اندازه‌گیری پدیده شلاقی در زنجیره تأمین سه مرحله‌ای با بیش از یک محصول

لیلا نظری*[1] و عبدالله آقایی[2]

[1] کارشناس ارشد و هیأت علمی دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ابهر
[2] استاد دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

(تاریخ دریافت 90/5/12، تاریخ دریافت روایت اصلاح‌شده 90/6/24، تاریخ تصویب 91/1/19)

چکیده

مدیریت زنجیره تأمین، یکی از عوامل اصلی موفقیت سازمان‌ها است که یکی از مهم‌ترین دلایل ناکارآیی آن، پدیده اثر شلاقی است. بیشتر مطالعات انجام‌شده درباره اندازه‌گیری آن روی زنجیره‌های تک‌محصولی و دومرحله‌ای بوده است. در این مقاله سعی شده است تا به اندازه‌گیری آن در شبکه‌های دو و سه مرحله‌ای با بیش از یک محصول و با تقاضای همبسته و تعیین پارامترهای مؤثر بر آن و ارائه راهکارهایی برای کاهش آن، پرداخته شود. در این راستا از مدل سری‌های زمانی برای بررسی الگوی تقاضا در زنجیره‌های تأمین با فرضیه‌های موردنظر و برای پیش‌بینی مصرف دوره پیش‌زمان از روش میانگین متحرک استفاده شده است. برای اثبات درستی مدل، عملکرد مدل با نتایج حاصل از واقعیت و شبیه‌سازی مقایسه شده که نشان‌دهنده نزدیکی عملکرد آنها به یکدیگر است. در نهایت اینکه نتایج حاصل از این مدلسازی، نشان‌دهنده کاهش اثر شلاقی در اثر کاهش پیش‌زمان و تعیین بهینه تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی است.

واژه‌های کلیدی: مدیریت زنجیره تأمین، سری‌های زمانی، اندازه‌گیری پدیده شلاقی، زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای با دو محصول

مقدمه

با توجه به اهمیت مدیریت زنجیره تأمین و پدیده اثر شلاقی[1]، اقدامات بسیاری برای کمّی‌کردن تأثیر این پدیده انجام شده است که می‌توان آنها را در سه گروه زیر طبقه-بندی کرد:

1- کمّی‌کردن تأثیر پدیده شلاقی به صورت ریاضی.
2- آزمایش چگونگی تأثیرپذیری آن از پیش‌بینی تقاضا، زمان تحویل و سایر موارد.
3- اندازه‌گیری تأثیر بعضی تعامل‌ها روی آن، نظیر تسهیم اطلاعات تقاضای مشتری و ظرفیت تأمین-کنندگان.

نخستین مطالعه در زمینه کمّی‌سازی اثر شلاقی، توسط چن و همکاران[1] انجام شد. آنها اثر شلاقی را به صورت نسبت واریانس سفارش‌های خرده‌فروش به واریانس تقاضایی که خرده‌فروش با آن مواجه است تعریف کردند. تحقیقات بعدی انجام‌شده نیز از همین نسبت برای اندازه-گیری میزان پدیده استفاده کردند. از آن جمله می‌توان به تحقیقات ژانگ و وانگ [2]، ماکویی و مددی [3]، کیم و همکاران [4]، جاکسیک و راسجان [5]، داک و همکاران[6]، گیلبرت [7]، تاول و همکاران [8]، هایا و همکاران [9]، گالمن و دیزنی [10]، گالمن و دیزنی [11]، *لانگ و فین* [12]، دیزنی و تاول [13]،هوسودا و دیزنی [14]، پاجان [15]، کریشنامورسی و همکاران [16]، چاندرا و گرابیس [17]، دیزنی و گرابستروم [18]، دیزنی و تاول [19]، زو و همکاران [20]، کلپوریس و همکاران [21]، کلجنن و همکاران [22]، داهری و چابچوب [23]، سو و وانگ [24]، چن و لی [25]، چن و لی [26] اشاره کرد. در این مقاله سعی شده است تا در راستای کاهش محدودیت‌ها، به اندازه‌گیری اثر پدیده شلاقی در زنجیره-های تأمین سه‌مرحله‌ای با بیش از یک محصول پرداخته شود.

تعریف و مدلسازی

اثر شلاقی از نظر آماری به صورت نسبت واریانس سفارش‌ها به واریانس تقاضا تعریف می شود:

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)} \quad (1)$$

* نویسنده مسئول: تلفکس:0241-7253032 ، Email: lea.nazari@gmail.com

در صورتی که مقدار رابطه ذکرشده کوچک‌تر یا برابر 1 باشد، اثر شلاقی از زنجیره تأمین حذف می‌شود و این اتفاق هنگامی رخ می‌دهد که نوسان‌های تقاضا و سفارش، به یکدیگر نزدیک باشد. این مقاله به ارائه راه‌حل‌هایی برای اندازه‌گیری واریانس تقاضا و سفارش مشتریان برای دو محصول همبسته در یک زنجیره تأمین سه‌مرحله‌ای خواهد پرداخت که طبق بررسی‌های انجام‌شده تا کنون، به آنها پرداخته نشده است.

فرضیه‌ها

مقاله، چارچوبی به شرح زیر را برای تحقیق در نظر گرفته است:

رویکرد: مطالعات درباره اندازه‌گیری اثر شلاقی بر دو رویکرد اساسی مبتنی بوده است: رویکرد آماری[2] و رویکرد تبدیل Z [3]، که هر دو رویکرد، روابط یکسان برای اثر شلاقی به دست می‌دهند. در این مقاله، روابط لازم برای اندازه‌گیری اثر شلاقی بر اساس رویکرد آماری به دست آمده است.

تعداد محصولات: تحقیقات انجام‌گرفته در حوزه اثر شلاقی، اغلب مدل محدود تک محصولی را در نظر گرفته‌اند. ویژگی بارز این مقاله مطالعه و بررسی اثر شلاقی در زنجیره‌های تأمین با بیش از یک محصول است.

الگوی تقاضای محصولات: در زنجیره‌های تأمین واقعی چندمحصولی، شرایطی وجود دارد که تقاضای محصولات به هم مرتبط هستند. در این مقاله فرض می‌کنیم محصولات مورد نظر مستقل نبوده و بین تقاضای دو محصول(D1,D2) ارتباط وجود دارد؛ به این ترتیب که تقاضای محصول1 در هر دوره به تقاضای همان محصول در دوره قبل و نیز تقاضای محصول2 در دوره قبل بستگی دارد. وابستگی تقاضای محصول2 با محصول1 نیز به همین شکل مطرح است. بررسی فعالیت‌های انجام‌شده درباره اثر شلاقی و الگوی در نظر گرفته شده برای تقاضا، نشان می‌دهد که در بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام‌گرفته، مدل‌های سری‌های زمانی به عنوان مدل تقاضا در نظر گرفته شده است. مهم‌ترین دلیل آن وجود همبستگی در تقاضای محصول در دوره‌های زمانی متوالی بوده که بر رفتار تقاضای محصول در دنیای واقعی نیز انطباق بیشتری نسبت به مدل‌های غیرهمبسته دارد.از این رو مدل‌های سری‌های زمانی، ابزار مناسبی برای مدل‌کردن تقاضا در دوره‌های مختلف است و در نتیجه در این مقاله نیز از این مدل‌ها برای تعیین الگوی مفروض تقاضا استفاده شده است .

سیاست سفارش‌گذاری: برای سفارش‌گذاری محصول دو روش اصلی وجود دارد: روش دوره سفارش[4] و روش نقطه سفارش[5]. در این مقاله فرض می‌شود خرده‌فروش از سیاست سفارش‌گذاری تا حد معین که مبتنی بر دوره سفارش است استفاده می‌کند. این روش سفارش‌گذاری یک روش استاندارد در بسیاری از سیستم‌های تولیدی است.

روش پیش‌بینی: پیش‌بینی تقاضا در دوره پیش‌زمان، در ردیف مهم‌ترین عوامل بروز اثر شلاقی است. پیش‌بینی در سفارش‌ها تغییر ایجاد می‌کند و منجر به بروز اثر شلاقی می‌شود. اغلب روش میانگین متحرک، برای پیش‌بینی تقاضا در دوره پیش‌زمان، در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعداد مراحل: در این مقاله یک زنجیره تأمین سه مرحله‌ای در نظر گرفته شده است.

در ادامه مقاله با توجه به فرضیه‌ها، به تعیین واریانس تقاضا و سفارش برای اندازه‌گیری پدیده شلاقی پرداخته خواهد شد.

