

استفاده از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشات صفحه ارتوتروپیک قطاعی روی بستر الاستیک

مسلم محمدی^۱، مصطفی غیور^{۲*}، علی فرج پور^۳

* نویسنده مسئول: ghayour@cc.iut.ac.ir

واژه‌های کلیدی

روش انتگرال دیفرانسیلی، ارتعاشات، صفحه قطاعی، بستر الاستیک، صفحه ارتوتروپیک.

چکیده

در مقاله حاضر از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد یک صفحه قطاعی شکل با رفتار ارتوتروپیک قطبی بر روی بستر الاستیک دو پارامتری استفاده شده است. جزئیات و فرمول بندی این روش عددی ارائه شده و با استفاده از آن مقادیر دقیقی از فرکانس‌های طبیعی برای محدوده وسیعی از دو پارامتر بستر الاستیک با هم مقایسه شده است. از مزیت‌های روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی می‌توان به عدم استفاده از روش دلتا و سادگی اعمال شرایط مرزی اشاره کرد. همچنین این روش عددی هیچ گونه محدودیتی در مقدار زاویه رأس قطاع و یا نوع شرایط مرزی ندارد. این در حالی است که اکثر روش‌های عددی در این دو مورد دارای محدودیت‌اند. فرکانس‌های طبیعی یک ورق قطاعی شکل با خواص ارتوتروپیک قطبی بر روی بستر الاستیک دو پارامتری برای اولین بار با استفاده از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی در این بررسی به دست آمده است.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

۲- دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

۳- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

۱- مقدمه

صفحات قطاعی از یک دایره در شاخه‌های متنوعی از صنایع، از قبیل صنایع مکانیکی، هوا و فضا، دریایی و مهندسی سازه کاربرد دارند. بنابراین آگاهی از رفتار ارتعاشی آنها حائز اهمیت است. یکی از مهمترین عوامل تعیین کننده فرکانس‌های پایه در ورق‌ها بستر زیر آنهاست. در گذشته تحقیقات زیادی در مورد ورق روی بستر یک پارامتری که بوسیله وینکلر طرح شد، انجام شده است [۱-۴]. برای به حساب آوردن ارتباط الاستیک میانی بیشتر، بین فنرها، طرح‌های مختلفی از بستر الاستیک دو پارامتری ارائه شده است [۵]. به دلیل پیچیدگی روابط ریاضی حاکم بر تحلیل صفحه روی بستر الاستیک دو پارامتری، اغلب تحلیل‌ها به وسیله روش‌های عددی انجام شده است [۶-۸]. گوپتا و همکاران [۹] مسئله ارتعاشات و کماتش صفحه دایره‌ای را روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار دادند. هونگ و لیسا [۱۰] روش تحلیلی برای ارتعاشات آزاد صفحه قطاعی شکل با فرض اینکه لبه‌های شعاعی آن دارای شرط مرزی مفصلی و زاویه رأس قطاع نیز بزرگتر از 180° درجه باشد، ارائه داده‌اند. یکسال بعد آنها حل تحلیلی برای قطاع ضخیم دایره‌ای با همان شرط مرزی و برای زوایای رأس بزرگتر از 180° درجه ارائه کردند [۱۱]. تاکنون روش انتگرال دیفرانسیلی^۱ مورد توجه بسیاری از محققین و دانشمندان قرار گرفته است و کاربردهای زیادی از این روش در مسائل مهندسی و برای حل مسائل مربوط به جریان و معادلات ناویر استوکس گزارش شده است [۱۲ و ۱۳]. همچنین از این روش برای تحلیل پایداری، خمش و ارتعاشات سازه‌های مهندسی استفاده شده است [۱۴]. به همین دلیل این روش به‌طور پیوسته مورد توسعه و اصلاح قرار گرفته است. از جمله موارد توسعه این روش می‌توان به استفاده از آن برای حل مسائل دارای شرایط اولیه و مرزی اشاره کرد [۱۵-۱۹]. در زمینه تحلیل ارتعاشات صفحه دایره‌ای [۱۸-۱۹] و صفحه دایره‌ای سوراخدار [۲۰] نیز از این روش استفاده شده است.

مسئله ارتعاشات صفحه دایره‌ای ضخیم با روش مثلثی انتگرال دیفرانسیلی مورد بررسی قرار گرفته است [۲۱]. محدودیت این روش در این است که تنها برای قطاع دایره‌ای با زاویه رأس کوچکتر از 180° درجه باید مورد استفاده قرار گیرد. در این مقاله قطاع دایره‌ای با زاویه رأس 30° ، 60° ، 90° ، 120° و 180° درجه مورد بررسی قرار گرفته است و زوایای بزرگتر به دلیل محدودیت روش مورد استفاده، در نظر گرفته نشده است. وانگ و وانگ [۲۲] از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی برای بررسی ارتعاشات صفحه قطاعی دایره‌ای استفاده کرده‌اند.

