# حل مساله انتقال حرارت هدايتي معكوس در كانال حاوي ماده متخلخل در حالت نداشتن تعادل حرارتي

محسن نظری [i]; فرشاد کوثری [ii]

## چكيده

در اين مقاله به بررسي انتقال حرارت هدايتي معكوس گذرا در كانال حاوي ماده متخلخل پرداخته شده است. براي تحليل مساله از شرط نداشتن تعادل حرارتي بين دو فاز جامد و سيال استفاده شده و به كمک دو روش جداگانه معكوس تخمين متوالی تابع (**SFSM**) و گراديان مزدوج به تخمين شار حرارتي سطحي نسبت به زمان پرداخته مي‌شود. استفاده از دو معادله انرژي در حالت نداشتن تعادل حرارتي و به كار بردن آن در مسايل معكوس حرارتي از ويژگي هاي برجسته اين پژوهش بوده و كاري نو در اين زمينه مي‌باشد. استخراج معادلات الحاقی از معادلات حاکم بر مواد متخلخل در حالت نداشتن تعادل حرارتی و استفاده از آن به منظور تخمین شار حرارتی مجهول از دیگر برجستگی های این مقاله است. گفتنی است که تاثير پارامترهايي مثل ضریب توالی (r) در روش تخمین متوالی تابع مجهول، خطاي دماهاي اندازه گيري شده در محل سنسور و محل قرار گیری حسگرها، بر توزیع شار تخمین زده شده مورد بحث قرار گرفته است. همچنین مقایسه کاملی بین دو روش معکوس در تخمین شار حرارتی ارایه شده است.

## كلمات كليدي

انتقال حرارت معكوس- محيط متخلخل- عدم تعادل حرارتي- تخمين متوالی تابع- معادله الحاقی

# *Inverse Conduction Heat Transfer in a Channel Filled with Porous Material under Local Thermal Non-Equilibrium Condition*

M. Nazari; F. Kowsari

***ABSTRACT***

This paper is concerned with the inverse heat transfer between two parallel plates filled with a porous medium under a non-equilibrium condition. Sequential Function Specification Method (SFSM) and Conjugate Gradient Method (CGM) with Adjoint equations are employed to estimate the transient wall heat flux at the porous boundary. Combination of the non-thermal equilibrium model and inverse heat transfer methods is the novelty of this paper. Results showed that sensor locations and existing noise in the measured data have important effects on the calculated heat flux.

***KEYWORDS***

Inverse Heat Transfer, Porous Medium, Non-Thermal Equilibrium, SFSM, Adjoint Problem.

[i] دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران: Email: mohsennazari@ut.ac.ir.
[ii] استاد دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران،: Email: fkowsari@ut.ac.ir

## ۱- مقدمه

انتقال حرارت در محیط متخلخل داراي کاربردهاي بسياري است. مدلسازي سيستم هاي ژئوترمال, مبدل‌هاي حرارتي فشرده, عايق‌هاي ساختمان ومخازن نفتي از جمله کاربردهاي آن مي‌باشند. گفتنی است که انتقال حرارت هدايتي در مواد متخلخل نيز داراي کاربردهاي فراواني است که از آن جمله مي‌توان به بررسي انتقال حرارت در بافت هاي زنده اشاره کرد. استفاده از روشهاي معکوس حرارتي براي تخمين پارامترهاي موثر در مواد متخلخل مي تواند راه حل موثري براي مدلسازي بهينه در اين زمينه باشد. روشهاي معکوس حرارتي در مواد متخلخل در حالت *تعادل حرارتي* بين فازهاي سيال و جامد توسط تعداد زيادي از مولفين به کار رفته است که از آن جمله مي‌توان به روش معکوس گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی[۱] در مرجع [۱] اشاره کرد که در آن با در نظر گرفتن انتقال حرارت جابجايي طبيعي به بررسي منبع حرارتي بيو شيميايي در داخل محيط متخلخل پرداخته مي‌شود و هدف از آن يافتن منبع حرارتي داخلي طبق مدل مونود با استفاده از اندازه‌گيري‌هاي دمايي است. در مرجع [۲] نيز پارامترهاي موثر در مواد متخلخل با روش معکوس Levenberg–Marquardt تخمين زده شده است. ضريب هدايت حرارتي موثر و ضريب ظرفيت حرارتي حجمي از جمله موارد بدست آمده از حل مولفين با استفاده از فرض تعادل حرارتي بين دو فاز مي‌باشد.