تعیین واریانس تقاضا

با توجه به ارتباط تعریف‌شده بین محصولات، مدل سری زمانی VAR(1)[6] به عنوان الگوی تقاضای بازار در نظر گرفته شده است. این مدل، الگوی مناسبی برای مدل‌سازی تقاضا در زنجیره‌های چندمحصولی است. الگوی برداری اتورگرسیو مرتبه اول به صورت زیر است:

$$D_t = \phi_1 D_{t-1} + a_t \qquad (2)$$

که در این رابطه:

D_t: یک بردار (m*1) شامل متغیرها

ϕ_1: بردار ضرایب (m*m)

a_t: بردار خطا (m*1) با میانگین صفر و واریانس برداری Σ

(مؤلفه‌های بردار a_t، a_t^1 و a_t^2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (i.i.d) با میانگین صفر و واریانس σ_{11} و σ_{22} هستند)

کواریانس بین a_t^1 و a_t^2 نیز با σ_{12} و ماتریس بردار واریانس تقاضا (m*m) با تأخیر زمانی k نیز با $\Gamma(k)$ نشان داده می‌شود. فرض می‌کنیم زنجیره دو محصول دارد(m=2)؛ در این صورت اگر تقاضا و خطا محصول i در دوره t با نماد D_t^i و a_t^i نشان داده شود خواهیم داشت:

$$D_t = \begin{bmatrix} D_t^1 \\ D_t^2 \end{bmatrix}$$

$$a_t = \begin{bmatrix} a_t^1 \\ a_t^2 \end{bmatrix}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

و بنابراین در فرآیند اتورگراسیو برداری مرتبه اول تقاضای دو محصول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} D_t^1 \\ D_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{t-1}^1 \\ D_{t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_t^1 \\ a_t^2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} D_t^1 = \phi_{11} D_{t-1}^1 + \phi_{12} D_{t-1}^2 + a_t^1 \\ D_t^2 = \phi_{21} D_{t-1}^1 + \phi_{22} D_{t-1}^2 + a_t^2 \end{cases}$$

در این فرآیند اگر داشته باشیم:

$$\left| \frac{(\phi_{11} + \phi_{22}) \pm \sqrt{(\phi_{11} - \phi_{22})^2 + 4\phi_{12}\phi_{21}}}{2} \right| \pi\ 1 \qquad (4)$$

فرآیند اتورگرسیو برداری مرتبه اول، ایستا خواهد بود و در این صورت در مورد واریانس تقاضا رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{cases} Var(D_t^1) = Var(D_{t-1}^1) = Var(D_{t-2}^1) = \ldots = \gamma_{11} \\ Var(D_t^2) = Var(D_{t-1}^2) = Var(D_{t-2}^2) = \ldots = \gamma_{22} \end{cases}$$

برای تعیین واریانس تقاضای هر یک از محصولات، تابع ماتریس کوواریانس برای الگوی اتورگرسیو برداری مرتبه اول با تأخیر زمانی k را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Gamma(k) = E[D_{t-k} D_t'] = E[D_{t-k}(\phi_1 D_{t-1} + a_t)'] = E[D_{t-k} D_{t-1}' \phi_1' + D_{t-k} a_t']$$

$$= \begin{cases} \Gamma(-1)\phi_1' + \Sigma & k = 0 \\ \Gamma(k-1)\phi_1' = \Gamma(0)(\phi_1')^k & k \geq 1 \end{cases}$$

که در آن داریم:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \qquad \Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که برای k≥1 داریم:

$$E(D_{t-k} a_t') = 0$$

و به ازای k=1 خواهیم داشت:

$$\Gamma(1) = \Gamma(0)\phi_1'$$

و در نتیجه:

$$\phi_1 = \Gamma'(1)\Gamma^{-1}(0)$$

$$\Sigma = \Gamma(0) - \Gamma(-1)\Gamma^{-1}(0)\Gamma(1) = \Gamma(0) - \Gamma'(1)\Gamma^{-1}(0)\Gamma(1)$$

چنانچه در معادله بالا ماتریس‌های ϕ_1 و Σ معلوم باشند و با در نظر گرفتن دو سری زمانی، می‌توان $\Gamma(0)$ را به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11}^2\gamma_{11} + 2\phi_{11}\phi_{12}\gamma_{12} + \phi_{12}^2\gamma_{22} & \phi_{11}\phi_{21}\gamma_{11} + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21})\gamma_{12} + \phi_{12}\phi_{22}\gamma_{22} \\ \phi_{11}\phi_{21}\gamma_{11} + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21})\gamma_{12} + \phi_{12}\phi_{22}\gamma_{22} & \phi_{21}^2\gamma_{11} + 2\phi_{21}\phi_{22}\gamma_{12} + \phi_{22}^2\gamma_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2 \\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1-\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22} \\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1-\phi_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2 \\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1-\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22} \\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1-\phi_{22}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

با فرض:

$$A = \begin{bmatrix} 1-\phi_{11}^2 & -2\phi_{11}\phi_{12} & -\phi_{12}^2 \\ -\phi_{11}\phi_{21} & 1-\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21} & -\phi_{12}\phi_{22} \\ -\phi_{21}^2 & -2\phi_{21}\phi_{22} & 1-\phi_{22}^2 \end{bmatrix}$$

با استفاده از قوانین ماتریس‌ها، خواهیم داشت:

$$|A|(A^{-1}) = \begin{bmatrix} (1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{22}^2) & 2\phi_{12}(\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) & \phi_{12}^2(1-\phi_{12}\phi_{22} + \phi_{11}\phi_{22}) \\ \phi_{21}(\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) & (1-\phi_{11}^2)(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}^2\phi_{21}^2 & \phi_{12}(\phi_{22}(1-\phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}) \\ \phi_{21}^2(1+\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}) & 2\phi_{21}(\phi_{22}(1-\phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}) & (1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{11}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{11}^2) \end{bmatrix}$$

همچنین دترمینان A به صورت زیر خواهد بود:

$$|A| = 1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3$$

$$\gamma_{11} = \frac{\begin{pmatrix} \sigma_{11}((1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{22}^2)) + \\ 2\phi_{12}\sigma_{12}(\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}) + \phi_{12}^2\sigma_{22}(1-\phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}\phi_{22}) \end{pmatrix}}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

(5)

$$\gamma_{12} = \frac{\begin{pmatrix} \phi_{21}\sigma_{11}[\phi_{11}(1-\phi_{22}^2) + \phi_{12}\phi_{21}\phi_{22}] + \\ \sigma_{12}[(1-\phi_{11}^2)(1-\phi_{22}^2) - \phi_{12}^2\phi_{21}^2] + \phi_{12}\sigma_{22}[\phi_{22}(1-\phi_{11}^2) + \phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}] \end{pmatrix}}{1 + (\phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21} - 1)(\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{12}\phi_{21} + \phi_{11}^2 + \phi_{22}^2) + (\phi_{12}\phi_{21} - \phi_{11}\phi_{22})^3}$$

(6)

$$\gamma_{22}=\frac{\begin{pmatrix}\phi_{21}^2\sigma_{11}[1+\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21}]+2\phi_{21}\sigma_{12}[\phi_{22}(1-\phi_{11}^2)+\phi_{11}\phi_{12}\phi_{21}]\\+\sigma_{22}[(1-\phi_{11}\phi_{22})(1-\phi_{11}^2)-\phi_{12}\phi_{21}(1+\phi_{11}^2)]\end{pmatrix}}{1+(\phi_{11}\phi_{22}-\phi_{12}\phi_{21}-1)(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{12}\phi_{21}+\phi_{11}^2+\phi_{22}^2)+(\phi_{12}\phi_{21}-\phi_{11}\phi_{22})^3}$$

(7)

γ_{11} و γ_{22} واریانس تقاضای محصولات 1 و 2 و γ_{12} کوواریانس بین تقاضای دو محصول است.

واریانس سفارش

طبق فرمول(1) برای محاسبه مقدار اثر شلاقی نیاز به محاسبه واریانس سفارش داریم. با توجه به اینکه واریانس سفارش با توجه به روش سفارش‌گذاری و روش‌های پیش-بینی تعیین می‌شود، درادامه به این دو موضوع پرداخته خواهد شد.