در این تحقیق قطاع دایره‌ای با خواص ایزوتروپ فرض شده است و فرکانس‌های به دست آمده از این روش با فرکانس‌هایی که از حل دقیق به دست آمده‌اند مقایسه شده که از دقت بالایی برخوردار بوده‌اند. برای اولین بار در این تحقیق از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی برای تحلیل ارتعاشات صفحه قطاعی روی بستر الاستیک استفاده شده است. این صفحه دارای خواص ارتوتروپیک قطاعی^۲ است و در راستاهای شعاعی و مماسی خواص و صلیبیت خمشی متفاوت دارد. بستر الاستیک در نظر گرفته شده برای آن طبق مدل پاسترناک است که علاوه بر ضریب الاستیک وینکلر، ضریب الاستیک برشی نیز در آن لحاظ شده است. نداشتن هیچ‌گونه محدودیتی بر زاویه رأس قطاع و قابلیت استفاده از این روش برای شرایط مرزی مختلف صفحه از نقاط قوت این روش عددی است.

۲- صورت مسئله

شکل (۱) نمای بالایی صفحه قطاعی شکل را با شرط مرزی گیردار نشان می‌دهد که در آن θ زاویه رأس قطاع و r شعاع آن است. شکل (۲) نیز نمای جانبی این صفحه را نشان می‌دهد که به وضوح بستر الاستیک پاسترناک و ضرایب وینکلر و برشی در آن قابل مشاهده است. در مقاله حاضر فرض شده است که صفحه قطاعی دارای خواص و صلیبیت خمشی

در معادله بالا $w_n(x)$ و $w'_N(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۳]:

$$w'_N(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_N)$$

$$w_N(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1}) \dots (x-x_N) \quad (۳)$$

ضرایب وزنی مشتقات مرتبه دوم، سوم و چهارم برای روش معمولی انتگرال دیفرانسیلی به صورت زیر قابل بیان هستند [۱۳]:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^N B_{kj} A_{ik} \quad (۴)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N B_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^N C_{kj} A_{ik}$$

در روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی، دو درجه آزادی در نقاط ابتدایی و انتهایی معرفی شده است. اما ضرایب وزنی مشتقات مرتبه اول هنوز از رابطه (۲) محاسبه می‌شوند و ضرایب وزنی مشتق مرتبه دوم در نقاط درونی شبکه از معادله (۴) محاسبه می‌شوند. قبل از محاسبه مشتقات مرتبه سوم و چهارم، مشتقات مرتبه دوم در نقاط ابتدایی و انتهایی به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۲]:

$$w_1^{(2)} = A_{11} w'_1 + A_{1N} w'_N + \sum_{j=1}^N \sum_{k=2}^{N-1} A_{1k} A_{kj} w_j$$

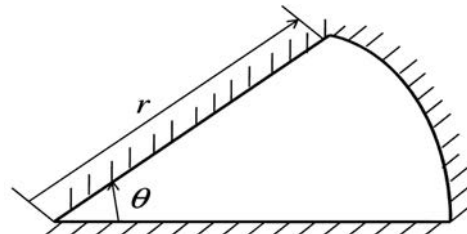
$$= \sum_{j=1}^N \bar{B}_{1j} w_j + A_{11} w'_1 + A_{1N} w'_N \quad (۵)$$

$$w_N^{(2)} = A_{N1} w'_1 + A_{NN} w'_N + \sum_{j=1}^N \sum_{k=2}^{N-1} A_{Nk} A_{kj} w_j$$

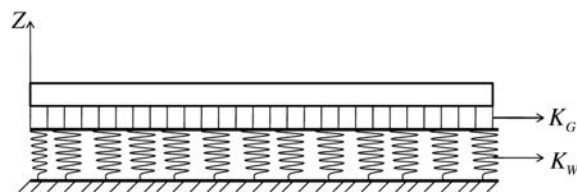
$$= \sum_{j=1}^N \bar{B}_{Nj} w_j + A_{N1} w'_1 + A_{NN} w'_N$$

باید تأکید کرد که بخش اول معادله (۵) شبیه روش معمولی انتگرال دیفرانسیلی بیان می‌شود. همچنین رابطه بین مشتقات مراتب بالاتر نیز مانند روش معمولی بیان می‌شود. مشتقات سوم و چهارم به صورت معادله (۵) محاسبه می‌شوند [۲۲]:

مفاوتی در جهات مماسی و شعاعی است. همچنین معادله دیفرانسیل ارتعاش به شکل جملاتی از ضرایب روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی نوشته شده است و با استفاده از آن فرکانس‌های پایه بی‌بعد صفحه قطاعی، با خواص ارتوتروپیک قطبی، بر روی بستر الاستیک به دست آمده است.



شکل (۱) نمای بالای صفحه قطاعی شکل با شرط مرزی گیردار [۲].



شکل (۲) نمای کناری صفحه قطاعی شکل روی بستر الاستیک دو پارامتری [۳].

۳- روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی

برای کامل‌تر شدن و روشن شدن مسئله، روش انتگرال دیفرانسیلی معمولی برای یک مسئله یک بعدی توصیف شده است. در روش معمولی انتگرال دیفرانسیلی مشتق مرتبه k ام در نقطه شبکه‌ای i ام به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۳]:

$$w_i^{(k)} = \sum_{j=1}^N L_j^{(k)}(x_i) w_j = \sum_{j=1}^N E_{ij}^{(k)} w_j \quad (۱)$$

$(i = 1, 2, \dots, N)$

که در این رابطه $L_j(x), E_{ij}^{(k)}$ به ترتیب ضرایب وزنی و چند جمله‌ای لاگرانژی مشتق مرتبه k ام هستند. اگر A_{ij} را ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول در نظر بگیریم این ضرایب به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۳]:

$$A_{ij} = \frac{w'_N(x_i)}{(x_i - x_j) \omega'_N(x_j)} \quad (i \neq j),$$

$$A_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_j)}$$

(۲)

