, ۱/۰۰۰۰]	A
۸	۰/۰۷۱۳	۰/۴۰۱۱	۰/۴۸۹۴	[۰/۰۸۸۳, ۰/۸۹۰۴]	B
۱۱	—	۰/۳۵۸۶	۰/۶۴۱۴	[۰/۲۸۲۸, ۱/۰۰۰۰]	C
۱	۰/۱۰۱۹	۰/۰۹۷۴	۰/۱۸۵۷	[۰/۰۸۸۳, ۰/۲۸۳۰]	D
۳	۰/۰۹۷۳	۰/۱۷۵۸	۰/۲۶۴۱	[۰/۰۸۸۳, ۰/۴۳۹۹]	E
۱۰	۰/۰۵۱۱	۰/۳۹۷۳	۰/۶۰۲۸	[۰/۲۰۵۵, ۱/۰۰۰۰]	F
۵	۰/۱۱۲۶	۰/۱۹۴۹	۰/۳۰۷۸	[۰/۱۱۲۹, ۰/۵۰۲۷]	G
۷	۰/۰۶۱۵	۰/۲۴۱۱	۰/۴۵۰۷	[۰/۲۰۹۶, ۰/۶۹۱۷]	H
۴	۰/۰۱۴۲	۰/۲۱۷۳	۰/۳۰۲۰	[۰/۰۸۸۳, ۰/۵۱۵۷]	I
۲	۰/۱۹۰۷	۰/۱۱۹۵	۰/۲۰۷۸	[۰/۰۸۸۳, ۰/۳۲۷۳]	J
۶	۰/۲۰۳۲	۰/۲۲۷۹	۰/۳۵۵۴	[۰/۱۲۷۵, ۰/۵۸۳۳]	K



جدول ۴ ترتیب رتبه‌بندی یازده شرکت گاز را برحسب نقطه وسط بازه کارایی نشان می‌دهد که براساس آن می‌توان دید مدل‌های DEA کراندار (۷) یک رتبه‌بندی کارایی یکتا برای یازده شرکت گاز ایجاد می‌کنند. معمولاً واحدهای کارایی DEA عملکرد خوبی دارند، اما به این معنا نیست که هر واحد کارایی DEA بهترین است. هم‌چنین واحدهای ناکارایی DEA معمولاً ضعیف عمل می‌کنند، اما نه این‌که هر واحد ناکارایی DEA بدترین کارکرد را انجام می‌دهد. بنابراین وقتی که یک DMU هم کارایی DEA و هم ناکارایی DEA باشد، به این مفهوم است که DMU نه بهترین است و نه بدترین.

از آن جایی که DEA به دلیل کاربردها و مطالعات موردی موفق خود، از سوی محققان صنعتی و دانشگاهی مورد توجه بسیار زیادی قرار گرفته است. مدل‌های DEA کراندار پیشنهادی را می‌توان برای تحلیل شاخص بهره‌وری مالمکوئیست [۱۸، صص ۱۳۷-۱۵۶]، بررسی کارایی بانک [۱۹، صص ۱۳۷-۱۶۴؛ ۲۰، صص ۹۳-۱۰۵]، سنجش عملکرد شعب بانک [۲۱، صص ۸۷-۱۰۳]، اندازه‌گیری کارایی مؤسسات آموزش عالی [۲۲، صص ۱-۲۳]، انتخاب تأمین‌کنندگان و غیره به کار برد [۲۳، صص ۱۲۹-۱۵۰].

۶- نتیجه‌گیری

عملکرد DMUها را از دیدگاه‌های مختلفی می‌توان اندازه‌گیری کرد. در این صورت نتایج آن‌ها بسیار گمراه‌کننده و حتی متناقض است. لذا این ضرورت انکارناپذیر است که باید اندازه‌های مختلف عملکرد را ادغام کرد تا یک ارزیابی کلی از عملکرد هر DMU به دست آید. برای نیل به این مقصود، در این مقاله مدل‌های DEA کراندار برای ارزیابی عملکرد کلی هر DMU پیشنهاد شده است. مدل‌های DEA کراندار که ما پیشنهاد کرده‌ایم، کران‌های کارایی خود را از دیدگاه خوشبینانه و بدبینانه به دست می‌آورد. بازه‌ها عدم اطمینان داده‌های ورودی-خروجی و ارزیابی شهودی تصمیم‌گیرندگان را نشان می‌دهند. هم‌چنین نشان داده شد که واحدهای کارایی خوشبینانه، ناکارایی بدبینانه و نیز مرزهای کارایی و ناکارایی را می‌توان به دقت با استفاده از مدل‌های DEA کراندار پیشنهادی شناسایی کرد. رویکرد DEA پیشنهادی با مرزهای کارا و ناکارا با یک مثال عددی برای نشان دادن سادگی و سودمندی آن در ارزیابی DMU بررسی شد. نشان داده شد که رویکرد DEA با مرزهای کارا و ناکارا مزیت قابل توجهی نسبت به روش‌های فعلی برای ارزیابی DMU دارد. این روش می‌تواند بهترین DMU را به آسانی و به درستی شناسایی کند.

۷- سپاسگزاری

مؤلف از یک بررسی‌کننده ناشناس به خاطر نظرها و پیشنهادهای سازنده‌اش که در بهبود مقاله مؤثر بود، تشکر می‌کند.