سیاست سفارش‌گذاری: سیاست سفارش‌گذاری خرده-فروش، روش سفارش‌گذاری تا حد معین[7] است؛ به این ترتیب که در ابتدای هر دوره t سطح موجودی کنترل می-شود و سفارشی به اندازه Q_t در نظر گرفته می‌شود تا سطح موجودی را به میزان S_t برساند. پس از سفارش‌گذاری کالا تقاضای مشتری به میزان D_t رخ می‌دهد. این توالی به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$Q_t=S_t-S_{t-1}+D_{t-1} \qquad (8)$$

که در آن:

$$S_t=\hat{D}_t^L+z.\hat{\sigma}_t^L \qquad (9)$$

در این رابطه، D برآورد تقاضای لیدتایم و σ برآورد انحراف معیار خطای پیش‌بینی تقاضای دوره پیش‌زمان است. مقدار z نیز با توجه به سطح سرویس‌دهی به مشتری از جدول نرمال استاندارد به دست می‌آید. اگر هزینه نگهداری و کمبود کالا محسوس باشد، z از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$z=\phi^{-1}\left(\frac{b}{h+b}\right)$$

که در آن، z تابع توزیع نرمال، h هزینه نگهداری و b هزینه کمبود واحد محصول در هر دوره است. با ادغام رابطه‌های ذکرشده مقدار سفارش به این صورت به دست می‌آید:

$$Q_t=(\hat{D}_t^L+z.\hat{\sigma}_t^L)-(\hat{D}_{t-1}^L+z.\hat{\sigma}_{t-1}^L)+D_{t-1}$$

$$Q_t=\hat{D}_t^L-\hat{D}_{t-1}^L+z(\hat{\sigma}_t^L-\hat{\sigma}_{t-1}^L)+D_{t-1}$$

(10)

روش پیش‌بینی تقاضا: طبق رابطه بالا، برای داشتن واریانس تقاضا به برآورد تقاضا و انحراف معیار خطای پیش‌بینی در دوره پیش‌زمان نیاز است. طبق مفروضات زنجیره تأمین مورد نظر، خرده‌فروش، تقاضای دوره پیش-زمان را بر اساس روش میانگین متحرک پیش‌بینی می‌کند.

پیش‌بینی به روش میانگین متحرک: در صورتی که خرده‌فروش برای پیش‌بینی تقاضای محصول برای دورهt، از داده‌های مربوط به تقاضا در P دوره آخر استفاده کند، خواهیم داشت:

$$\hat{D}_t=\frac{\sum_{i=1}^{p}D_{t-i}}{p} \qquad (11)$$

در نتیجه اگر طول دوره پیش‌زمان ثابت و برابر با Lباشد، برآورد تقاضا در این دوره به این ترتیب به دست می‌آید:

$$\hat{D}_t^L=L.\hat{D}_t$$

$$\hat{D}_t^L=L\left(\frac{\sum_{i=1}^{p}D_{t-i}}{p}\right)$$

بنابراین برای تعیین $Var(Q_t)$ برآورد تقاضا مشخص است. اما در رابطه مربوط به Q_t انحراف معیار خطای پیش‌بینی σ نیز اهمیت دارد. در ادمه بحث قضیه‌ای بیان می‌شود که محاسبات مربوط به تعیین $Var(Q_t)$ را تسهیل می‌کند.

قضیه1: واریانس خطای پیش‌بینی تقاضای هر محصول در دوره پیش‌زمان به دوره(t) بستگی نداشته و در طول زمان ثابت است و با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$(\hat{\sigma}_t^L)^2==\left(1+\frac{L}{p}\right)L\gamma+2\sum_{i=1}^{L}(L-i)\gamma(i)$$
$$+2\left(\frac{L}{p}\right)\left(\left(\frac{L}{p}\right)\sum_{i=1}^{p}(p-i)\gamma(i))-\sum_{i=1}^{L+p-1}\gamma(i)\right)$$

به عبارت بهتر σ= σ در این رابطه کوواریانس بین تقاضای هر محصول در یک دوره و تقاضای همان محصول در دوره دیگر با تأخیر P، با γ(P) نشان داده شده است. γ واریانس تقاضای هر محصول است.

اثبات: برای جلوگیری از پیچیدگی در محاسبات هر محصول، از قرار دادن اندیس برای تفکیک محصول

خودداری می‌شود، ولی از روابط به دست آمده می‌توان برای هر یک از محصولات استفاده کرد. از این رو طبق تعریف واریانس می‌توان نوشت:

$$\left(\hat{\sigma}_t^L\right)^2 = Var\left(D_t^L - \hat{D}_t^L\right) = Var\left(D_t^L\right) + Var\left(\hat{D}_t^L\right) - 2Cov\left(D_t^L, \hat{D}_t^L\right)$$

در این رابطه D_t^L تقاضای محصول در دوره پیش‌زمان است که به این شکل مشخص می‌شود:

$$D_t^L = D_t + D_{t+1} + \ldots + D_{t+L-1} = \sum_{i=0}^{L-1} D_{t+i} \qquad \textbf{(12)}$$

بنابراین برای محاسبه σ باید سه رابطه(Var(D و Var(D_t^L) و Cov(D_t^L, D) تعیین شوند.

تعیین Var(D_t^L)

طبق تعریف داریم Cov(D_t,D_{t+k})=γ(k) و با توجه به شرایط ایستایی Var(D_{t-1})=Var(D_{t-2})=Var(D)=γ(0)=γ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&Var\left(D_t^L\right) = Var\left(D_t + D_{t+1} + \ldots + D_{t+L-1}\right)\\
&Var\left(D_t^L\right) = Var\left(D_t\right) + Var\left(D_{t+1}\right) + \ldots + Var\left(D_{t+L-1}\right) +\\
&2Cov\left(D_t, D_{t+1}\right) + 2Cov\left(D_t, D_{t+2}\right) + \ldots + 2Cov\left(D_t, D_{t+L-1}\right) +\\
&2Cov\left(D_{t+1}, D_{t+2}\right) + 2Cov\left(D_{t+1}, D_{t+3}\right) + \ldots + 2Cov\left(D_{t+1}, D_{t+L-1}\right) +\\
&2Cov\left(D_{t+2}, D_{t+3}\right) + 2Cov\left(D_{t+2}, D_{t+4}\right) + \ldots + 2Cov\left(D_{t+2}, D_{t+L-1}\right) + \ldots + 2Cov\left(D_{t+L-2}, D_{t+L-1}\right)\\
&= \gamma + \gamma + \ldots + \gamma +\\
&2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \ldots + 2\gamma(L-3) + 2\gamma(L-2) + 2\gamma(L-1) +\\
&2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \ldots + 2\gamma(L-3) + 2\gamma(L-2) +\\
&2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \ldots + 2\gamma(L-3) +\\
&\vdots\\
&+ 2\gamma(1)\\
&= L\gamma + 2\left[\gamma(1) + \gamma(1) + \ldots + \gamma(1) + \gamma(2) + \ldots + \gamma(2) + \ldots + \gamma(L-1)\right]\\
&= L\gamma + 2\left[(L-1)\gamma(1) + (L-2)\gamma(2) + \ldots + \gamma(L-1)\right]\\
&= L\gamma + 2\left[\sum_{i=1}^{L}(L-i)\gamma(i)\right]
\end{aligned}$$

تعیین Var(D)

$$Var(\hat{D}_t^L) = Var\left(L\left(\frac{\sum_{i=1}^{p} D_{t-i}}{p}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&Var(\hat{D}_t^L) = \left(\frac{L}{p}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^{p} D_{t-i}\right) = \left(\frac{L}{p}\right)^2 Var(D_{t-1} + D_{t-2} + \ldots + D_{t-p})\\
&= \left(\frac{L}{p}\right)^2 [Var(D_{t-1}) + Var(D_{t-1}) + \ldots + Var(D_{t-p}) +\\
&2Cov(D_{t-1}, D_{t-2}) + 2Cov(D_{t-1}, D_{t-3}) + \ldots + 2Cov(D_{t-1}, D_{t-p}) +\\
&2Cov(D_{t-2}, D_{t-3}) + 2Cov(D_{t-2}, D_{t-4}) + \ldots + 2Cov(D_{t-2}, D_{t-p}) +\\
&2Cov(D_{t-3}, D_{t-4}) + 2Cov(D_{t-3}, D_{t-5}) + \ldots + 2Cov(D_{t-3}, D_{t-p})\\
&+ \ldots + 2Cov(D_{t-p+1}, D_{t-p})] = \left(\frac{L}{p}\right)^2 [\gamma + \gamma + \ldots + \gamma +\\
&2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \ldots + 2\gamma(p-1) +\\
&2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \ldots + 2\gamma(p-2) +\\
&2\gamma(1) + 2\gamma(2) + \ldots + 2\gamma(p-3) + \ldots + 2\gamma(1)]\\
&= \left(\frac{L}{p}\right)^2 [p\gamma + 2(\gamma(1) + \gamma(1) + \ldots + \gamma(1) + \gamma(2) + \ldots + \gamma(2) + \ldots + \gamma(p-1))]\\
&= \left(\frac{L}{p}\right)^2 [p\gamma + 2((p-1)\gamma(1) + (p-2)\gamma(2) + \ldots + \gamma(p-1))]\\
&= \left(\frac{L}{p}\right)^2 [p\gamma + 2(\sum_{i=1}^{p}(p-i)\gamma(i))]
\end{aligned}$$