در معادلات بالا ∇^2 عملگر لاپلاسین در مختصات قطبی است و $\bar{K}_G, \bar{K}_W, w, q, \rho, h, \omega$ به ترتیب فرکانس طبیعی، ضخامت ورق، دانسته جرمی، بار عرضی، جابه‌جایی عرضی ورق، ضریب الاستیک وینکلر و ضریب الاستیک لایه برشی هستند. $Q_\theta, Q_r, M_{r\theta}, M_\theta, M_r$ نیز متجه‌های تنش می‌باشند که در حالت ارتوتروپیک به صورت زیر بیان می‌شوند [۲]:

$$M_r = -D_r \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right)$$

$$M_\theta = -D_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \nu \theta D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

$$M_{r\theta} = -D_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$V_r = Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta}$$

$$= -D_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{(D_r \nu \theta - \nu D_k)}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{D_r}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{(\nu D_k + D_r \nu \theta + D_\theta)}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (9)$$

در اینجا $\nu_\theta, D_k, D_\theta, D_r$ به ترتیب صلیبیت خمشی در جهات شعاعی، مماسی، پیچشی و ضریب پواسون در جهت مماسی هستند. معادله (۸) به صورت یک معادله واحد بر اساس جملاتی از برایندهای ممان ترکیب می‌شوند و با جایگزین کردن متجه‌های تنش بیان شده در معادلات (۹)، رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر صفحه‌ی قطاعی شکل با خواص ارتوتروپیک قطبی بر روی بستر الاستیک دو پارامتری به صورت زیر است:

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{\nu D_r}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu(\nu_\theta D_r + D_k)}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{D_\theta}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r} - \frac{\nu(\nu_\theta D_r + D_k)}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{\nu(\nu_\theta D_r + D_k + D_\theta)}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{D_\theta}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4}$$

$$= q + \rho h \omega^2 w - \bar{K}_w w + \bar{K}_G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (10)$$

$$w_i^{(3)} = \sum_{j=1}^N \bar{C}_{ij} w_j + (A_{i1} A_{11} + A_{iN} A_{N1}) w'_1 + (A_{i1} A_{1N} + A_{iN} A_{NN}) w'_N$$

$$w_i^{(4)} = \sum_{j=1}^N \bar{D}_{ij} w_j + (B_{i1} A_{11} + B_{iN} A_{N1}) w'_1 + (B_{i1} A_{1N} + B_{iN} A_{NN}) w'_N$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\bar{B}_{ij} = \bar{B}_{ij} \quad (i = 1, N; j = 1, 2, \dots, N)$$

$$\bar{B}_{ij} = B_{ij} \quad (i = 2, 3, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

برای تحلیل ارتعاشی صفحه قطاعی مشتقات سوم و چهارم در جهت θ توسط رابطه (۶) با دو درجه آزادی اضافه‌تر نسبت به روش معمولی انتگرال دیفرانسیلی محاسبه می‌شود. در جهت r در نقاط روی مرز بیرونی تنها درجه آزادی w'_N نسبت به روش معمولی انتگرال دیفرانسیلی اضافه‌تر در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه مشتقات سوم و چهارم در جهت r استفاده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۲۲]:

$$w_i^{(3)} = \sum_{j=1}^N \bar{C}_{ij} w_j + A_{iN} A_{NN} w'_N$$

$$w_i^{(4)} = \sum_{j=1}^N \bar{D}_{ij} w_j + B_{iN} A_{NN} w'_N$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

$$\bar{B}_{ij} = \bar{B}_{ij} \quad (i = 1, N; j = 1, 2, \dots, N)$$

$$\bar{B}_{ij} = B_{ij} \quad (i = 2, 3, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

با استفاده از این روش، همه شرایط مرزی به سادگی و بدون استفاده از روش دلتا یا سایر روش‌های مشابه، به کار گرفته می‌شوند.

۴- معادلات حاکم

معادلات تعادل در جهت r, θ, z برای یک المان دایره‌ای روی بستر الاستیک دو پارامتری به صورت زیر است [۳]:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_r}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} M_{r\theta} - Q_\theta = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_r}{r} + q - \bar{K}_W w + \bar{K}_G \nabla^2 w + \rho h \omega^2 w = 0$$

شرط مرزی آزاد در فرم ریاضی به صورت $M_r = 0$ و $V_r = Q_r + \frac{\partial M_r \theta}{r \partial \theta} = 0$ بیان می‌شود. این شرط به شکل جملاتی از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \bar{B}_{Nk}^r w_{kj} + A_{NN}^r w'_{rNj} + \frac{v\theta}{a} \sum_{k=1}^N A_{Nk}^r w_{kj} \\ & + \frac{v\theta}{a^r} \sum_{k=1}^N B_{jk}^\theta w_{Nk} = 0 \\ & \sum_{k=1}^N \left(\bar{C}_{Nk}^r + \frac{1}{a} B_{Nk}^r - \frac{\alpha}{a^r} A_{Nk}^r \right) w_{kj} + \frac{(v\beta - v\theta)}{a^r} \\ & \sum_{k=1}^N A_{Nk}^r \sum_{l=1}^N B_{jl}^\theta w_{kl} - \frac{(\alpha + v\beta + v\theta)}{a^r} \\ & \sum_{k=1}^N B_{jk}^\theta w_{Nk} + A_{NN}^r A_{NN}^r w'_{rNj} = 0 \end{aligned} \right. \quad (14)$$