روش معکوس ارايه شده در مرجع [۳] بر مبنای گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی بوده و در آن با روش عددي معکوس به بررسي انتقال حرارت در محيط هاي متخلخل پرداخته شده است. در اين مقاله با استفاده از روش عددی حجم محدود نسبت به تعيين منبع حرارتي نامشخص (که وابسته به غلظت نيز است) در داخل محيط متخلخل با وجود جابجايي طبيعي اقدام شده است. مساله ديفيوژن حرارتي معکوس در يک محفظه مربعي متخلخل دوبعدي با روش گراديانهاي مزدوج و استفاده از معادلات الحاقی در مرجع [٤] مورد بررسي قرار گرفته است. حل عددي با روش حجم محدود انجام شده است. در اين مساله پروفيل غلظت بر روي ديواره نامشخص فرض شده و برای تخمين آن اقدام شده است. در تحقيق ديگري [٥]، انتقال حرارت جابجايي آزاد در داخل ماده متخلخل مورد بررسی قرار گرفته و با روش گراديانهاي مزدوج و استفاده از اندازه گيري دما در داخل ميدان محاسباتي، شار حرارتي حجمي تخمين زده مي‌شود. اعداد بي بعد قابل توجه در اين طرح، اعداد رايلي و لوييس هستند. روش معکوس تخمين پارامتر Levenberg–Marquardt در مرجع [٦] مورد استفاده قرار گرفته و در آن به محاسبه انتقال حرارت وجرم در داخل محيط متخلخل پرداخته می‌شود. مولفين براي حل عددي از معادلات لوييکوف استفاده کرده و مساله فيزکي شامل خشک کردن يک محيط متخلخل مرطوب يک بعدي مي‌باشد. در اين مساله از اندازه گيري هاي وابسته به زمان دما و رطوبت در داخل ناحيه محاسباتي استفاده شده است. محاسبه و تخمين عدد بايوت نيز با استفاده از روش گرادیانهای مزدوج در مرجع [۷] ارايه شده و از داده هاي اندازه گيري شده دما و رطوبت در داخل محيط متخلخل بهره گرفته شده است. شايان گفتن است که معادلات استفاده شده داراي فرض تعادل دمايي است. تخمين شار حرارتي به روش معکوس انتقال حرارت به کمک معادلات الحاقی و روش گرادیانهای مزدوج در مرجع [۸] مورد بررسي قرار گرفته است. در اين مقاله فرض مي‌شود که يک محفظه مستطيلي متخلخل در حالت جابجايي طبيعي در معرض شار حرارتي نامشخص قرار دارد و در اعداد رايلي متفاوت به حل مساله اقدام شده است. بررسي انتقال حرارت جابجايي آزاد در محفظه بسته حاوي ماده متخلخل در حالت پايا و با روش معکوس گراديانهاي مزدوج در مرجع [۹] انجام شده است که در آن از معادلات الحاقی برای حل عددی نيز استفاده شده است. محفظه حاوي ماده متخلخل در مجاورت شار حرارتي نا مشخص قرار دارد و براي تخمين آن اقدام شده است.

در اين پژوهش معادله انرژي هر يک از فازها با فرض نداشتن تعادل حرارتي بين آنها مورد مطالعه قرار گرفته است و با روش های معکوس هدايت حرارتي تخمين متوالی تابع(SFSM)[۲] و روش گراديان مزدوج و معادله الحاقی در حالت عدم تعادل حرارتي به تخمين شار حرارتي روي ديواره اقدام شده است. يکی از مواردی که حل معکوس را در شرايط عدم تعادل حرارتی مشکل مي کند اين است که در هنگام آزمايش، دماهای اندازه‌گيری شده توسط حسگرهای دما را نمی‌توان به طور مشخص به فاز جامد يا فاز سيال نسبت داد. بنابراين انجام آزمايش تنها با اندازه گيری دما روی يک سطح مرزی مشخص در ناحيه متخلخل مورد بررسی، امکان‌پذير است. در اين مقاله، امکان پذيری دست يابی به نتايج قابل قبول، به کمک روش های انتقال حرارت هدايتی معکوس برای محيط متخلخل، در شرايط عدم تعادل گرمايي مورد بررسی قرار گرفته است. استخراج معادلات الحاقی در حالت عدم تعادل حرارتی و محاسبه تابع گراديان از معادلات کوپله شده مربوطه از ويژگی های برجسته ديگر اين مقاله است. در اين مقاله فرض