تعیین Cov(D_t^L, D)

$$\begin{aligned}
&Cov(D_t^L, \hat{D}_t^L) = Cov[(D_t + D_{t+1} + \ldots + D_{t+L-1}), \left(\frac{L}{p}\right)(D_{t-1} + D_{t-2} + \ldots + D_{t-p})]\\
&= \left(\frac{L}{p}\right) Cov[(D_t + D_{t+1} + \ldots + D_{t+L-1}), (D_{t-1} + D_{t-2} + \ldots + D_{t-p})]\\
&= \left(\frac{L}{p}\right)[Cov(D_t, D_{t-1}) + Cov(D_t, D_{t-2}) + \ldots + Cov(D_t, D_{t-p}) +\\
&Cov(D_{t+1}, D_{t-1}) + Cov(D_{t+1}, D_{t-2}) + \ldots + Cov(D_{t+1}, D_{t-p}) + \ldots\\
&+ Cov(D_{t+L-1}, D_{t-1}) + Cov(D_{t+L-1}, D_{t-2}) + \ldots + Cov(D_{t+L-1}, D_{t-p})]\\
&= \left(\frac{L}{p}\right)[\gamma(1) + \gamma(2) + \ldots + \gamma(p) + \gamma(2) + \gamma(3) + \ldots + \gamma(p+1) + \ldots +\\
&\gamma(L) + \gamma(L+1) + \ldots + \gamma(L+p-1)]\\
&= \left(\frac{L}{p}\right)[\sum_{i=1}^{L+p-1}\gamma(i)]
\end{aligned}$$

حال با توجه به روابط به دست آمده و با قراردادن آنها در رابطه واریانس و خلاصه‌سازی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&(\hat{\sigma}_t^L)^2 = Var(D_t^L) + Var(\hat{D}_t^L) - 2Cov(D_t^L, \hat{D}_t^L)\\
&= L\gamma + 2\left[\sum_{i=1}^{L}(L-i)\gamma(i)\right] + \left(\frac{L}{p}\right)^2\left[p\gamma + 2(\sum_{i=1}^{p}(p-i)\gamma(i))\right] - 2\left(\frac{L}{p}\right)\left[\sum_{i=1}^{L+p-1}\gamma(i)\right]\\
&= \left(1 + \frac{L}{p}\right)L\gamma + 2\sum_{i=1}^{L}(L-i)\gamma(i) + 2\left(\frac{L}{p}\right)\left(\left(\frac{L}{p}\right)\sum_{i=1}^{p}(p-i)\gamma(i)) - \sum_{i=1}^{L+p-1}\gamma(i)\right)
\end{aligned}$$

چنانچه مشخص است رابطه بالا مستقل از زمان است و فقط به پارامترهای مسئله (L,p,γ) بستگی دارد که خود γ نیز فقط به ϕ_{ij} وابسته است.

قضیه ذکرشده نشان می‌دهد، انحراف معیار خطای پیش‌بینی تقاضای هر محصول در دوره پیش‌زمان در تغییرات واریانس سفارش بی‌تأثیر است.

با توجه به نتیجه قضیه که نشان می‌دهد σ =σ و با در نظر گرفتن رابطه (10) رابطه ذکرشده به این رابطه خلاصه می‌شود:

$$Q_t = \hat{D}_t^L - \hat{D}_{t-1}^L + D_{t-1}$$

با جایگذاری رابطه‌ها خواهیم داشت:

$$Q_t = L[\frac{\sum_{i=1}^{p} D_{t-i}}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{p} D_{t-i-1}}{p}] + D_{t-1} = \frac{L}{p}[\sum_{i=1}^{p} D_{t-i} - \sum_{i=1}^{p} D_{t-i-1}] + D_{t-1}$$
$$= \frac{L}{p}[D_{t-1} + D_{t-2} + \ldots + D_{t-p} - (D_{t-2} + D_{t-3} + \ldots + D_{t-p} + D_{t-p-1})] + D_{t-1}$$
$$= \frac{L}{p}[D_{t-1} - D_{t-p-1}] + D_{t-1}$$

که در نتیجه مقدار سفارش به این ترتیب به دست می‌آید:

$$Q_t = (1 + \frac{L}{p})D_{t-1} - (\frac{L}{p})D_{t-p-1} \qquad (13)$$

این رابطه مقدار سفارش محصولی که بر اساس سیاست سفارش‌گذاری تا حد معین سفارش‌گذاری شده و تقاضای محصول در دوره پیش‌زمان نیز بر اساس روش میانگین متحرک پیش‌بینی می‌شود را در دوره t نشان می‌دهد. با قرار دادن پارامترهای مربوط به هر محصول در رابطه، مقدار سفارش محصول iام به دست می‌آید:

$$Q_t^i = (1 + \frac{L_i}{p_i})D_{t-1}^i - (\frac{L_i}{p_i})D_{t-p-1}^i$$

برای تعیین واریانس سفارش‌ها، با توجه به رابطه 12 داریم:

$$Var(Q_t) = Var[(1 + \frac{L}{p})D_{t-1} - (\frac{L}{p})D_{t-p-1}]$$
$$Var(Q_t) = (1 + \frac{L}{p})^2 Var(D_{t-1}) + (\frac{L}{p})^2 Var(D_{t-p-1})$$
$$- 2(1 + \frac{L}{p})(\frac{L}{p})Cov(D_{t-1}, D_{t-p-1})$$

با توجه به خاصیت ایستایی فرآیند برداری و طبق تعریف کوواریانس خواهیم داشت:

$$Var(Q_t) = (1 + \frac{L}{p})^2 \gamma + (\frac{L}{p})^2 \gamma - 2(1 + \frac{L}{p})(\frac{L}{p})\gamma(p) \qquad (15)$$

در نتیجه برای محاسبه واریانس سفارش باید کوواریانس تقاضای هر محصول با تأخیر زمانی P تعیین شود. با در نظر گفتن رابطه (1) اگر از γ برای نمایش واریانس تقاضای هر محصول و از $\gamma(p)$ برای نمایش کوواریانس تقاضای هر محصول با تأخیر P استفاده شود، با جایگذاری داریم:

$$BE = \frac{Var(Q_t)}{Var(D)} = \frac{(1 + \frac{L}{p})^2 \gamma + (\frac{L}{p})^2 \gamma - 2(1 + \frac{L}{p})(\frac{L}{p})\gamma(p)}{\gamma}$$
$$BE = [(1 + \frac{L}{p})^2 + (\frac{L}{p})^2] - 2(1 + \frac{L}{p})(\frac{L}{p})[\frac{\gamma(p)}{\gamma}]$$
$$BE = 1 + 2\left(\frac{L}{p}\right)\left(1 + \frac{L}{p}\right)\left(1 - \frac{\gamma(p)}{\gamma}\right) \qquad (16)$$

این رابطه شکل کلی اثر شلاقی را برای زنجیره‌های تأمین دومحصولی مبتنی بر مفروضات مسئله بیان می‌کند.

چنانچه برای هر یک از دو محصول، اندیس مربوطه رادر نظر بگیریم، به رابطه دقیق‌تری از اثر شلاقی برای هر محصول دست خواهیم یافت:

$$BE_{p_i}^i = 1 + 2\left(\frac{L_i}{p_i}\right)\left(1 + \frac{L_i}{p_i}\right)\left(1 - \frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}}\right) \qquad i = 1,2 \qquad (17)$$

در رابطه (17) پیش‌زمان و دوره‌های موردنظر در پیش‌بینی به روش میانگین متحرک محصول iام به ترتیب با L_i و P_i نشان داده شده است و نماد BE_{pi}^{i} برای نمایش اثر شلاقی محصول iام (i=1,2) زمانی که در پیش‌بینی تقاضا در دوره پیش‌زمان از روش میانگین متحرک بر اساس P_i دوره آخر استفاده شود، به کار گرفته شده است. در رابطه (17) برای اندازه‌گیری اثر شلاقی نیاز به محاسبه کوواریانس با تأخیر P برای محصول iام ($\gamma(P)$) است. خواهیم دید به ازای مقادیر مختلف P_i روابط متفاوتی برای اثر شلاقی به دست خواهد آمد.