(j = 1, 2, ..., N)

۲-۵- شرایط مرزی بر روی مرزهای مستقیم

شرایط مرزی روی مرزهای $\theta = \theta_0$ ، $\theta = 0$ به شکل جملاتی از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

شرط مرزی گیردار

$$\left\{ \begin{aligned} & w_{ij} = 0 \\ & \sum_{k=1}^N A_{jk}^\theta w_{ik} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, N; j = 1, N) \end{aligned} \right. \quad (15)$$

شرط مرزی مفصلی

$$\left\{ \begin{aligned} & w_{ij} = 0 \\ & \alpha \left(\frac{1}{r_i^r} \left(\sum_{k=1}^N \bar{B}_{jk}^\theta w_{ik} + A_{j1}^\theta w'_{\theta i} + A_{jN}^\theta w'_{\theta iN} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^N A_{jk}^\theta w_{ik} \right) + v\theta \sum_{k=1}^N B_{ik}^r w_{kj} = 0 \end{aligned} \right. \quad (16)$$

(i = 2, 3, ..., N; j = 1, N)

قابل بیان است که تمامی مقادیر نشان داده شده در معادله (۱۰) مستقل از زمان هستند. معادله دیفرانسیل حاکم بر اساس جملاتی از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی به صورت معادله (۱۱) نوشته می‌شود. در اینجا $\alpha = D_\theta / D_r$ و $\beta = D_k / D_r$ تعریف شده‌اند و اندیس‌های θ, r بیان‌کننده مشتقات در جهات فوق هستند.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left(\bar{D}_{ik}^r + \frac{v\theta}{r_i} \bar{C}_{ik}^r - \frac{\alpha}{r_i^r} B_{ik}^y + \frac{\alpha}{r_i^r} A_{ik}^r \right) w_{kj} \\ & + v(v\theta + \beta) \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{r_i} B_{ik}^r - \frac{1}{r_i^r} A_{ik}^r \right) \sum_{l=1}^N B_{jl}^\theta w_{kl} \\ & + \frac{1}{r_i^r} \sum_{l=1}^N (v(v\theta + \beta + \alpha) \beta_{jl}^\theta + \alpha \bar{D}_{jl}^\theta) w_{il} \\ & + \left(B_{iN}^r + \frac{v\alpha}{r_i} A_{iN}^r \right) A_{NN}^r w'_{\theta iN} \\ & = \frac{q_{ij}}{D_r} + \omega^r \frac{\rho h}{D_r} w_{ij} - \frac{\bar{K}_w}{D_r} w_{ij} + \frac{\bar{K}_w}{D_N} w_{ij} + \frac{\bar{K}_G}{D_r} \\ & \left(\sum_{k=1}^N B_{ik}^r w_{kj} + \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^N A_{ik}^r w_{kj} + \frac{1}{r_i^r} \sum_{k=1}^N B_{jl}^\theta w_{il} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

۵- شرایط مرزی

۱-۵- شرایط مرزی برای مرز دایره‌ای

فرض می‌شود که لبه دایره‌ای در صفحه قطاعی شکل گیردار است. شرط مرزی گیردار در شکل ریاضی به فرم $w = 0$ ، $w'_r = \frac{\partial w}{\partial r} = 0$ در مرز $r = a$ به فرم جملاتی از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left\{ \begin{aligned} & w_{ij} = 0 \\ & \sum_{k=1}^N A_{jk}^\theta w_{ik} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, N; j = 1, N) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

شرط مرزی مفصلی که در شکل ریاضی به صورت $M_r = 0$ ، $w = 0$ نوشته می‌شود به شکل جملاتی از روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left\{ \begin{aligned} & w_{Nj} = 0 \\ & \sum_{k=1}^N \bar{B}_{Nk}^r w_{kj} + A_{NN}^r w'_{rNj} + \frac{v\theta}{a} \sum_{k=1}^N A_{Nk}^r w_{kj} \\ & + \frac{v\theta}{a^r} \sum_{k=1}^N B_{jk}^\theta w_{Nk} = 0 \end{aligned} \right. \quad (13)$$

شرط مرزی آزاد

که اندیس b و i مقادیر عددی را در نقاط مرزی و نقاط درونی مشخص می کند و $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_r}$ فرکانس طبیعی بی بعد است. بردار δ_b مربوط به مشتقات مرتبه اول روی نقاط مرزی نسبت به r, θ برای شرایط مرزی مسئله است که حاوی $4 + 3(N-2)$ المان است و شامل ۲ مشتق در هر کدام از نقاط گوشه‌ای در $r = a$ و یک مشتق در سایر نقاط مرزی باقیمانده هستند. بردار w_i شامل $(N-2)(N-2)$ جابه‌جایی در هر نقطه شبکه‌ای داخلی است. فرکانس‌های طبیعی به وسیله حل مسئله مقدار ویژه که در معادله (۱۹) بیان شده به دست می آیند.