مي‌شود كه شار حرارتي ديواره به هر دو فاز سيال و جامد كه در مجاورت ديوار هستند منتقل شده است. استفاده از مدل هاي معكوس در حالت عدم تعادل حرارتي در مواد متخلخل كاري نو در اين زمينه مي‌باشد و كاربردهاي صنعتي فراواني دارد.

## ۲- معادلات حاكم و شرايط مرزی

كانال حاوي ماده متخلخل در شكل (۱) به نمايش در آمده است كه شار حرارتي وابسته به زمان $q''$ به ديواره جامد وارد مي‌شود. با استفاده از فرض عدم تعادل حرارتي بين دو فاز معادلات انرژي در حالت گذرا به صورت روابط (۱) و (۲) خواهند بود[۱۰]:

$$\varepsilon(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = \nabla.(\varepsilon k_f \nabla T_f) + h(T_s - T_f) \qquad (۱)$$

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla.((1-\varepsilon)k_s \nabla T_s) - h(T_s - T_f) \qquad (۲)$$

كه $\varepsilon$ معرف نسبت تخلخل، $k_f$ و $k_s$ ضرايب هدايت حرارتي در فازهاي سيال و جامد و $h$ معرف ضريب انتقال حرارت جابجايي در داخل محيط متخلخل است. با فرض پوشش عايق در $y=0$ و ضريب هدايت حرارتي بزرگ جداره خارجي (يا سطح فعال)، شرايط مرزي برابرندبا (شكل (۱)):

$$T_s(x, y=H, t) = T_f(x, y=H, t) = T_w(t) \qquad (۳)$$

$$0 = \varepsilon k_f (\frac{\partial T_f}{\partial y})_{y=0} + (1-\varepsilon)k_s(\frac{\partial T_s}{\partial y})_{y=0} \qquad (۴)$$

$$T_f(x, y, t=0) = T_s(x, y, t=0) = T_0 \qquad (۵)$$

مدل هاي مختلف براي بيان شار حرارتي ديواره در مواد متخلخل ارايه شده است [۱۱]، كه مدل استفاده شده در اين حل معكوس به صورت رابطه (۶) است:

$$q''(t) = \varepsilon k_f (\frac{\partial T_f}{\partial y})_{y=H} + (1-\varepsilon)k_s(\frac{\partial T_s}{\partial y})_{y=H} \qquad (۶)$$

شكل بي‌بعد معادلات حاكم همراه شرايط مرزي ياد شده به صورت روابط (۷) و (۸) خلاصه مي‌شوند:

$$\varepsilon \frac{\partial \theta_f}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial y^*}(\varepsilon \frac{\partial \theta_f}{\partial y^*}) + A(\theta_s - \theta_f) \qquad (۷)$$

$$(1-\varepsilon)\frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f}\frac{\partial \theta_s}{\partial t^*} = k\frac{\partial}{\partial y^*}((1-\varepsilon)\frac{\partial \theta_s}{\partial y^*}) - A(\theta_s - \theta_f) \qquad (۸)$$

كه در آنها كميت هاي بدون بعد عبارتند از:

$$k = \frac{k_s}{k_f},\ A = \frac{hH^2}{k_f} \qquad (۹)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_{ref}},\ y^* = \frac{y}{H},\ t^* = \frac{\alpha_f t}{H^2} \qquad (۱۰)$$

شرايط مرزي بدون بعد به صورت روابط (۱۱) الی (۱۳) نوشته مي‌شوند:

$$\varepsilon(\frac{\partial \theta_f}{\partial y^*})_{y^*=0} + (1-\varepsilon)k(\frac{\partial \theta_s}{\partial y^*})_{y^*=0} = 0 \qquad (۱۱)$$

$$\theta_f(t^*=0) = \theta_s(t^*=0) = 0. \qquad (۱۲)$$

$$Q = \varepsilon(\frac{\partial \theta_f}{\partial y^*})_{y^*=1} + (1-\varepsilon)k(\frac{\partial \theta_s}{\partial y^*})_{y^*=1} \qquad (۱۳)$$

كه در آن $Q(t^*) = \frac{q''(t)H}{k_f \Delta T_{ref}}$ است.