محاسبه کوواریانس تقاضای هر محصول در دو دوره با تأخیر P

اکنون برای تعیین $\gamma(P)$ برای هر محصول بار دیگر رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Gamma(k) = \begin{cases} \Gamma(-1)\phi_1' + \Sigma & k = 0 \\ \Gamma(k-1)\phi_1' = \Gamma(0)(\phi_1')^k & k \geq 1 \end{cases}$$

مشخص است که برای محاسبه $\gamma_{ii}(k)$ (عناصر قطر اصلی ماتریس کوواریانس با تأخیرk ؛$k \geq 1$) به ماتریس $\Gamma(0)$ و توان kام ترانهاده ماتریس ضرایب فرآیند اتورگرسیوبرداری مرتبه اول یا ϕ_1' نیاز است. در این فرآیند برای دو محصول داریم:

$$\begin{cases} D_t^1 = \phi_{11} D_{t-1}^1 + \phi_{12} D_{t-1}^2 + a_t^1 \\ D_t^2 = \phi_{21} D_{t-1}^1 + \phi_{22} D_{t-1}^2 + a_t^2 \end{cases}$$

و ماتریس ضرایب (ϕ_1) به صورت زیر است:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

و در ادامه روابط $\gamma_{ii}(P_i)$ به ازای مقادیر P=1,2,3,4,5 برای هر محصول به دست می‌آید.

تعیین $\gamma_{11}(1)$ و $\gamma_{22}(1)$

هنگامی که در پیش‌بینی به روش میانگین متحرک از داده‌های آخرین دوره استفاده شود لازم است که ماتریس $\Gamma(1)$ بر اساس ماتریس ϕ_1' تعیین شود:

$$\Gamma(1) = \Gamma(0)\phi_1' \quad \Gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad \phi_1' = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\Gamma(1) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11}\phi_{11} + \gamma_{12}\phi_{12} & \gamma_{11}\phi_{21} + \gamma_{12}\phi_{22} \\ \gamma_{12}\phi_{11} + \gamma_{22}\phi_{12} & \gamma_{12}\phi_{21} + \gamma_{22}\phi_{22} \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(1) &= \gamma_{11}\phi_{11} + \gamma_{12}\phi_{12} \\ \gamma_{22}(1) &= \gamma_{12}\phi_{21} + \gamma_{22}\phi_{22} \end{aligned} \tag{18}$$

از این رو اثر شلاقی محصول 1 به ازای $P_1=1$ به دست می‌آید:

$$BE_1^1 = 1 + 2L_1(1+L_1)\left(1 - \frac{\gamma_{11}(p_1)}{\gamma_{11}}\right) = 1 + 2L_1(1+L_1)\left(1 - \frac{\gamma_{11}\phi_{11} + \gamma_{12}\phi_{12}}{\gamma_{11}}\right)$$

$$BE_1^1 = 1 + 2L_1(1+L_1)\left(1 - \phi_{11} - \phi_{12}\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\right) \tag{19}$$

همچنین برای محصول 2 به ازای $P_2=1$ داریم:

$$BE_1^2 = 1 + 2L_2(1+L_2)\left(1 - \frac{\gamma_{22}(p_2)}{\gamma_{22}}\right) = 1 + 2L_2(1+L_2)\left(1 - \frac{\gamma_{22}\phi_{22} + \gamma_{12}\phi_{21}}{\gamma_{22}}\right)$$

$$BE_1^2 = 1 + 2L_2(1+L_2)\left(1 - \phi_{22} - \phi_{21}\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}\right)\right) \tag{20}$$

تعیین $\gamma_{11}(2)$ **و** $\gamma_{22}(2)$

برای محاسبه توان‌های 2 و بالاتر ترانهاده ماتریس ضرایب (ϕ_1')، باید با استفاده از قوانین ضرب ماتریس‌ها، توان‌های مختلف ماتریس را محاسبه کرد و ماتریس کوواریانس را به دست آورد. بر اساس قوانین ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\phi_1'^2 = \begin{bmatrix} \phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} & \phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) \\ \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(0)(\phi_1')^2$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Gamma(2) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} & \phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) \\ \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(2) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{12}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \gamma_{11}\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) + \gamma_{12}(\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) \\ \gamma_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{22}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22}) & \gamma_{12}\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) + \gamma_{22}(\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) \end{bmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\gamma_{11}(2) = \gamma_{11}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{12}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})$$

$$\gamma_{22}(2) = \gamma_{12}\phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22}) + \gamma_{22}(\phi_{22}^2 + \phi_{21}\phi_{12})$$

از این رو برای اثر شلاقی محصول1 به ازای $P_1=2$، اندازه اثر شلاقی به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$BE_2^1 = 1 + 2\left(\frac{L_1}{2}\right)\left(1 + \frac{L_1}{2}\right)\left(1 - \frac{\gamma_{11}(2)}{\gamma_{11}}\right)$$

$$= 1 + L_1\left(1 + \frac{L_1}{2}\right)\left(1 - \frac{\gamma_{11}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) + \gamma_{12}\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})}{\gamma_{11}}\right)$$

$$BE_2^1 = 1 + L_1\left(1 + \frac{L_1}{2}\right)\left(1 - (\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12}) - \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\right)$$

با توجه به مشابه بودن روابط برای محصول اول و دوم، فقط روابط برای محصول اول نوشته خواهد شد.

تعیین $\gamma_{11}(3)$ **و** $\gamma_{22}(3)$

برای تعیین ماتریس$\Gamma(3)$ به توان سوم ماتریس ضرایب (ϕ_1') نیاز است. سایر مراحل همانند بخش‌های قبلی است بنابراین:

$$\phi_1'^3 = \begin{bmatrix} \phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11} + \phi_{22}) & \phi_{21}(\phi_{11}^2 + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{22}^2) \\ \phi_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) & \phi_{22}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11} + 2\phi_{22}) \end{bmatrix}$$

$$BE_3^1 = 1 + 2\left(\frac{L_1}{3}\right)\left(1 + \frac{L_1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 - \left(\phi_{11}^3 + \phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11} + \phi_{22})\right) \\ -\phi_{12}(\phi_{11}^2 + \phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right) \end{pmatrix}$$

(21)

تعیین $\gamma_{11}(4)$ **و** $\gamma_{22}(4)$

هنگامی که خرده‌فروش در پیش‌بینی تقاضای دوره پیش‌زمان از روش میانگین متحرک با $P=4$ استفاده می‌کند، ماتریس $\Gamma(4)$ نیاز است. پس از تعیین$\phi_1'^4$ می‌توان$\gamma_{11}(4)$ و $\gamma_{22}(4)$ را تعیین کرد:

$$\phi_1'^4 = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11}^4 + \phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) \\ + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \end{pmatrix} & \phi_{21}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) \\ \phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) & \begin{pmatrix} \phi_{22}^4 + \phi_{21}\phi_{12}\phi_{22}(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) \\ + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}^2) \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$BE_4^1 = 1 + \left(\frac{L_1}{2}\right)\left(1 + \frac{L_1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 - \left(\phi_{11}^4 + \phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}) + \phi_{21}\phi_{12}(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)\right) \\ -\phi_{12}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right) \end{pmatrix}$$

(22)

تعیین $\gamma_{11}(5)$ **و** $\gamma_{22}(5)$

با طی مراحل قبل و با نمایش درایه (i,j) از توان Pام ماتریسϕ_1' به صورت $\phi_1'^P(i,j)$ به ازای $P=5$ خواهیم داشت:

$$\phi_1'^5 = \begin{bmatrix} \phi_1'^5(1,1) & \phi_1'^5(1,2) \\ \phi_1'^5(2,1) & \phi_1'^5(2,2) \end{bmatrix}$$

$$\phi_1'^5(1,1)=\phi_{11}^5+\phi_{21}\phi_{12}\left(4\phi_{11}^3+(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11}+2\phi_{22})+\phi_{22}^3\right)$$
$$\phi_1'^5(1,2)=\phi_{21}\left(\phi_{11}(\phi_{11}+\phi_{22})(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)\right.$$
$$\left.+\phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{22}(3\phi_{22}+2\phi_{11})+(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{11}^2)\right)+\phi_{22}^4\right)$$
$$\phi_1'^5(2,1)=\phi_{12}\left(\phi_{22}(\phi_{11}+\phi_{22})(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)\right.$$
$$\left.+\phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{11}(3\phi_{11}+2\phi_{22})+(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)\right)+\phi_{11}^4\right)$$
$$\phi_1'^5(2,2)=\phi_{22}^5+\phi_{21}\phi_{12}\left(4\phi_{22}^3+(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{22}+2\phi_{11})+\phi_{11}^3\right)$$

در نتیجه رابطه اثر شلاقی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$BE_5^1=1+2\left(\frac{L_1}{5}\right)\left(1+\frac{L_1}{5}\right)\begin{pmatrix}1-\left(\phi_{11}^5+\phi_{21}\phi_{12}\left(4\phi_{11}^3+(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11}+2\phi_{22})+\phi_{22}^3\right)\right)- \\ \phi_{12}\begin{pmatrix}\phi_{22}(\phi_{11}+\phi_{22})(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)+ \\ \phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{11}(3\phi_{11}+2\phi_{22})+(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)\right)+\phi_{11}^4\end{pmatrix}\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\end{pmatrix} \quad (23)$$

به همین صورت می‌توان محاسبات را برای پیش‌بینی تقاضای دوره پیش‌زمان به روش میانگین متحرک به ازای تعداد دوره‌های آخر بیشتر ادامه داد.