۶- نتایج

به منظور تأیید صحت پاسخ‌های حاصل از اعمال روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی، نتایج به دست آمده از این روش بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک با نتایج حاصل از حل دقیق و حل به وسیله روش معمولی انتگرال دیفرانسیلی در جدول (۱) مقایسه شده است. این نتایج برای شرط مرزی CSS (مرز دایره‌ای گیردار و دو مرزی که به صورت مستقیم و روی تکیه‌گاه ساده هستند مقایسه شده است. نتایج نشان می دهد روش فوق از دقت قابل قبولی برخوردار است. طبق مرجع [۹] مقادیر ثابت $\nu = 0.3$ ، $\beta = 0.35$ و $\alpha = 5$ در نظر گرفته شده‌اند. شکل (۴) تفاوت بین صفحه ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با $\alpha = 5$ ، $\nu = 0.3$ را نشان می دهد. با افزایش α مقدار فرکانس طبیعی بی بعد افزایش می یابد. این افزایش بیشتر از حالت ایزوتروپیک است و در زوایای کوچکتر این اختلاف آشکارتر است.

جدول (۱) فرکانس طبیعی پایه بی بعد صفحه قطاعی ایزوتروپیک با

شرط مرزی CSS

روشها	زاویه رأس θ	مقاله حاضر	حل دقیق [۱۰-۱۱]	DQM [۱۲]
	۳۰	۹۷/۹۹۲	۹۸/۰۱	۹۷/۸۱۷
	۹۰	۲۵/۶۱۳۳	۲۵/۷۰۴	۲۵/۶۰۱
	۱۸۰	۱۳/۸۹۸۲	۱۳/۹۱۲	۱۳/۸۹۷
	۲۱۰	۱۳/۹۴۸۷	۱۴/۱۴۵	۱۴/۰۰۴
	۲۷۰	۱۴/۳۸۵۷	۱۴/۴۱۲	۱۳/۱۳۳
	۳۶۰	۱۴/۵۸۱۶	۱۴/۵۸۹	۱۳/۷۲۶

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r_i^2} \left(\sum_{k=1}^N \bar{B}_{jk}^\theta w_{ik} + A_{j1}^\theta w'_{\theta i1} + A_{jN}^\theta w'_{\theta iN} \right) \\ & + \frac{1}{r_i} \sum_{k=1}^N A_{jK}^\theta w_{ik} + \nu \sum_{k=1}^N B_{ik}^r w_{kj} = 0 \\ & \frac{1}{r_i^3} \sum_{k=1}^N \bar{C}_{jk}^r w_{ik} + \frac{\nu(1+\nu)}{r_i^3} \sum_{k=1}^N A_{jk}^\theta w_{ik} \\ & + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\nu-\nu}{r_i} B_{ik}^r + \frac{\nu\nu-1}{r_i^2} A_{ik}^r \right) \sum_{k=1}^N A_{jI}^\theta w_{kI} \\ & + \frac{1}{r_i^3} (A_{j1}^\theta A_{11}^\theta + A_{jN}^\theta A_{N1}^\theta) w'_{\theta i1} \\ & + \frac{1}{r_i^3} (A_{j1}^\theta A_{1N}^\theta + A_{jN}^\theta A_{NN}^\theta) w'_{\theta iN} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

$(i = 2, \dots, N; j = 1, N)$

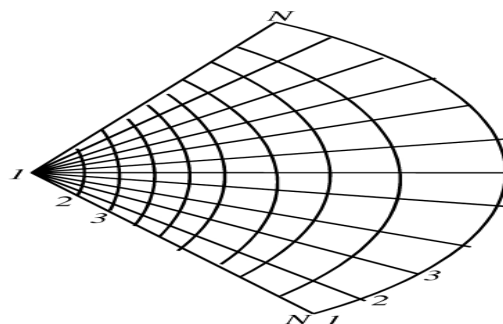
شبکه‌بندی نقاط گرهی استفاده شده در جهات r, θ به صورت زیر بیان می شوند. در شکل (۳) نحوه توزیع این نقاط نشان داده شده است.

$$\theta_1 = 0, \theta_N = \theta_0, \theta_i = \frac{\theta_0}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{(2i-3)\pi}{2(N-2)} \right) \right) \quad (18)$$

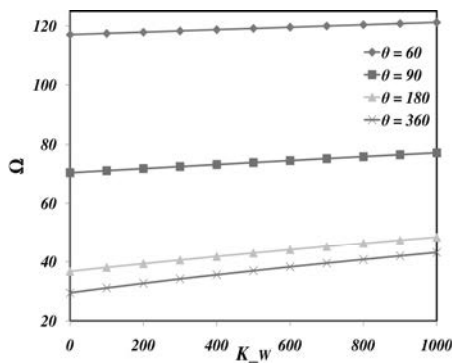
$$r_1 = 0, r_N = a, r_i = \frac{a}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{(2i-3)\pi}{2(N-2)} \right) \right)$$

برای ورق قطاعی شکل با فرض $q = 0$ ، معادله (۱۱) در فرم ماتریسی در روش بهبود یافته انتگرال دیفرانسیلی به صورت زیر بسط داده می شود:

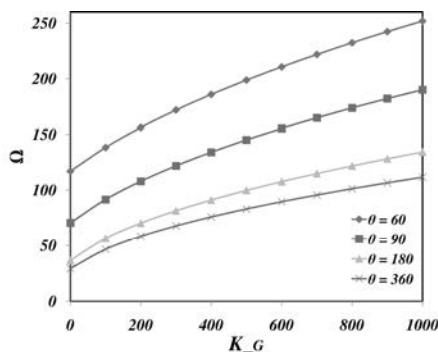
$$\begin{pmatrix} k_{bb} & k_{bi} \\ k_{ib} & k_{ii} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_b \\ w_i \end{Bmatrix} - \Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$



