

## چند روش برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری به کمک مجموعه مشترک وزن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها

صابر ساعتی\*<sup>۱</sup>، علیرضا شایسته<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال

<sup>۲</sup> دانشکده علوم پایه و کشاورزی، دانشگاه پیام نور مرکز تهران

رسید مقاله: ۳ شهریور ۱۳۹۰

پذیرش مقاله: ۱ دی ۱۳۹۰

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها اطلاعات زیادی در مورد واحدهای تصمیم‌گیری کارا ارائه نمی‌دهد. یکی از روش‌ها برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری کارا استفاده از مجموعه مشترک وزن‌ها است. در این مقاله به منظور رتبه‌بندی واحدهای کارا چند روش ساده جهت تعیین مجموعه مشترک وزن‌ها ارائه شده است. در این روش‌ها، مجموعه مشترک وزن‌ها با استفاده از نتایج مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها حاصل می‌شود. بر خلاف بسیاری از روش‌ها، بدون حذف و گرد کردن وزن‌ها و دخالت دادن تمام وزن‌ها در محاسبات، مجموعه مشترک وزن‌ها تعیین می‌شود.

**کلمات کلیدی:** رتبه‌بندی، کارایی، مجموعه مشترک وزن‌ها، واحد تصمیم‌گیری، تحلیل پوششی داده‌ها.

### ۱ مقدمه

اندازه‌گیری کارایی به خاطر اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک شرکت یا سازمان یا هر واحد تصمیم‌گیری (DMU) مورد توجه محققین قرار داشته است. اولین بار در سال ۱۹۵۷ فارل برای اندازه‌گیری کارایی، مدل خود را با دو ورودی و یک خروجی طراحی کرد [۱] که به دلیل محدود بودن ورودی و خروجی مدل موفق نبود. در سال ۱۹۷۸، Cooper، Charnes و Rhodes در مقاله‌ای مدل CCR را ارائه کردند [۲] که هدف این مدل اندازه‌گیری و مقایسه کارایی نسبی واحدهای سازمانی بود که دارای چندین ورودی و خروجی هستند که این مزیت بزرگی نسبت به مدل فارل بود.

مهم‌ترین مساله، تحلیل و رتبه‌بندی واحدهای کارا بود که دارای کارایی یکسان بودند. Andersen و Petersen در سال ۱۹۹۳، روش AP را ارائه کردند [۳] که با وجود نارسایی در بعضی از موارد روش‌های دیگری ارائه شد.

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: s\_saatim@iau-tnb.ac.ir

ساعتی و بنگاه پذیرش برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری بنگاه. مجموعه مشترک وزن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها

دو روش دیگر نیز برای رتبه‌بندی واحدهای کارا توسط جهانشاهلو، علیرضایی و محرابیان [۴] و سپس روش کامل‌تر توسط ساعتی و همکاران [۵] ارائه شد. دسته دیگری از روش‌های رتبه‌بندی، بر مبنای محدود کردن وزن‌ها می‌باشد. اگر برای وزن‌های ورودی و خروجی، کران بالا و پایین را طوری در نظر بگیریم که تغییرات وزن‌ها با کمترین مقدار و نهایتاً به یک عدد محدود شود، مجموعه مشترک وزن‌ها CSW به دست می‌آید. در بسیاری از روش‌های یافتن مجموعه مشترک وزن‌ها، ابتدا کران بالا و پایین وزن‌های ورودی و خروجی را پیدا می‌کنیم و سپس مجموعه مشترک وزن‌ها را پیدا می‌کنیم. در بعضی از روش‌ها کران بالا را با گرد کردن و حذف بیشترین وزن و کران پایین را با حذف وزن‌های صفر و گرد کردن کوچکترین وزن به دست می‌آورند [۶].

در این مقاله، به روش‌های نوین رتبه‌بندی واحدهای کارا به کمک مجموعه مشترک وزن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در این روش‌ها، با محدود کردن کران وزن‌ها و رسیدن به وزن مشترک از بین مجموعه وزن‌ها، می‌توان به کارائی واقعی تری رسید.