اگر توان Pام ماتریس ϕ_1' نمایش دهیم:

$$\phi_1'^p=\begin{bmatrix}\phi_1'^p(1,1) & \phi_1'^p(1,2)\\ \phi_1'^p(2,1) & \phi_1'^p(2,2)\end{bmatrix}$$

با توجه به روابط به دست آمده مشخص می‌شود که می‌توان روابط اثر شلاقی را در قالب کلی زیر قرار داد:

$$BE_{p_1}^1=1+2\left(\frac{L_1}{p_1}\right)\left(1+\frac{L_1}{p_1}\right)\left(1-\phi_1'^{p_1}(1,1)-\phi_1'^{p_1}(2,1)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\right)\right) \quad (24)$$

$$BE_{p_2}^2=1+2\left(\frac{L_2}{p_2}\right)\left(1+\frac{L_2}{p_2}\right)\left(1-\phi_1'^{p_2}(2,2)-\phi_1'^{p_2}(1,2)\left(\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}\right)\right) \quad (25)$$

وجود اثر شلاقی

رابطه 17 بار دیگر در نظر گرفته می‌شود، از نظر ریاضی و با توجه به مقادیر مختلف $\gamma_{ii}(P_i)$ که در بخش‌های قبلی به دست آمد، می‌توان ثابت کرد که برای هر یک از محصولات (i=1,2) رابطه زیر برقرار است:

$$\gamma_{ii}(p_i)\le\gamma_{ii} \quad (26)$$

از این رو می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}}\le 1$$
$$1-\frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}}\ge 0$$

با توجه به اینکه مقادیر L_i و Pi مثبت هستند، نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{L_i}{p_i}\right)\left(1+\frac{L_i}{p_i}\right)\left(1-\frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}}\right)\ge 0$$

بنابراین می‌توان دریافت که یک زنجیره تأمین دو محصولی (مبتنی بر مفروضات مساله) همواره دستخوش اثر شلاقی است. در شرایط استفاده از داده‌های مربوط به دوره‌های بسیار زیاد در پیش‌بینی به روش میانگین متحرک، اثر شلاقی از زنجیره تأمین حذف خواهد شد (BE=1):

$$\lim_{p\to\infty}BE=1$$

در نتیجه می‌توان گفت:

اثر شلاقی در زنجیره‌های تأمین دومحصولی مبتنی بر مفروضات مسئله، تابعی نزولی از تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی تقاضای پیش‌زمان به روش میانگین متحرک است و بنابراین با افزایش آن می‌توان اثر شلاقی را کاهش داد.

ارتباط اثر شلاقی با پیش‌زمان

طبق مطالب گفته‌شده می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial BE_{p_i}^i}{\partial L_i}=2\left(\frac{1}{p_i}\right)\left(1+\frac{2L_i}{p_i}\right)\left(1-\frac{\gamma_{ii}(p_i)}{\gamma_{ii}}\right) \quad (27)$$

با توجه به مثبت بودن L_i و P_i نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial BE_{p_i}^i}{\partial L_i}\ge 0$$

از این رو می‌توان گفت: در زنجیره تأمین دومحصولی مبتنی بر مفروضات مسئله، اثر شلاقی تابعی صعودی از پیش‌زمان است و بنابراین با کاهش آن می‌توان اثر شلاقی را کاهش داد.

مطالب مطرح‌شده تا کنون، مربوط به زنجیره تأمین دو مرحله‌ای بوده است. در ادامه به مبحثی جدید در مدیریت زنجیره تأمین یعنی اندازه‌گیری اثر شلاقی در زنجیره تأمین سه مرحله‌ای با دو محصول خواهیم پرداخت.

محاسبه مقدار اثرشلاقی برای زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای

در زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای با توجه به وجود دو حلقه، سفارش‌های رسیده از حلقه اول به منزله تقاضا برای حلقه دوم است؛ از همین اصل برای به دست آوردن اثر پدیده شلاقی در زنجیره‌های تأمین سه‌مرحله‌ای استفاده شده است، بر اساس اصل گفته‌شده و محاسبات انجام‌شده در بخش‌های قبلی، می‌توان اثر شلاقی را در اینگونه از زنجیره‌های تأمین دو محصولی به این ترتیب محاسبه کرد:

$$BE = 1+2\left(\frac{L}{p}\right)\left(1+\frac{L}{p}\right)\left(1-\frac{\gamma(p)}{(1+\frac{L}{p})^2\gamma+(\frac{L}{p})^2\gamma-2(1+\frac{L}{p})(\frac{L}{p})\gamma(p)}\right) \quad (28)$$

که به تفکیک به ازای محصولات مختلف وPهای مختلف به این صورت است:

$$BE_{p_i}^{i} = 1+2\left(\frac{L_i}{p_i}\right)\left(1+\frac{L_i}{p_i}\right)\left(1-\frac{\gamma_{ii}(p_i)}{(1+\frac{L}{p})^2\gamma_{ii}+(\frac{L}{p})^2\gamma_{ii}-2(1+\frac{L}{p})(\frac{L}{p})\gamma_{ii}(p_i))}\right) \quad (29)$$

برای مثال به ازای P=1 برای محصول اول می‌توان نوشت:

$$BE_1^1 = 1+2L_1(1+L_1)\left(1-\phi_{11}-\phi_{12}\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+L_1)^2\gamma_{11}+(L_1)^2\gamma_{11}-2(1+L_1)(L_1)(\gamma_{11}\phi_{11}+\gamma_{12}\phi_{12})}\right) \quad (30)$$

و به ازای P=1 به ازای محصول دوم می‌توان نوشت:

$$BE_1^2 = 1+2L_2(1+L_2)\left(1-\phi_{22}-\phi_{21}\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+L_2)^2\gamma_{22}+(L_2)^2\gamma_{22}-2(1+L_2)(L_2)(\gamma_{12}\phi_{21}+\gamma_{22}\phi_{22})}\right) \quad (31)$$

به همین ترتیب به ازای Pها و محصولات مختلف می‌توان نوشت:

$$BE_2^1 = 1+L_1\left(1+\frac{L_1}{2}\right)\left(1-\left(\phi_{11}^2+\phi_{21}\phi_{12}\right)-\phi_{12}(\phi_{11}+\phi_{22})\right. \quad (32)$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L}{2})^2\gamma_{11}+(\frac{L}{2})^2\gamma_{11}-2(1+\frac{L}{2})(\frac{L}{2})\gamma_{11}(\phi_{11}^2+\phi_{21}\phi_{12})+\gamma_{12}\phi_{12}(\phi_{11}+\phi_{22})}\right)$$

$$BE_2^2 = 1+L_2\left(1+\frac{L_2}{2}\right)\left(1-\left(\phi_{22}^2+\phi_{21}\phi_{12}\right)-\phi_{21}(\phi_{11}+\phi_{22})\right. \quad (33)$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L_2}{2})^2\gamma_{22}+(\frac{L_2}{2})^2\gamma_{22}-2(1+\frac{L_2}{2})(\frac{L_2}{2})(\gamma_{12}\phi_{21}(\phi_{11}+\phi_{22})+\gamma_{22}(\phi_{22}^2+\phi_{21}\phi_{12}))}\right)$$