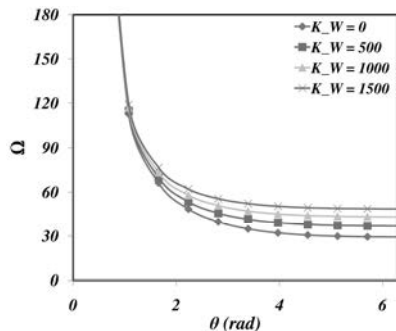
شکل (۳) شبکه‌بندی نقاط گره‌ای بر روی قطاع دایره‌ای شکل [۲۲]



شکل (۶) نمودار فرکانس طبیعی بی بعد برحسب مقادیر مختلف ضریب الاستیک وینکلر.



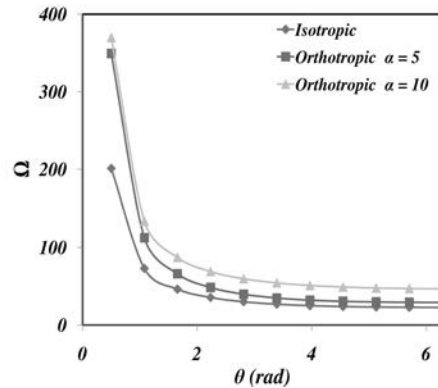
شکل (۷) نمودار فرکانس طبیعی بی بعد برحسب مقادیر مختلفی از ضریب لایه برشی.



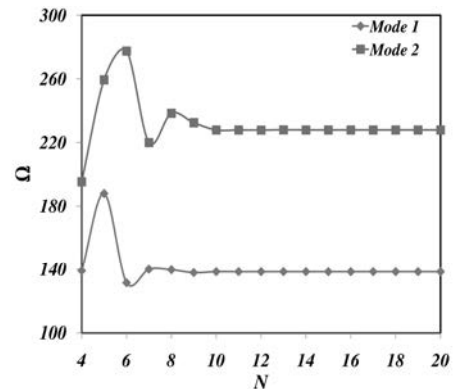
شکل (۸) نمودار فرکانس طبیعی بی بعد برحسب زاویه رأس قطاع و مقادیر مختلفی از ضریب الاستیک وینکلر K_W .

در جدول (۲) فرکانس‌های پایه بی بعد برای مقادیر مختلفی از زاویه رأس قطاع، ضریب الاستیک بی بعد وینکلر و لایه برشی، برای شرط مرزی گیردار ارائه شده است. طبق جدول (۲) افزایش بستر الاستیک سبب افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. همچنین تأثیر بستر الاستیک برشی خیلی بیشتر از ضریب الاستیک وینکلر است. افزایش زاویه رأس نیز باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. برای سایر شرایط مرزی نیز

همگرایی فرکانس طبیعی بی بعد در مود اول و دوم تا چهار رقم اعشار دقت، در شکل (۵) رسم شده است. واضح است که با شبکه بندی ۱۰ نقطه‌ای در هر دو جهت r, θ مسئله همگرا می‌شود. بنابراین در مقاله حاضر برای کلیه داده‌ها و نمودارها از شبکه بندی 10×10 استفاده شده است.



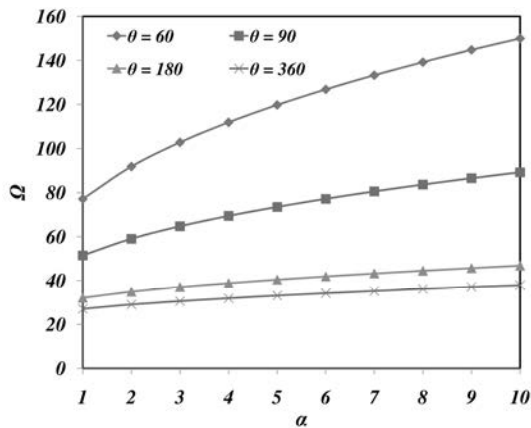
شکل (۴) نمودار فرکانس بی بعد برحسب مقادیر مختلفی از زوایای رأس قطاع دایره‌ای شکل برای حالت ایزوتروپیک و ارتوتروپیک.



شکل (۵) نمودار همگرایی فرکانس طبیعی بی بعد صفحه قطاعی شکل ارتوتروپیک با زاویه رأس $\theta = \pi/3$ و شرایط مرزی گیردار.

از شکل‌های (۶) و (۷) می‌توان پی برد که تغییرات فرکانس طبیعی برحسب بستر الاستیک وینکلر به صورت خطی و برحسب بستر برشی به صورت غیرخطی است. همچنین با افزایش زاویه رأس قطاع فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد، با افزایش K_G, K_W که ضرایب بی بعد شده بستر الاستیک وینکلر و برشی هستند، فرکانس‌های طبیعی بی بعد نیز افزایش می‌یابند. این به دلیل افزایش سختی سازه است. اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی بی بعد برحسب K_W و K_G در محدوده $0 < \theta \leq 180$ خیلی بیشتر از $180 < \theta \leq 360$ است.