ساختار این مقاله به این شکل است که، بعد از تعاریف اولیه، در بخش ۳ روش‌های پیشنهادی و در بخش ۴ چند مثال عددی و سپس در بخش انتهایی، نتیجه‌گیری و جداول آورده می‌شود.

## ۲ تعاریف اولیه

در این بخش بعضی از تعاریف اساسی مورد نیاز مطرح می‌گردند.

**تعریف ۱.** کارایی یک واحد تصمیم‌گیری به صورت نسبت خروجی بر ورودی تعریف می‌شود. در حالتی که یک واحد تصمیم‌گیری چندین ورودی را برای تولید چندین خروجی مصرف می‌کنند کارایی به صورت:

$$e_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad \forall j$$

تعریف می‌شود که در این رابطه،  $e_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) کارایی  $DMU_j$ ،  $y_{rj}$  ( $r = 1, \dots, s$ ) خروجی  $r$  ام،  $x_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ورودی  $i$  ام،  $u_r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) وزن خروجی  $r$  ام و  $v_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) وزن ورودی  $i$  ام می‌باشد.

**تعریف ۲.** چارنز، کوپر و رودز بر اساس تعریف کارایی، مدل مضربی CCR را به شکل ذیل تعریف کردند [۲]:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rp} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad \forall j, \\ & u_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, i. \end{aligned} \quad (1)$$

اصلاح روش CCR در سال ۱۹۷۹ توسط چارنر، کوپر و رودز انجام شد [۷] و متغیرهای وزن  $u_r$  و  $v_i$  بزرگتر از صفر در نظر گرفته شدند تا در نامساوی فوق دیگر وزن‌ها مساوی صفر نشوند. برای این که مساله از حالت خطی خارج نشود، وزن‌ها را بزرگتر یا مساوی یک عدد غیر ارشمیدسی مثبت  $\epsilon$  در نظر گرفتند.

### ۳ روش‌های پیشنهادی

در تحلیل پوششی داده‌ها بعد از ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری با مدل CCR، رتبه‌بندی واحدهای کارا با روش‌های متعددی انجام می‌شود. در روش‌های پیشنهادی این مقاله، بدون نیاز به حل مدل جدیدی، تنها با استفاده از مدل CCR و نتایج آن، روش‌های نوینی بدون محاسبات پیچیده ارائه می‌شود. این مهم‌ترین ویژگی این روش‌ها می‌باشد که باعث تمایز این روش‌ها از روش‌های دیگر می‌باشد.

#### ۳-۱ روش وزن مشخصه برای دستیابی به بهترین واحد کارا

برای دستیابی به یک وزن مشترک از مجموعه وزن‌های ورودی و خروجی باید به رابطه منطقی بین وزن‌ها رسید. در این روش بر خلاف روش‌های دیگر کارایی واحدها به عنوان عامل برتری یک وزن نسبت به وزن دیگر می‌باشد.

در مرحله اول، وزن‌ها و کارایی تمام واحدهای تصمیم‌گیری را با مدل CCR به دست می‌آوریم. در مرحله دوم مجموعه وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها را که در مرحله اول با مدل CCR به دست آوردیم مورد بررسی قرار داده و مجموعه مشترک وزن‌های ورودی را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$v_i^* = \frac{\sum_{j=1}^n v_{ij} e_j}{\sum_{j=1}^n e_j} \quad \forall i$$

که در آن،  $v_i^* (i = 1, \dots, m)$  وزن‌های مشخصه ورودی و  $v_{ij} (i = 1, \dots, m)$  وزن ورودی  $i$  ام متعلق به  $DMU_j$  و  $e_j (j = 1, \dots, n)$  کارایی  $DMU_j$  می‌باشد که از مدل (۱) به دست آمده است. در این روش وزن مشخصه، یک میانگین از وزن‌های ورودی می‌باشد که سهم هر وزن در این نسبت به میزان کارایی می‌باشد. در