(34)

$$BE_3^1 = 1+2\left(\frac{L_1}{3}\right)\left(1+\frac{L_1}{3}\right)\left(\begin{array}{l}1-\left(\phi_{11}^3+\phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11}+\phi_{22})\right)\\ -\phi_{12}(\phi_{11}^2+\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)\end{array}\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L_1}{3})^2\gamma_{11}+(\frac{L_1}{3})^2\gamma_{11}-2(1+\frac{L_1}{3})(\frac{L_1}{3})}\right.$$

$$\left.\frac{}{((\phi_{11}^3+\phi_{21}\phi_{12}(2\phi_{11}+\phi_{22}))\gamma_{11}+\phi_{12}(\phi_{11}^2+\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2)\gamma_{12})}\right)$$

$$BE_3^2 = 1+2\left(\frac{L_2}{3}\right)\left(1+\frac{L_2}{3}\right)\left(\begin{array}{l}1-\left(\phi_{22}^3+\phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}+2\phi_{22})\right)\\ -\phi_{21}\left(\phi_{11}^2+\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{22}^2\right)\end{array}\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L_2}{3})^2\gamma_{22}+(\frac{L_2}{3})^2\gamma_{22}-2(1+\frac{L_2}{3})(\frac{L_2}{3})}\right. \quad (35)$$

$$\left.\frac{}{(\phi_{21}(\phi_{11}^2+\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{22}^2)\gamma_{12}+(\phi_{22}^3+\phi_{21}\phi_{12}(\phi_{11}+2\phi_{22}))\gamma_{22})}\right)$$

$$BE_4^1 = 1+\left(\frac{L_1}{2}\right)\left(1+\frac{L_1}{4}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}1-\left(\phi_{11}^4+\phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11}+2\phi_{22})+\phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)\right)\\ -\phi_{12}(\phi_{11}+\phi_{22})\left(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)\end{array}\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L_1}{4})^2\gamma_{11}+(\frac{L_1}{4})^2\gamma_{11}-2(1+\frac{L_1}{4})(\frac{L_1}{4})(\left(\begin{array}{l}\phi_{11}^4+\phi_{11}\phi_{21}\phi_{12}(3\phi_{11}+2\phi_{22})\\ +\phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)\end{array}\right)\gamma_{11}}\right.$$

$$\left.\frac{}{+\phi_{12}(\phi_{11}+\phi_{22})\left(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)\gamma_{12})}\right) \quad (36)$$

$$BE_4^2 = 1+\left(\frac{L_2}{2}\right)\left(1+\frac{L_2}{4}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}1-\phi_{22}^4+\phi_{21}\phi_{12}\phi_{22}(3\phi_{22}+2\phi_{11})+\phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{11}^2\right)\\ -\phi_{21}(\phi_{11}+\phi_{22})\left(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)\end{array}\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L_2}{4})^2\gamma_{22}+(\frac{L_2}{4})^2\gamma_{22}-2(1+\frac{L_2}{4})(\frac{L_2}{4})(\phi_{21}(\phi_{11}+\phi_{22})\left(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)\gamma_{12}}\right.$$

$$\left.\frac{}{+\left(\begin{array}{l}\phi_{22}^4+\phi_{21}\phi_{12}\phi_{22}(3\phi_{22}+2\phi_{11})\\ +\phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{11}^2\right)\end{array}\right)\gamma_{22})}\right) \quad (37)$$

$$BE_5^1 = 1+2\left(\frac{L_1}{5}\right)\left(1+\frac{L_1}{5}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}1-\left(\phi_{11}^5+\phi_{21}\phi_{12}\left(4\phi_{11}^3+(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11}+2\phi_{22})+\phi_{22}^3\right)\right)-\\ \phi_{12}\left(\begin{array}{l}\phi_{22}(\phi_{11}+\phi_{22})\left(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)+\\ \phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{11}(3\phi_{11}+2\phi_{22})+\left(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)\right)+\phi_{11}^4\end{array}\right)\end{array}\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L_1}{5})^2\gamma_{11}+(\frac{L_1}{5})^2\gamma_{11}-2(1+\frac{L_1}{5})(\frac{L_1}{5})(}\right.$$

$$\frac{}{(\phi_{11}^5+\phi_{21}\phi_{12}\left(4\phi_{11}^3+(\phi_{11}\phi_{22}+\phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{11}+2\phi_{22})+\phi_{22}^3\right))\gamma_{11}+}$$

$$\frac{}{(\phi_{21}\left(\phi_{11}(\phi_{11}+\phi_{22})\left(\phi_{11}^2+2\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{22}^2\right)+\phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{22}(3\phi_{22}\right.\right.} \quad (38)$$

$$\left.\frac{}{+\left(\phi_{21}\phi_{12}+\phi_{11}^2\right)\right)+\phi_{22}^4))\gamma_{12})}\right)$$

$$BE_5^2 = 1 + 2\left(\frac{L_2}{5}\right)\left(1 + \frac{L_2}{5}\right)$$

$$\left(1 - \left(\phi_{22}^5 + \phi_{21}\phi_{12}\left(4\phi_{22}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} + \phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + \phi_{11}^3\right)\right) - \phi_{21}\begin{pmatrix} \phi_{11}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \\ \phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{22}(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + (\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{11}^2)\right) + \phi_{22}^4 \end{pmatrix}\right.$$

$$\left(\frac{\gamma_{12}}{(1+\frac{L_2}{5})^2\gamma_{22} + (\frac{L_2}{5})^2\gamma_{22} - 2(1+\frac{L_2}{5})(\frac{L_2}{5})(\right.$$

$$\frac{}{(\phi_{12}\left(\phi_{22}(\phi_{11} + \phi_{22})(\phi_{11}^2 + 2\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2) + \phi_{21}\phi_{12}\left(\phi_{11}(3\phi_{11} + 2\phi_{22}\right)\right.}$$

$$\frac{}{+\left(\phi_{21}\phi_{12} + \phi_{22}^2\right)\right) + \phi_{11}^4)\,\gamma_{12} + (\phi_{22}^5 + \phi_{21}\phi_{12}\left(4\phi_{22}^3 + (\phi_{11}\phi_{22} +\right.}$$

$$\left.\left.\frac{}{\phi_{21}\phi_{12})(3\phi_{22} + 2\phi_{11}) + \phi_{11}^3))\,\gamma_{22})}\right)\right) \tag{39}$$

اندازه‌گیری اثر شلاقی به صورت مطالعه موردی

برای بررسی اعتبار فرمول‌های به دست آمده و تحلیل رفتار اثر شلاقی در زنجیره‌های تأمین سه مرحله-ای، بر اساس تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی و پیش‌زمان تحویل سفارش‌ها در روش پیش‌بینی میانگین متحرک، به ارائه یک مطالعه موردی خواهیم پرداخت. به همین منظور از داده‌های مربوط به یکی از کارخانجات زیر مجموعه وزارت نیرو که در زنجیره تأمین ترانسفورماتورهای برق قرار دارد، استفاده شده است. این کارخانه اطلاعات مربوط به پیش‌بینی با روش میانگین متحرک برای یک و دو دوره را در اختیار دارد. فرآیند برداری تقاضای محصول1 و محصول2 در این زنجیره تأمین به این صورت است:

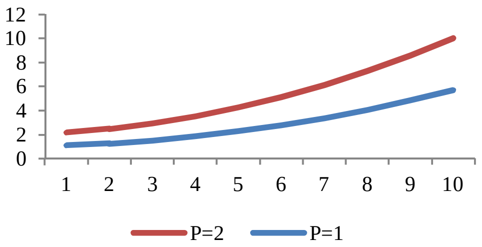
$$\begin{cases} D_t^1 = 0.5\,D_{t-1}^1 + 0.2D_{t-1}^2 \\ D_t^2 = 0.6D_{t-1}^1 + 0.7D_{t-1}^2 \end{cases}$$

با بررسی شرط ایستایی فرآیند، به این نتیجه می-رسیم که فرآیند، ایستا است، بنابراین می‌تواند به عنوان مطالعه موردی برای این مقاله مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به اینکه در این شرکت فقط از اطلاعات یک یا دو دوره قبل استفاده می‌شد، بنابراین برای بررسی درستی و نادرستی فرمول‌های به دست آمده P=2 , P=1 در نظر گرفته شد. اگر فرمول زیر را برای خطا در نظر بگیریم:

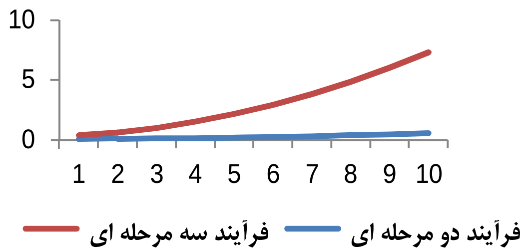
$$e_{ij}^k = \left(BE_{ij}^k\right)^{math} - \left(BE_{ij}^k\right)^{sim} \tag{40}$$

مقایسه نتایج به دست آمده با واقعیت با استفاده از فرمول (40) نشان‌دهنده متوسط خطای 0/005 در حالت‌های مختلف است که می‌توان نتیجه گرفت که مدل با یک خطای قابل اغماضی درست عمل می‌کند.

با اندازه‌گیری مقدار اثر شلاقی در این شرکت بر اساس فرمول‌های بالا نتایج جالبی به دست آمد که از آن جمله می‌توان به شکل‌های زیر اشاره کرد:



شکل1: محاسبه اثر شلاق برای محصول دوم بر حسب پیش زمان در تعداد دوره‌های پیش بینی مختلف (P)



شکل 2 : مقایسه اثر شلاقی محصول دوم در فرآیند دومرحله‌ای و سه‌مرحله‌ای بر اساس L برای P.