از شکل (۸) و (۹) می‌توان فهمید که افزایش K_G, K_W باعث افزایش فرکانس طبیعی بی بعد می‌شود. در زوایای بزرگتر تأثیر K_W روی فرکانس بی بعد بیشتر از زوایای کوچک است.



شکل (۱۰) نمودار فرکانس طبیعی بی بعد برحسب درجه ارتوتروپیی ماده برای مقادیر مختلفی از زاویه رأس قطاع.

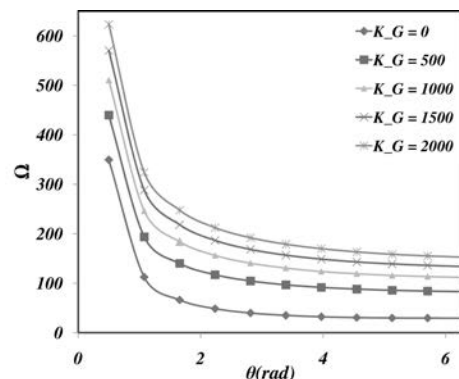
۸- فهرست علائم

ω	فرکانس طبیعی ارتعاشات
q	بار عرضی وارد شده بر صفحه
h	ضخامت صفحه دایره‌ای
ρ	دانسیته جرمی صفحه
Ω	فرکانس طبیعی بی بعد
\bar{K}_W	ضریب الاستیک وینکلر
\bar{K}_G	ضریب الاستیک لایه برشی
Q_r, M_r	منتجه‌های تنش در جهت شعاعی
Q_θ, M_θ	منتجه‌های تنش در جهت مماسی
$M_{r\theta}$	منتجه‌ی پیچشی تنش
D_r	صلبیت خمشی در راستای شعاعی
D_k	صلبیت خمشی پیچشی
D_θ	صلبیت خمشی در راستای مماسی
v_θ	ضریب پواسون در راستای شعاعی
V_r	نیروی برشی عرضی
W	جابه‌جایی عرضی صفحه دایره‌ای
θ	زاویه رأس قطاع
N	تعداد نقاط شبکه بندی در جهت مماسی و شعاعی

پدیده‌های بالا به‌طور مشابه قابل مشاهده هستند. شکل (۱۰) تغییرات فرکانس طبیعی پایه ورق قطاعی را برحسب درجه ارتوتروپیی ماده برای مقادیر مختلفی از زاویه رأس قطاع نشان می‌دهد. طبق این شکل با افزایش درجه ارتوتروپیی ماده، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. فرکانس طبیعی در زوایای کمتر وابستگی بیشتری به درجه ارتوتروپیی دارد و تغییرات بیشتری در زوایای کمتر نسبت به درجه ارتوتروپیی مشاهده می‌شود.

۷- نتیجه گیری

با توجه به مطالب ارائه شده، ملاحظه می‌شود که در نظر گرفتن بستر الاستیک دو پارامتری در فرکانس پایه ورقها تأثیر به‌سزایی می‌گذارد. در این مقاله، اثر این پدیده برای $K_G \leq 1000$ ، $K_W \leq 1000$ بررسی شده است. مشاهده می‌شود با افزایش هر دو ضریب وینکلر و لایه برشی بستر الاستیک، اولین فرکانس طبیعی ورق (فرکانس پایه آن) افزایش می‌یابد همچنین با توجه به روش حل استفاده شده در این تحقیق و نتایج جدولهای (۱) و (۲)، جواب‌های به دست آمده از این روش با فرکانس‌های به‌دست آمده از حل دقیق صفحه قطاعی شکل بسیار نزدیک است. با افزایش α مقدار فرکانس طبیعی بی بعد افزایش می‌یابد. با استفاده از این روش سایر شرایط مرزی مسئله بدون استفاده از روش دلتا اعمال می‌شود. همچنین این روش هیچ گونه محدودیتی در مقدار زاویه رأس قطاع ندارد. موارد فوق حاکی از مزایای استفاده از روش بهبود یافته انتگرالی و دیفرانسیلی نسبت به سایر روش‌های عددی در حل مسئله حاضر است.



شکل (۹) نمودار فرکانس طبیعی بی بعد برحسب زاویه رأس قطاع و مقادیر مختلفی از ضریب الاستیک لایه برشی K_G .

جدول (۲) فرکانس‌های طبیعی پایه بی بعد برای شرط مرزی CCC برحسب مقادیر متفاوتی از ضرایب الاستیک و زاویه رأس قطاع ارتوتروپیک $\alpha = 5$ و $\beta = 0.35$ ، $\nu\theta = 0.3$