نتیجه هر وزن که متناظر با کارایی بیشتری باشد اثر بیشتری در وزن مشخصه خواهد داشت. به طور مشابه، مجموعه وزن مشترک خروجی ها را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$u_r^* = \frac{\sum_{j=1}^n u_{rj} e_j}{\sum_{j=1}^n e_j} \quad \forall r$$

که در آن،  $u_r^*$  ( $r = 1, \dots, m$ ) وزن مشخصه خروجی،  $u_{rj}$  ( $r = 1, \dots, m$ ) وزن خروجی  $r$  ام متعلق به  $DMU_j$  و  $e_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) کارایی  $DMU_j$  می باشد. در وزن مشخصه خروجی ها نیز نسبت تشکیل یافته به میزان کارایی بستگی دارد.

مزایای این روش این است که بدون حل مدل جدیدی و با استفاده از نتایج مدل CCR، مجموعه مشترک وزن ها را به دست می آوریم. مجموعه مشترک وزن ها در این روش، تناسب مناسبی را از عوامل وزن و کارایی در نظر می گیرد. در این روش نه از وزنی صرف نظر و نه گرد می شود بلکه یک وزن مشترک با نزدیک ترین ویژگی به تمام واحدها در نظر گرفته می شود. بعد از این که مجموعه مشترک وزن ها را به دست آوردیم، باید کارایی واحدهای تصمیم گیری را توسط رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$e_j^* = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}} \quad \forall j$$

که در این رابطه،  $e_j^*$  ( $j = 1, \dots, n$ ) کارایی مشخصه  $DMU_j$  می باشد. بعد از محاسبه کارایی مشخصه واحدهای تصمیم گیری، رتبه بندی واحدها تغییر کرده و تنها یک واحد به عنوان بهترین واحد کارا انتخاب می شود.

### ۲-۳ روش نماینده وزن ها در فاصله های مساوی

برای دستیابی به مجموعه مشترک وزن ها بهتر است که در مرحله اول با کران دار کردن و ایجاد محدودیت برای وزن ها راه را برای پیدا کردن وزن مشترک هموار کرد. در این روش، برای مجموعه وزن های ورودی و خروجی، کران های بالا و پایین را با روش تقسیم فاصله وزنی محاسبه می کنیم و سپس با دو روش به دو مجموعه مشترک وزن ها می رسیم. برای دستیابی به کران بالا و پایین مجموعه وزن ها، روش های متعددی وجود دارد که در بعضی از آن ها حذف و گرد کردن وزن ها انجام می شود که به دلیل چشم پوشی از بعضی از وزن ها، روش های مناسبی نیستند [۸]. در روش تقسیم فاصله وزنی، به جای حذف و گرد کردن وزن ها، وزنهایی که به هم نزدیک هستند با هم در یک زیر بازه قرار می گیرند، میانگین این زیر بازه، دارای مقداری بسیار نزدیک به تمام اعضای این زیر بازه است. میانگین این زیر بازه ها جایگزین مناسبی برای اعضای این زیر بازه است، پس وزن ها محدودتر

شدند بدون این که حذف و گرد شوند. با توجه به این که تعداد وزن‌ها به ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیری بستگی دارد، با افزایش تعداد واحدهای تصمیم‌گیری، به تناسب، مجموعه وزن‌ها نیز افزایش پیدا می‌کنند.

در روش تقسیم فاصله وزنی مراحل زیر طی می‌شود:

۱- هدف ما در این مرحله، تقسیم فاصله بین کران بالا و پایین است و وزن‌ها در این تقسیمات دخالتی ندارند. روش تقسیم فاصله وزنی از شکل یک ماتریس گرفته شده است که تعداد سطرها با تعداد واحدهای تصمیم‌گیری و تعداد ستون‌ها، مجموع تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشد. مجموعه وزن‌هایی که از حل مدل CCR به دست آمده است را مجموعه وزن‌های ورودی و خروجی نامیده و عوامل غیر صفر وزن‌های ورودی و خروجی را از بزرگ به کوچک مرتب کرده و بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عامل غیر صفر وزن‌ها کران بالا و پایین فاصله وزنی را تشکیل می‌دهند. در ماتریس تقسیم فاصله وزنی، با توجه به این که مجموع تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها، تعداد ستون‌ها می‌باشد، این ستون‌ها را فاصله وزنی می‌نامیم. که به ازای  $m$  ورودی و  $s$  خروجی،  $(m+s)$  فاصله وزنی تشکیل می‌شود. سطرها در ماتریس تقسیم فاصله وزنی تعداد واحدهای تصمیم‌گیری می‌باشد، پس با افزایش سطرها (واحدهای تصمیم‌گیری) فاصله وزنی به تعداد بیشتری تقسیم می‌شود. پس به  $n$  زیر بازه با اندازه‌های مساوی تقسیم می‌شود و به ازای  $n$  سطر و  $(m+s)$  ستون تمام مجموعه وزن‌ها به یکی از  $n(m+s)$  زیر بازه تعلق می‌گیرند.

۲- هر فاصله وزنی شامل یک زیر بازه است که بزرگترین وزن این فاصله وزنی را شامل شده است، میانگین اعضای این زیر بازه، کران بالای این فاصله وزنی را تشکیل می‌دهد.

۳- در هر فاصله وزنی، کمترین وزن غیر صفر نیز در یک زیر بازه قرار گرفته است که میانگین اعضای این زیر بازه کران پایین این فاصله وزنی را تشکیل می‌دهد. میانگین اعضای هر زیر بازه نماینده آن زیر بازه را تشکیل می‌دهد و زیر بازه‌هایی که شامل هیچ عضوی نمی‌باشد نماینده‌ای ندارد و در محاسبات نقشی ندارد.

برای این که مساله شدنی باشد باید به رابطه‌های زیر که کران بالای وزن‌ها را محاسبه می‌کنند [۸] توجه کرد:

$$u_r^* = \frac{1}{\max\{y_{rj}\}} \quad \forall r, j \quad v_i^* = \frac{1}{\max\{x_{ij}\}} \quad \forall i, j$$

باید توجه کرد که کران پایین از  $u_r^*$  و  $v_i^*$  که تعریف شده‌اند بیشتر نباشد که در غیر اینصورت با این روش نمی‌توان مجموعه مشترک وزن‌ها را پیدا کرد.

روش نماینده وزن‌ها در فاصله‌های مساوی به دو روش دنبال می‌شود:

روش اول (میانگین کران‌ها): در این روش میانگین کران بالا و پایین وزن مشترک را تشکیل می‌دهد.

روش دوم (میانگین): میانگین تمام نماینده‌های غیر صفر زیر بازه‌ها، وزن مشترک را تشکیل می‌دهند.

در هر دو روش بالا با استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک به دست آمده کارایی جدید را مطابق تعریف کارایی به دست می‌آوریم.

مزایای این روش این است که از تعدادی وزن‌ها صرف نظر نمی‌شود و تمام وزن‌ها در کران بالا و پایین و میانگین نقش دارند و دیگر وزن‌ها گرد نمی‌شوند و ما از مجموعه وزن‌های صفر صرف نظر می‌کنیم و این دلیلش این است که انحراف ما از میانگین وزن‌ها تحت تاثیر وزن‌های صفر قرار نگیرد و در هر دو روش برخلاف روش‌های پیشنهاد شده در مقاله‌های دیگر ما به یک وزن مشترک می‌رسیم که کارایی ما را به مقدار واقعی تری می‌رساند و تمام وزن‌ها در این کران بالا و پایین و میانگین نقش دارند.