## ۳- روش معكوس SFSM

بر اساس انتگرال دوهامل، اگر $\phi(x,t)$ پاسخ سيستم به اختلال واحد بوده و $q$ تابع اختلال باشد آنگاه پاسخ سيستم به صورت رابطه (۱۴) است[۱۲]:

$$T(x,t) - T_0 = \int_{\lambda=0}^{t} q(\lambda)\frac{\partial \phi(x, t-\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \qquad (۱۴)$$

اگر عبارت داخل انتگرال به صورت تفاضل پيشرو گسسته‌سازی شود، نتيجه رابطه (۱۵) بدست می‌آيد:

$$T(x,t) - T_0 = \sum_{n=1}^{M} q_n [\Delta\phi_{M-n}] \qquad (۱۵)$$

كه درآن $\Delta\phi_{M-n} = \phi_{M-n+1} - \phi_{M-n}$ و $q_n = q(\lambda_n)$. در شكل گسسته شده، $\Delta\phi$ ها، ضرايب حساسيت مي‌باشند و به عبارت ديگر $\Delta\phi_{i-j} = \partial T_i / \partial q_j$. ايده روش SFSM بر اين اصل استوار است كه براي تخمين شار حرارتي مجهول، از دماهايي استفاده شود كه از نظر زماني نزديک شار اتفاق افتاده باشند زيرا ضريب حساسيت نسبت به شار $q_r$ در زمانهاي خيلي جلوتر از $t_r$ به سمت صفر ميل مي‌كند[۱۲]. فرض كنيد كه تا مولفه M-1 ام شار حرارتي تخمين زده شده است و هدف بدست آوردن مولفه M ام شار حرارتي باشد. اگر از r زمان بعد از زمان M ام براي تعيين $q_M$ استفاده شود، با فرض اينكه كه شار حرارتي از زمان M ام تا r زمان بعد ثابت بماند، در اين صورت رابطه (۱۵) به رابطه (۱۶) تبديل مي‌شود:

$$T_{M+r-1} = T_0 + q_1\Delta\phi_{M+r-2} + q_2\Delta\phi_{M+r-3} + \ldots + q_{M-1}\Delta\phi_r + q_M\phi_r \qquad (۱۶)$$

حال اگر تابع خطاي S نسبت به $q_M$ مينيمم شود، نتيجه مورد نظر بدست خواهد آمد.

$$S = \sum_{i=1}^{r}[Y_{M+i-1} - T_{M+i-1}]^2 \qquad (۱۷)$$

كه در آن Y مقادير اندازه گيري شده است. با قرار دادن

رابطه (۱۸) بدست می‌آید: $\partial S/\partial q_M = 0.$

$$q_M = \frac{\sum_{i=1}^{r} \phi_i \left[ Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1} \right]}{\sum_{i=1}^{r} \phi_i^2} \tag{۱۸}$$

که در آن:

$$\hat{T}_{M+i-1} = T_0 + q_1 \Delta\phi_{M+i-2} + q_2 \Delta\phi_{M+i-1} + \dots + q_{M-1}\Delta\phi_i \tag{۱۹}$$

در مساله انتقال حرارت در کانال حاوي ماده متخلخل با معادلات (۷) و (۸)، با مشتق‌گيري از مولفه دماي $\theta$ نسبت به شار مجهول Q، مساله حساسيت به صورت روابط (۲۰) و (۲۱) خواهد بود:

$$\varepsilon \frac{\partial Z_f}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial y^*}\left(\varepsilon \frac{\partial Z_f}{\partial y^*}\right) + A\left(Z_s - Z_f\right) \tag{۲۰}$$

$$(1-\varepsilon)\, \frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f} \frac{\partial Z_s}{\partial t^*} = k \frac{\partial}{\partial y^*}\left((1-\varepsilon)\frac{\partial Z_s}{\partial y^*}\right) - A\left(Z_s - Z_f\right) \tag{۲۱}$$