K_G	K_W	زاویه رأس θ (درجه)						
		۳۶۰	۲۷۰	۱۸۰	۱۲۰	۹۰	۶۰	۳۰
۰		۲۹/۳۳۴۴	۳۰/۳۵۷۷	۳۶/۶۶۵۴	۵۱/۶۵۲۸	۷۰/۳۸۵۹	۱۱۷/۰۲۱۲	۳۲۴/۷۰۴۰
۵۰۰	۰	۸۲/۹۸۶۰	۸۷/۳۷۱۱	۹۹/۷۱۳۲	۱۲۱/۳۹۵۵	۱۴۵/۱۳۴۷	۱۹۸/۶۷۴۸	۴۱۴/۸۰۸۰
۱۰۰۰		۱۱۱/۶۷۲۵	۱۱۸/۰۰۱۶	۱۳۴/۲۷۷۸	۱۶۱/۳۶۱۵	۱۸۹/۹۷۲۶	۲۵۱/۸۷۳۹	۴۸۴/۴۰۴
۰		۳۶/۸۸۵۱	۳۷/۷۰۴۰	۴۲/۹۴۶۰	۵۶/۲۸۵۱	۷۳/۸۵۲۴	۱۱۹/۱۳۸۴	۳۲۵/۴۷۳۱
۵۰۰	۵۰۰	۸۵/۹۴۵۸	۹۰/۱۸۷۱	۱۰۲/۱۸۹۶	۱۲۳/۴۳۷۷	۱۴۶/۸۴۷۱	۱۹۹/۹۲۹۱	۴۱۵/۴۱۰۳
۱۰۰۰		۱۱۳/۸۸۹۲	۱۲۰/۱۰۱۵	۱۳۶/۱۲۶۹	۱۶۲/۹۰۳۴	۱۹۱/۲۸۴۱	۲۵۲/۸۶۴۵	۴۸۴/۸۵۶۳
۰		۴۳/۱۳۳۶	۴۳/۸۳۵۹	۴۸/۴۱۸۵	۶۰/۵۶۴۱	۷۷/۱۶۳۳	۱۲۱/۲۱۸۷	۳۲۶/۲۴۰۳
۵۰۰	۱۰۰۰	۸۸/۸۰۷۰	۹۲/۹۱۷۸	۱۰۴/۶۰۵۷	۱۲۵/۴۴۶۷	۱۴۸/۵۳۹۸	۲۰۱/۱۷۵۷	۴۱۶/۰۱۱۶
۱۰۰۰		۱۱۶/۰۶۳۵	۱۲۲/۱۶۵۴	۱۳۷/۹۵۱۲	۱۶۴/۴۳۰۹	۱۹۲/۵۸۶۶	۲۵۳/۸۵۱۲	۴۸۵/۳۷۱۷

۹- مراجع

- [8] Qin, Q.H., Hybrid-Treffiz finite element method for Reissner plates on an elastic foundation, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 122, 1995, pp.379-392.
- [9] Gupta U.S., Ansari A.H., Sharma S., Buckling and vibration of polar orthotropic circular plate resting on Winkler foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 297, 2006, pp.457 - 476.
- [10] Huang C.S., Leissa A.W., McGee O.G., Exact analytical solutions for the vibrations of sectorial plates with simply supported Radial edges, *J. Appl. Mech.*, Vol. 60, 1993, pp.478-483.
- [11] Huang C.S., Leissa A.W., McGee O.G., Exact analytical solutions for free vibrations of thick sectorial plates with simply Supported radial edges, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 31, 1994, pp.1609-1631.
- [12] Shu C., Richards B. E., Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-stokes equations, *Int. J. Number. Methods Fluids*, Vol. 15 1992, pp.791-798.
- [1] Chakraverty S., Vibration of plates, CRC press, Taylor & Francis Group, 2009.
- [2] Rudolph S., Ing P.E., Theories and Applications of Plate Analysis, John Wiley & Sons 2nd edited, New Jersey, 2004.
- [3] Rao S., Vibration of continuous systems, John Wiley & Sons, 2007.
- [4] Liew, K.M., Han, J.B., Xiao, Z.M., Du, H., Differential quadrature method for mindlin plates on Winkler foundations, *International Journal of Mech. Sci.*, Vol. 38, 1996, pp.405-421.
- [5] Zhou D., Lo S.H., Au F.T.K., Cheung Y.K., Three-dimensional free vibration of thick circular plates on Pasternak foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, 2006, pp. 726 - 741.
- [6] Hosseini-Hashemi Sh., Rokni-Damavandi-Taher H., Omidi M., 3-D free vibration analysis of annular plates on Pasternak elastic foundation via p-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 311, 2008, pp.1114-1140.
- [7] Qin, Q.H., Hybrid-Treffiz finite element approach for plate bending on an elastic foundation, *Appl. Math.*, Vol.18, 1994, pp.334-339.

- [18] Wu T.Y., Liu G.R., Free vibration analysis of circular plates with variable thickness by the generalized differential quadrature rule, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 38, 2001, pp.7967–7980.
- [19] Liew K.M., Liu F.L., Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates, *J. Sound Vib.* Vol. 230, 2000, pp.335–356.
- [20] Li X., Zhong H., He Y. Free vibration analysis of sectorial plates by the triangular differential quadrature method, J. Qinhua, 2003.
- [21] Wang X., Wang Y., Free vibration analysis of sectorial plates by the new version of differential quadrature method, *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004.
- [13] Shu C., Differential quadrature and its application in engineering, Springer-Verlag, London 2000.
- [14] Liu F.L., Liew K.M., Free vibration analysis of Mindlin sector plates numerical solutions by differential quadrature method, *Comput Methods*, 1999.
- [15] Wu T.Y., Liu G.R., The generalized differential quadrature rule for initial value differential equations, *J. Sound Vib.*, Vol. 233, 2000, pp.195-223.
- [16] Wu T.Y., Liu G.R., The generalized differential quadrature rule for fourth-order differential equations, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 50, 2001, pp.1907–1929.
- [17] Wu T.Y., Wang Y.Y., Liu G.R., Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, 2002, pp.5365–5380.