### ۳-۳ روش برترین وزن میانگین برای انتخاب بهترین واحد کارا

هدف از ارایه این روش مقایسه نتایج دو روش بالا با روش برترین وزین میانگین می‌باشد، در این روش، بدون محاسبه مجموعه مشترک وزن‌ها، با استفاده از نتایج مدل CCR، میانگین وزین شده خروجی‌ها و ورودی‌ها را محاسبه می‌کنیم و تنها واحدهای کارا را رتبه‌بندی می‌کنیم. این روش بدون محاسبات پیچیده ما را به بهترین واحد کارا می‌رساند و نشان می‌دهد که دو روش مطرح شده نیز دارای نتایج یکسان با این روش هستند و بدون محاسبه CSW نیز می‌توان بهترین واحد کارا را انتخاب کرد. در این روش با توجه به این که هدف ما رتبه‌بندی واحدهای کارا می‌باشد در ابتدا مجموعه E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E = \{ \text{مجموعه واحدهای کارا که در مدل CCR دارای کارایی یک هستند} \}$$

در این روش میانگین وزین شده خروجی‌ها و ورودی‌ها برای واحدهای کارا توسط روابط زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij}}{m}, \quad \bar{y}_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj} y_{rj}}{s} \quad \forall j \in E$$

مرحله اول) بعد از این که  $\{\bar{y}_j\}$  به ازای  $\forall j \in E$  محاسبه شد بیشترین مقدار این مجموعه را توسط رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\bar{y}_p = \max \{ \bar{y}_j \} \quad j \in E$$

اگر  $p$  منحصر به فرد بود پس  $DMU_p$  بهترین واحد کارا می‌باشد زیرا بهترین واحد بیشترین خروجی را دارد و میانگین وزین شده واحدهای کارا، نماینده خروجی هر واحد تصمیم‌گیری می‌باشد. در غیر این صورت به مرحله دوم بروید.

مرحله دوم) اگر  $p$  منحصر به فرد نبود  $\{\bar{x}_j\}$  به ازای  $\forall j \in E$  محاسبه می‌کنیم و سپس کمترین مقدار این مجموعه را محاسبه می‌کنیم.

$$F = \{ \text{مجموعه واحدهای عضو مجموعه E که دارای } \bar{y}_j \text{ یکسان هستند} \}$$

$$\bar{x}_p = \min \{ \bar{x}_j \} \quad j \in F$$

در این صورت  $DMU_{\bar{p}}$  بهترین واحد کارا است و اگر  $\bar{p}$  نیز منحصر به فرد نبود می توان این واحدها را دارای شرایط یکسان در ارزیابی کارایی دانست. در این روش بعد از به دست آوردن بهترین واحد کارا می توان بدون در نظر گرفتن این واحد، مجدداً مراحل بالا را طی کرد و به رتبه بندی واحدهای کارا پرداخت.

#### ۴ چند مثال عددی

**مثال ۱** در این مثال ۱۰ واحد تصمیم گیری با ۴ ورودی و ۳ خروجی در نظر گرفته شده است. در جدول (۱) ورودی ها و خروجی ها می باشد که از مقاله [۸] مورد استفاده قرار گرفته است. در جدول ۲ وزن های ورودی و خروجی به همراه کارایی واحدها نوشته شده است.

در جدول (۲) در ستون ۱، واحدهای تصمیم گیری، در ستون ۲ کارایی واحدهای تصمیم گیری با مدل CCR توسط رابطه (۱) و در ستون ۳ با استفاده از روش وزن مشخصه کارایی جدید واحدهای تصمیم گیری آورده شده است. سطر آخر جدول (۲) وزن مشخصه می باشد که وزن های جدید برای به دست آوردن کارایی می باشد. مجموعه وزن های  $v_1, v_2, v_3$  و  $v_4$  وزن های ورودی واحدهای تصمیم گیری می باشد که با استفاده از مدل (۱) به دست آمده اند که در ستون های ۵، ۶، ۷ و ۸ آورده شده اند. مجموعه وزن های  $u_1, u_2$  و  $u_3$  مجموعه وزن های خروجی واحدهای تصمیم گیری می باشد که با استفاده از مدل (۱) به دست آمده اند که در ستون های ۹، ۱۰ و ۱۱ آورده شده اند.