با بررسی شکل‌ها و نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که با تعیین بهینه تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی، یعنی با افزایش دقت پیش‌بینی، می‌توان اثر پدیده شلاقی را کاهش داد. همچنین با بررسی نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش تعداد مراحل در زنجیره تأمین مقدار، اثر پدیده شلاقی به مقدار قابل توجهی افزایش می‌یابد. بنابراین می‌توان با کاهش تعداد مراحل در زنجیره‌های تأمین تا حد قابل توجهی از میزان اثر پدیده شلاقی کاست. برای بررسی درستی و نادرستی فرمول‌های به دست آمده، علاوه بر مقایسه با واقعیت، با شبیه‌سازی زنجیره در 12000 بار اجرا و محاسبه واریانس سفارش و تقاضا و محاسبه خطا، اختلاف

قابل اغماضی بین مدل ریاضی و شبیه‌سازی به دست آمده است. اگر فرمول زیر را برای خطا در نظر بگیریم:

$$e_{ij}^{k} = \left(BE_{ij}^{k}\right)^{math} - \left(BE_{ij}^{k}\right)^{sim}$$

i نشان‌دهنده پیش‌زمان مورد نیاز و j تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی و k نشان‌دهنده محصول است، در این صورت برای مثال برای i=2,j=4,k=1

$$e_{24}^{1} = \left(BE_{24}^{1}\right)^{math} - \left(BE_{24}^{1}\right)^{sim} = 1.251 - 1.248 = 0.003$$

به همین ترتیب برای سایر موارد هم می‌توان آزمایش کرد. در نتیجه خطا در حد قابل قبول و قابل اغماض است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از مدل سری‌های زمانی میزان تقاضا، محصولات همبسته در مدت زمان تحویل کالا پیش‌بینی شده و مقدار پدیده اثر شلاقی، با در نظر گرفتن یک سری مفروضات، بر اساس عوامل طول مدت پیش-زمان و تعداد دوره‌های مورد استفاده برای پیش‌بینی در روش میانگین متحرک به دست آمده است که نتایج حاصله نشان می‌دهد که با تعیین بهینه تعداد دوره‌های مورد استفاده در پیش‌بینی در روش میانگین متحرک و کاهش پیش‌زمان، می‌توان اثر پدیده شلاقی را کاهش داد. برای تأیید درستی فرمول‌های به دست آمده، نتایج حاصل از محاسبات ریاضی با اعداد حاصل از واقعیت و همچنین اعداد حاصل از شبیه‌سازی مقایسه شده است که با توجه به میزان بسیار کم خطا می‌توان درستی فرمول‌های به دست آمده را تأیید کرد. با توجه به اهمیت مدیریت زنجیره تأمین، نیاز به استفاده از معیاری برای ارزیابی میزان کارآیی اقدام‌های انجام گرفته در آن ضروری است. این مقاله، معیار مورد نظر را برای این ارزیابی در اختیار قرار می‌دهد و می‌تواند برای اولویت‌بندی پروژه‌های بهبود تعریف‌شده در زنجیره تأمین، مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به مفروضات در نظر گرفته شده نظیر تعداد مراحل و روش پیش‌بینی، می‌توان در مطالعات آینده مدل‌هایی را در نظر گرفت که تعداد مراحل بیشتر و روش‌های پیش-بینی متفاوتی را در نظر بگیرند و به واقعیت نزدیکتر باشند.

مراجع

1- Chen,F., Drezner, Z., Ryan, J.K. and Smith-Levi (2000). “Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: The impact of forecasting, lead times and informatio.” *Management Science*, 46, PP. 436-443.

2- Zhang, S. and Wang, M. (2005). “Delayed demand information and dampened bullwhip effect.” *Operations Research Letters*, 33, 289-294.

3- Makui, A. and Madadi, A. (2007). “The bullwhip effect and Lyapunov exponent.” *Applied Mathematics and Computation*, 189, PP. 35-40.

4- Kim, J.G., Chatfield, D., Harrison, T.P. and Hayya, J.C. (2006). “Quantifying the bullwhip effect in supply chain with stochastic lead time.” *European Journal of the Operational Research*, Vol. 173, 617-636.

5- Jaksic, M. and Rusjan, B., “The effect of replenishment policies on the bullwhip effect: A transfer function approach.” *European Journal of Operational Research*, Vol. 184, 946-961.

6- Duc, H.T.T., Luong, H.T. and Kim, Y.D.A. (2008). “Measure of bullwhip effect in supply chains with a mixed autoregressive-moving average demand process.” *European Journal of Operational Research*, 187, 243-256.

7- Gilbert,K.C. and Chatpattananan,V. (2006). “An ARIMA supply chain model with a generalized ordering policy.” *Journal of Modeling in Management*, 1, 33-51.

8- Dejonckheere,J., Disney, S.M., Lambrecht, M.R. and Towill, D.R. (2003). “Measuring and avoiding the bullwhip effect: A control theoretic approach.” *European Journal of Operational Research*, 147.Vol. 147, 567-590.

9- Hayya, J.C., Kim, J.G., Disney, S.M., Harrison, T.P. and Chatfield, D. (2006). “Estimation in supply chain inventory management.” *International Journal of Production Research*, Vol. 44, 1313-1330.

10- Gaalman, G. and Disney,S.M. (2005). “Investigation of an order-up-to policy with conditional forecasting and arbitrary lead-times.” Budapest, Hungary : EurOMA International Conference on Operations and Global Competitiveness, 19-22.

11- Gaalman, G. and Disney, S.D. (2007). “On bullwhip in a family of order up to policies with ARMA (2،2) demand and arbitrary lead-time.” *International Journal of Production Economics*.

12- Luong, H.T. and Phien, N.H. (2007). “Measure of bullwhip effect in supply chains with autoregressive demand process.” *European Journal of Operational Research*, 2007, Vol. 183, PP. 1086-1097, 197-209.

13- Disney, S.M. and Towill, D.R. (2003). “Vendor-managed inventory and bullwhip reduction in a two-level supply chain.” *International Journal Operation & Production Management*, PP. 625-661.

14- Hosoda, T. and Disney, S.M. (2006). “On variance amplification in a three-echelon supply chain with minimum mean square error forecasting.” *Omega*, 34, PP. 344-358.

15- Pujawan, I.N. (2004). “The effect of lot sizing on order variability.” *European Journal of Operation Research*, 159, PP. 617-635.

16- Krishnamoorthy, A., Ingalls, R.G. and Foote, B.L. (2005). “Reducing the bullwhip effect in supply chains with control-based forecasting.” *International Journal of Simulation & Process Modeling*, Vol. 1, 90-110.

17- Chandra, C. and Grabis, J. (2005). “Application of multi-steps forecasting for restraining the bullwhip effect and improving inventory performance under autoregressive demand.” *European Journal of Operational Researcha*, Vol. 166, 337-350.

18- Disney, S.M. and Grubbstrom, R.W. (2004). “Economic consequence of a production and inventory control policy.” *International Journal of Production Research*, Vol. 42, 3149-3431.

19- Disney, S.M. and Towill, D.R. (2006). “A methodology for benchmarking replenishment-induced bullwhip.” *Supply Chain Management: An International Journal*, Vol. 11, 160-168.

20- Xu, K., Dong,Y. and Evers, P.T. (2001). “Towards better coordination of the supply chain.” *Transportation Research*, Vol. .Part E 37. 35-54.

21- Kelepouris, T., Miliotis, P. and Pramatari, K. (2008). “The impact of replenishment parameters and information sharing on the bullwhip effect: A computational study.” *Computers & Operations Research*, Vol. 35, 3657-3670.

22- Kleijnen, J.P.C. and Smits, M.T. (2003). “ Performance metrics in supply chain management.” *Journal of the Operational Research Society*, 54, PP. 507-514.

23- Dhahri, I. and Chabchoub, H. (2007). “Nonlinear goal programming models quantifying the bullwhip effect in supply chain based on ARIMA parameters.” *European Journal of Operation Research*, 177, PP. 1800-1810.

24- Su, C.T. and Wong, J.T. (2008). “ Design of a replenishment system for a stochastic dynamic production/forecast lot-sizing problem under bullwhip effect.” *Expert Systems with Applications*, 34, PP. 173-180.

25- Chen, Li. and Lee, H.L. (2009). “Information sharing and order variability control under a generalized demand model.” *Management Science*, Vol. 55(5), 781–797.

26- Chen, Li. and Lee, H.L. (2011). “Bullwhip Effect Measurement and Its Implications.” Manufacturing, Service, and Supply Chain Operations.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1- Bullwhip phenomenon effect
2- Statistical Approach
3- Z Transform Approach
4- Periodic Reordering System
5- Fixed Order System
6- Vector Auto-Regression
7- Order Up To Policy: OUT