۸- پی‌نوشت‌ها

1. Farrell
2. Charnes
3. Data Envelopment Analysis (DEA)
4. Decision-Making Units (DMUs)
5. Non-efficient
6. Non-inefficient
7. Entani
8. Wang
9. Luo
10. Lan
11. Chin
12. Cooper
13. Number of staff
14. Budget
15. Amount of piping
16. Number of new customer
17. Amount of branch-line

۹- منابع

- [1] Farrell M.J.; "The measurement of productive efficiency"; *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, General 120, 1957.
- [2] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.; "Measuring the efficiency of decision making units"; *European Journal of Operational Research*, 2, 1978.
- [3] Entani T., Maeda Y., Tanaka H.; "Dual models of interval DEA and its extension to interval data"; *European Journal of Operational Research*, 136, 2002.
- [4] Azizi H., Fathi Ajirlu S.; "Measurement of overall performances of decision-



- making units using ideal and anti-ideal decision-making units"; *Computers & Industrial Engineering*, 59, 2010.
- [5] Wang Y.M., Luo Y.; "DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units"; *Applied Mathematics and Computation*, 173, 2006.
- [6] Amirteimoori A.; "DEA efficiency analysis: Efficient and anti-efficient frontier"; *Applied Mathematics and Computation*, 186, 2007.
- [7] Wang Y.M., Chin K.S., Yang J.B.; "Measuring the performances of decision making units using geometric average efficiency"; *Journal of the Operational Research Society*, 58, 2007.
- [8] Wang Y.M., Lan Y.X.; "Measuring malmquist productivity index: A new approach based on double frontiers data envelopment analysis"; *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2011.
- [9] Chin K.S., Wang Y.M., Poon, G.K.K., Yang J.B.; "Failure mode and effects analysis by data envelopment analysis"; *Decision Support Systems*, 48, 2009.
- [10] Wang Y.M., Chin K.S.; "A new approach for the selection of advanced manufacturing technologies: DEA with double frontiers"; *International Journal of Production Research*, 47, 2009.
- [11] Charnes A., Cooper W.W.; "Programming with fractional function"; *Naval Research Logistics Quarterly*, 9, 1962.
- [12] Liu F.F., Chen C.L.; "The worst-practice DEA model with slack-based measurement"; *Computers & Industrial Engineering*, 57, 2009.
- [13] Azizi H., Wang Y.M.; "Improved DEA models for measuring interval efficiencies of decision making units"; *Measurement*, (submitted for publication).
- [14] Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.; *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, MA, 2006.
- [15] Wang Y.M., Yang J.B.; "Measuring the performances of decision-making units using interval efficiencies"; *Journal of Computational and Applied Mathematics*,

198, 2007.

[16] Sengupta A., "Pal T.K.; On comparing interval numbers"; *European Journal of Operational Research*, 127, 2000.

[17] Amirteimoori A.; "Data envelopment analysis in dynamic framework"; *Applied Mathematics and Computation*, 181, 2006.

[۱۸] علیرضایی م.، افشاریان م.؛ «ارائه مدلی تلفیقی برای محاسبه رشد بهره‌وری کل عوامل از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، شاخص تورنکوئیست و محاسبه رشد بهره‌وری شرکت ملی نفت ایران»؛ *فصلنامه علمی - پژوهشی مدرس علوم انسانی - پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره یازدهم، شماره سوم، آذر ۱۳۸۶.

[۱۹] صفری س.، ابراهیمی شقاقی م.، شیخ م.؛ «مدیریت ریسک اعتباری مشتریان حقوقی در بانک‌های تجاری با رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها (رتبه‌بندی اعتباری)»؛ *فصلنامه علمی - پژوهشی مدرس علوم انسانی - پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره چهاردهم، زمستان ۱۳۸۹.

[۲۰] کردرستمی س.، امیرتیموری ع.، فاضلی سندیانی س.؛ «تخصیص مجدد منابع با حفظ پایداری مرزهای کارا در مناطق»؛ *مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن*، دوره هشتم، شماره چهارم، زمستان ۱۳۹۰.

[۲۱] حمیدی ن.، اکبری شمیرانی ر.، فضلی ص.؛ «شناسایی شعبه‌های ناکارای بانک ملت و استفاده از راهبرد ادغام به منظور افزایش کارایی آن»؛ *فصلنامه علمی - پژوهشی مدرس علوم انسانی - پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره پانزدهم، شماره سوم، آبان ۱۳۹۰.

[۲۲] ترکاشوند ع.، آذر ع.؛ «ارزیابی عملکرد آموزشی و پژوهشی با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌ها: گروه‌های آموزشی دانشکده علوم انسانی هر یک از مدل‌های ارزیابی دانشگاه تربیت مدرس»؛ *فصلنامه علمی - پژوهشی مدرس علوم انسانی - پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره دهم، شماره اول، فروردین ۱۳۸۵.

[۲۳] عزیزی ح.؛ «یک رویکرد جدید برای انتخاب تأمین کنندگان در حضور داده‌های نادقیق: DEA با مرزهای دوگانه»؛ *فصلنامه علمی - پژوهشی مدرس علوم انسانی پژوهش‌های مدیریت در ایران*، دوره شانزدهم، شماره دوم، تیر ۱۳۹۱.