در روش وزن مشخصه  $D_p$  از بین واحدهای کارا به عنوان بهترین واحد کارا انتخاب می شود. می توان رتبه بندی تمام واحدهای کارا را نیز مشاهده کرد. همان طور که مشاهده شد، با وجود تعداد زیاد واحدهای کارا، روش وزن مشخصه قابلیت تشخیص بهترین واحد کارا را از بین هفت واحد کارا را دارد.

**مثال ۲** در این مثال با توجه به جدول های (۱) و (۲) به بررسی روش نماینده وزن ها در فاصله های مساوی می پردازیم.

در جدول (۳) تمام مجموعه وزن های ورودی و خروجی در ۷۰ زیر بازه وزنی قرار گرفته اند. مجموعه وزن های  $v_1, v_2, v_3$  و  $v_4$  و  $u_1, u_2$  و  $u_3$  توسط مدل (۱) به دست آمده است که در جدول (۲) نیز می باشد که مطابق با روش نماینده وزن ها ستون های جدول ۳ به ده قسمت تقسیم شده اند. تمام وزن های غیر صفر در این تقسیمات قرار گرفته اند.

در جدول (۴) در هر ستون میانگین اعضای هر زیر بازه در همان ستون می باشد و در هر ستون زیر بازه هایی که عضوی نداشته باشند در این روش نقشی ندارند.

در جدول (۵) نیز کران بالا و پایین نماینده وزن ها که در جدول (۴) آورده شده است در ردیف های اول و دوم آورده شده است. در ردیف های سوم میانگین کران بالا و پایین و در ردیف چهارم میانگین تمام نماینده های وزن ها آورده شده است. در جدول (۶) کارایی با روش میانگین کران ها و در جدول (۷) کارایی با روش میانگین آورده شده است.

در این روش‌ها نیز مانند روش وزن مشخصه بهترین واحد کارا از بین هفت واحد کارا،  $D_7$  می‌باشد.

**مثال ۳** در این مثال با استفاده از جداول (۱) و (۲) روش برترین وزن میانگین را بررسی می‌کنیم. در جدول (۸) در ستون اول واحدهای تصمیم‌گیری کارا (در مدل CCR) در ستون دوم کارایی واحدهای تصمیم‌گیری کارا در مدل CCR و در ستون سوم مقدار میانگین وزین شده خروجی‌ها می‌باشد که بیشترین مقدار این ستون بیانگر بهترین واحد کارا می‌باشد.

در این روش نیز  $D_7$ ، به عنوان بهترین واحد کارا انتخاب شده است. همان‌طور که مشاهده شد تمام روش‌های موجود ما را به یک واحد کارا می‌رساند.

### ۶ نتیجه‌گیری

در هر سه روش بررسی شده ما به بهترین واحد کارا از بین هفت واحد کارا نیاز داریم که در هر سه روش  $D_7$  به‌عنوان بهترین واحد کارا انتخاب شده است، که روش‌های پیشنهادی این مقاله دارای محاسبات کمتری و دقت مناسبی هستند، علت این موضوع این است که انتخاب مجموعه وزن‌های مشترک بدون حذف و گرد کردن وزن‌ها می‌باشد و انتخاب کران‌ها با در نظر گرفتن تمام وزن‌ها می‌باشد و این مجموعه وزن‌های تعریف شده این امکان را می‌دهد که تمام واحدهای تصمیم‌گیری را رتبه‌بندی و تنها یک واحد کارا داشته باشیم. روش‌های پیشنهادی بدون حل مدل جدیدی تنها با استفاده از نتایج مدل CCR ما را به بهترین واحد کارا می‌رساند.