و

$$Z_f(t^*_{M-1}) = Z_s(t^*_{M-1}) = 0. \tag{۲۲}$$

$$0 = \varepsilon\left(\frac{\partial Z_f}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} + (1-\varepsilon)k\left(\frac{\partial Z_s}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} \tag{۲۳}$$

$$1 = \varepsilon\left(\frac{\partial Z_f}{\partial y^*}\right)_{y^*=1} + (1-\varepsilon)k\left(\frac{\partial Z_s}{\partial y^*}\right)_{y^*=1} \tag{۲۴}$$

کـه در آن $Z = \partial T_k / \partial Q_M$ بـوده و k محـل سنـسور اسـت. همانگونه که مشخص است معادلـه حـساسيت مـستقل از شـار مجهول مي‌باشد. اگر $Q^*$ شاري حدس زده شده باشد و $\theta^*$ دما در محل سنسور به‌ازاي اين شار باشد، در اين صورت با توجه به (۱۸) مي‌توان شار مجهول را به صورت رابطه (۲۵) محاسـبه کرد:

$$Q_M = Q^* + \frac{\sum_{i=1}^{r} Z_{k,i}\left[ Y_k^{M+i-1} - \theta_k^{*M+i-1} \right]}{\sum_{i=1}^{r} Z_{k,i}^2} \tag{۲۵}$$

پس از تخمين شار حرارتی، توزيع دما در لحظه M با حل معادلات انرژی در دو فاز بدست مي‌آيند. در مساله هدايت معکوس گفته شده، حسگر ها روي جداره جامد تحت اثر شار حرارتی و يا روی ديواره عايق قرار داده شده و دماهاي اندازه گيري شده (Y) از اين نقاط بدست مي‌آيند. شار حرارتي اعمال شده به ديواره به صورت پالس مثلثی مطابق شکل (۱) بوده و دماهاي بدست آمده از اين شار حرارتي در محل ديواره از حل عددي معادلات (۷و۸) به همراه شرايط مرزي (۱۳-۱۱) حاصل مي‌شوند. دماهاي بدست آمده در محل سنسور، با خطاهايي با توزيع نرمال و انحراف معيار S.D. ، نويزي شده است. خطاي نويز با روش مونت کارلو ايجاد مي‌شود.

## ٤- روش گراديانهای مزدوج و معادلات الحاقی

برای يافتن شارحرارتی با روش گراديانهای مزدوج ، تابع خطا مشابه حالت قبل، به صورت رابطه (۲۶) تعريف مي‌شود:

$$S(Q) = \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\theta(t) - Y(t)\right)_i^2 \, dt \tag{۲۶}$$

که در آن Y مقـادير انـدازه‌گيـری شـده در محـل سنـسور و $\theta$ مقادير تخمين زده شده برای يافتن Q در محـل سنـسور اسـت. گفتنی است که n=۱ برای يـک عـدد سنـسور مـی‌باشـد. در ايـن روش برای يافتن شار حرارتی معکوس از روش تکرار اسـتفاده مي‌شود که به صورت رابطه (۲۷) قابل بيان است:

$$Q^{k+1} = Q^k - \beta^k d^k \tag{۲۷}$$

که در آن $\beta$، اندازه قدم[۳] و **d**، جهـت مـزدوج[۴] مـی‌باشـد. گفتنـی است که جهت جـستجو در ايـن روش، متناسـب بـا گراديـان S نسبت به Q است. بـرای يـافتن ايـن گراديـان از معادلـه الحـاقی استفاده مي‌شـود. مـی‌تـوان حـساسيت دمـا[۵] ($\tilde{\theta}$) را بـه عنـوان مشتق جهتی $\theta$ نسبت به Q در جهت $\Delta Q$ تعريف کـرد. در ايـن صـورت، مـی‌تـوان معادلـه حـساسيت[۶] را از معـادلات (۷و۸) اسـتخراج کـرد. معادلـه حـساسيت بدسـت آمـده از ايـن روش، مشابه (۲۰) و(۲۱) بوده و کافی اسـت در ايـن معـادلات، $Z = \tilde{\theta}$ قرار داده شود. شرايط مرزی مربوطه عبارتند از:

$$\tilde{\theta}_f(t^*_{M-1}) = \tilde{\theta}_s(t^*_{M-1}) = 0. \tag{۲۸}$$

$$0 = \varepsilon\left(\frac{\partial \tilde{\theta}_f}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} + (1-\varepsilon)k\left(\frac{\partial \tilde{\theta}_s}{\partial y^*}\right)_{y^*=0} \tag{۲۹}$$

$$\Delta Q = \varepsilon\left(\frac{\partial \tilde{\theta}_f}{\partial y^*}\right)_{y^*=1} + (1-\varepsilon)k\left(\frac{\partial \tilde{\theta}_s}{\partial y^*}\right)_{y^*=1} \tag{۳۰}$$

$$\tilde{\theta}_f(y^*=1) = \tilde{\theta}_s(y^*=1) \tag{۳۱}$$

همانگونه که پيشتر گفته شد مشتق جهتـی S را مـی‌تـوان بـرای تعريف گراديان ($\nabla S$) نسبت به Q به کار برد.

$$D_{\Delta Q}\, S(Q) = \langle \nabla S \,|\, \Delta Q \rangle \tag{۳۲}$$

رابطه (۳۲)، برای هر جفت تابع بـرداری F و G بـا m مولفـه بـه صورت رابطه (۳۳) قابل تعريف است:

$$\langle F \,|\, G \rangle = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{t_f} \int_A F_i\, G_i \, dA\, dt \tag{۳۳}$$

که اگرF و G توابعی اسکالر فرض شوند، m را می‌توان در (۳۳) مساوی واحد قرار داد. بـا توجـه بـه (۲۶)، مـشتق جهتـی S بـه صورت رابطه (۳۴) است:

$$D_{\Delta Q}\,S(Q) = 2\int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{n} (\theta - Y)_i^2 \; \tilde{\theta}_i \; dt \qquad (۳۴)$$

که تمام متغیر ها در محل سنسور محاسبه می‌شوند. طرف سمت راست معادله (۳۴) را می توان با استفاده از خواص تابع دلتای دیراک به صورت انتگرال روی سطح و زمان نوشت.

$$D_{\Delta Q}\,S(Q) = 2\int_0^{t_f}\int_A (\theta - Y)\,\tilde{\theta}\sum_{i=1}^{n}\delta(r-r_i)\; dA\, dt \qquad (۳۵)$$

حال اگر متغیرهای الحاقی $\bar{U} = (\bar{\theta}_f , \bar{\theta}_s)$ به عنوان ضرایب لاگرانژ در معادلات حساسیت تعریف شوند، در این صورت با توجه به معادلات حاکم (۷) و (۸) و مقداری عملیات ریاضی، معادله (۳۵) به شکل رابطه (۳۶) قابل تبدیل است:

$$\begin{aligned} D_{\Delta Q}\,S(Q) = & \int_0^{t_f}\int_0^1 \Big(2(\theta-Y)\,\delta(y^*-y_0) - \varepsilon\frac{\partial(\bar\theta_f)}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial y}\big(\varepsilon\frac{\partial\bar\theta_f}{\partial y^*}\big) + A(\bar\theta_f-\bar\theta_s)\Big)\;\tilde\theta_f\,dy^*\,dt^* \\ & + \int_0^{t_f}\int_0^1 \Big(-(1-\varepsilon)\frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f}\frac{\partial(\bar\theta_s)}{\partial t^*} - k\frac{\partial}{\partial y}\big((1-\varepsilon)\frac{\partial\bar\theta_s}{\partial y^*}\big) + A(\bar\theta_s-\bar\theta_f)\Big)\;\tilde\theta_s\,dy^*\,dt^* \\ & + \int_0^1(\varepsilon\,\bar\theta_f\,\tilde\theta_f)_{t_f}\,dy^* + \int_0^1((1-\varepsilon)\,\bar\theta_s\,\tilde\theta_s)_{t_f}\,dy^* \\ & - \int_0^{t_f}\Big((\varepsilon\frac{\partial\bar\theta_f}{\partial y^*}\tilde\theta_f)_0 + ((1-\varepsilon)k\frac{\partial\bar\theta_s}{\partial y^*}\tilde\theta_s)_0\Big)\,dt^* \\ & + \int_0^{t_f}\Big((\varepsilon\frac{\partial\bar\theta_f}{\partial y^*}\tilde\theta_f)_1 + ((1-\varepsilon)k\frac{\partial\bar\theta_s}{\partial y^*}\tilde\theta_s)_1\Big)\,dt^* \\ & - \int_0^{t_f}\Big((\varepsilon\bar\theta_f\frac{\partial\tilde\theta_f}{\partial y^*})_1 + ((1-\varepsilon)k\bar\theta_s\frac{\partial\tilde\theta_s}{\partial y^*})_1\Big)\,dt^* \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