جدول ۱. داده‌های مثال عددی

DMU	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$O_1$	$O_2$	$O_3$
D1	۱۲/۵۸	۸/۶۷	۱/۵۲	۱/۹۳	۶۶۹	۱/۷۳	۷۸
D2	۷/۵۱	۵/۵۸	۱/۱۰	۲/۴۳	۴۲۰	۲/۷۴	۹۷
D3	۸/۳۴	۳/۸۳	۱/۲۷	۲/۰۰	۱۰۳	۱/۹۸	۰
D4	۶/۷۶	۳/۸۳	۱/۳۰	۲/۷۶	۱۹۶	۱/۹۶	۸
D5	۶/۹۹	۵/۵۸	۱/۱۷	۱/۵۲	۴۴۳	۲/۱۷	۳۲
D6	۵/۷۴	۳/۸۳	۱/۰۷	۲/۳۳	۲۳۹	۲/۶۴	۰
D7	۶/۴۴	۴/۵۰	۱/۲۲	۱/۶۴	۳۴۲	۲/۲۲	۱۵
D8	۱۰/۲۳	۳/۵۸	۱/۱۰	۲/۱۲	۲۷۵	۲/۲۵	۸
D9	۵/۴۹	۳/۵۸	۱/۳۲	۱/۵۴	۲۰۲	۱/۹۲	۴۵
D10	۴/۸۸	۳/۸۳	۱/۴۵	۱/۶۱	۱۶۷	۱/۶۵	۷



جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای مدل‌ها

DMU	Efficiencies			Input Weights				Output Weights		
	CCR	CSW	روش وزن مشخصه	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
D1	۱/۰۰۰	۰/۷۱۳	۰/۶۳۴	۰/۰۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۱۲۳	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۳
D2	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۸۸۰	۰/۰۸۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۱۶۳	۰/۰۰۲	۰/۰۰۰	۰/۰۰۳
D3	۰/۸۳۴	۳/۳۵۶	۰/۵۳۰	۰/۰۰۰	۰/۰۸۴	۰/۰۰۰	۰/۳۳۸	۰/۰۰۰	۰/۴۲۱	۰/۰۰۰
D4	۰/۷۸۱	۰/۴۱۷	۰/۶۱۱	۰/۰۰۰	۰/۲۶۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۱	۰/۳۰۳	۰/۰۰۳
D5	۱/۰۰۰	۰/۷۶۶	۰/۸۲۰	۰/۰۰۸	۰/۱۶۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۰۷۶	۰/۰۰۰
D6	۱/۰۰۰	۰/۵۸۴	۰/۸۴۰	۰/۰۱۷	۰/۲۳۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۱۶۸	۰/۰۰۰
D7	۱/۰۰۰	۰/۶۵۸	۰/۸۵۰	۰/۰۱۵	۰/۲۰۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۱۴۴	۰/۰۰۰
D8	۱/۰۰۰	۰/۵۲۴	۰/۷۵۰	۰/۰۱۷	۰/۲۳۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۱۶۵	۰/۰۰۰
D9	۱/۰۰۰	۰/۶۹۸	۰/۸۰۵	۰/۰۰۰	۰/۲۴۶	۰/۰۰۰	۰/۰۷۷	۰/۰۰۰	۰/۴۲۵	۰/۰۰۴
D10	۰/۸۴۴	۰/۴۲۳	۰/۶۵۰	۰/۰۸۴	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۳۶۷	۰/۰۰۰	۰/۵۰۶	۰/۰۰۱
	وزن‌های مشخصه			۰/۰۲۸	۰/۱۴۰	۰/۰۰۰	۰/۱۰۰	۰/۰۰۱	۰/۲۱	۰/۰۰۱

جدول ۳. مجموعه وزن‌های واقع در زیر بازه‌های وزنی

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
۰/۰۰۸	۰/۲۴۶		۰/۳۳۸	۰/۰۰۲	۰/۵۰۶	۰/۰۰۴
۰/۰۸۴	۰/۲۶۱		۰/۳۶۷	۰/۰۰۲		
				۰/۰۰۲		
				۰/۰۰۲		
				۰/۰۰۲		
	۰/۲۳۵					
	۰/۲۳۱					
۰/۰۶۱	۰/۲۰۱				۰/۴۲۱	۰/۰۰۳
					۰/۴۲۵	
	۰/۱۶۹				۰/۳۰۳	
			۰/۱۶۳	۰/۰۰۱		
				۰/۰۰۱		
			۰/۱۲۳		۰/۱۶۸	
					۰/۱۶۵	
	۰/۰۸۴		۰/۰۷۷		۰/۱۴۴	۰/۰۰۱
۰/۰۱۵					۰/۰۷۶	
۰/۰۱۷						
۰/۰۱۷						
۰/۰۰۸						

ساعتی و بکار چند روش برای رتبه‌بندی واحد های تصمیم‌گیری به کمک مجموع مشترک وزن‌دار تحلیل پوششی داده‌ها

جدول ۴. میانگین اعضای زیر بازه‌های وزنی

$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
۰/۰۸۲	۰/۲۵۳		۰/۳۵۲	۰/۰۲۰	۰/۵۰۶	۰/۰۰۴
	۰/۲۳۳					
۰/۰۶۱	۰/۲۰۱				۰/۴۲۳	۰/۰۰۳
	۰/۱۶۹				۰/۳۰۳	
			۰/۱۶۳	۰/۰۰۱		
			۰/۱۲۳		۰/۱۶۶	
	۰/۰۸۴		۰/۰۷۷		۰/۱۴۴	۰/۰۰۱
۰/۰۱۶					۰/۰۷۶	
۰/۰۰۸						

جدول ۵. کران بالا و پایین نماینده وزن‌ها

Weights	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
Upper bound	۰/۰۸۲	۰/۲۵۳	۰	۰/۳۵۲	۰/۰۰۲	۰/۵۰۶	۰/۰۰۴
lower bound	۰/۰۱۶	۰/۰۸۴	۰	۰/۰۷۷	۰/۰۰۱	۰/۰۷۶	۰/۰۰۱
Method Averag	۰/۰۴۹	۰/۱۶۸	۰	۰/۲۱۴	۰/۰۰۱۵	۰/۲۹۱	۰/۰۰۲۵
Bourmbd							
Method Average	۰/۰۴۲	۰/۱۸۸	۰	۰/۱۷۹	۰/۰۰۱۵	۰/۲۱۹	۰/۰۰۲۷

جدول ۶. کارایی با روش میانگین کران‌ها

$e_1 = 0/68$	$e_2 = 0/92$	$e_3 = 0/69$	$e_4 = 0/56$	$e_5 = 0/86$	$e_6 = 0/80$	$e_7 = 0/84$	$e_8 = 0/72$	$e_9 = 0/81$	$e_{10} = 0/63$
--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	-----------------

جدول ۷. کارایی با روش میانگین

$e_1 = 0/64$	$e_2 = 0/84$	$e_3 = 0/47$	$e_4 = 0/41$	$e_5 = 0/76$	$e_6 = 0/81$	$e_7 = 0/73$	$e_8 = 0/64$	$e_9 = 0/56$	$e_{10} = 0/51$
--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	-----------------

جدول ۸. مقدار میانگین وزین شده خروجی‌ها

DMU	CCR	روش برترین وزن میانگین
D1	1/000	0/903
D2	1/000	1/131
D3	1/000	1/05
D4	1/000	0/89
D5	1/000	1/00
D6	1/000	0/92
D7	1/000	0/996

## منابع

- [1] Farrell, M. J., (1957). The measuring of productive efficiency, Journal of the royal statistical, series A 120, 253-28.
- [2] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units, European journal of operational research 2,429-444.
- [3] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management science, 39(10):1261-4.
- [4] Mehrabian, S., Alirezaee, M. R., Jahanshahloo, G. R., (1999). A complete efficiency ranking decision making units in data envelopment analysis", Computational optimization and applications, 4, 261-266.
- [5] Saati, S., Zarafat Angizl, M., Memariani, A., Jahanshahloo, G. R., (1999). A model for ranking decision making units in data envelopment analysis, Riceria operative, 31(97).
- [6] Golany, B., (1988). A note on including ordinal relations among multipliers in DEA, Management science, 34(8), 1029-1033.
- [7] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1979). Short Communication: Measuring the efficiency of decision making units, European journal of operational research 3, 339.
- [8] Saati, S., (2008). Determining a common set of weights in DEA by Solving a linear programming", Journal of industrial engineering international, 4(6), 51-56.