و معادله دیفرانسیل الحاقی به صورت روابط (۳۷) و (۳۸) خواهد بود:

$$2(\theta-Y)\,\delta(y^*-y_0) - \varepsilon\frac{\partial(\bar\theta_f)}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial y}\big(\varepsilon\frac{\partial\bar\theta_f}{\partial y^*}\big) + A(\bar\theta_f-\bar\theta_s) = 0 \qquad (۳۷)$$

$$-(1-\varepsilon)\frac{(\rho c)_s}{(\rho c)_f}\frac{\partial(\bar\theta_s)}{\partial t^*} - k\frac{\partial}{\partial y}\big((1-\varepsilon)\frac{\partial\bar\theta_s}{\partial y^*}\big) + A(\bar\theta_s-\bar\theta_f) = 0 \qquad (۳۸)$$

$$\bar\theta_f(t_f) = 0, \quad \bar\theta_s(t_f) = 0 \qquad (۳۹)$$

$$(\varepsilon\frac{\partial\bar\theta_f}{\partial y^*})_0 + ((1-\varepsilon)k\frac{\partial\bar\theta_s}{\partial y^*})_0 = 0 \qquad (۴۰)$$

$$(\varepsilon\frac{\partial\bar\theta_f}{\partial y^*})_1 + ((1-\varepsilon)k\frac{\partial\bar\theta_s}{\partial y^*})_1 = 0 \qquad (۴۱)$$

و در این صورت:

$$\begin{aligned} D_{\Delta Q}\,S(Q) = & \int_0^{t_f} -\Big((\varepsilon\frac{\partial\tilde\theta_f}{\partial y^*})_1 + ((1-\varepsilon)k\frac{\partial\tilde\theta_s}{\partial y^*})_1\Big)\;\bar\theta(1,t^*)\;dt^* \\ = & \int_0^{t_f} -\Delta Q\;\bar\theta(y_0,t^*)\;dt^* \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

و گرادیان S به صورت رابطه (۴۳) تعریف می‌شود:

$$\nabla S(Q) = -\bar\theta(1,t^*) \qquad (۴۳)$$

با توجه به معادله (۴۳) بدست می‌آید:

$$d^k = \nabla S(Q^k) + \gamma^k\, d^{k-1} \qquad (۴۴)$$

و ضریب مزدوج $\gamma$ از معادله Fletcher-Reeves محاسبه خواهد شد[۱٤]:

$$\gamma^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f}\{\nabla S(Q^k)\}^2\,dt}{\int_{t=0}^{t_f}\{\nabla S(Q^{k-1})\}^2\,dt} \qquad (۴۵)$$

بطوریکه $\gamma^0 = 0$. اگر در معادله حساسیت (۳۰)، $\Delta Q^k = d^k$ قرار داده شود، آنگاه مقادیر $\tilde\theta$ در محل سنسور محاسبه خواهد شد و در این صورت ضریب $\beta$ در (۲۷) قابل محاسبه است.

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f}\Big\{[\theta(y_0,t,Q^k) - Y(t)]\times\tilde\theta(y_0,t,d^k)\Big\}dt}{\int_{t=0}^{t_f}[\tilde\theta(y_0,t,d^k)]^2\,dt} \qquad (۴۶)$$

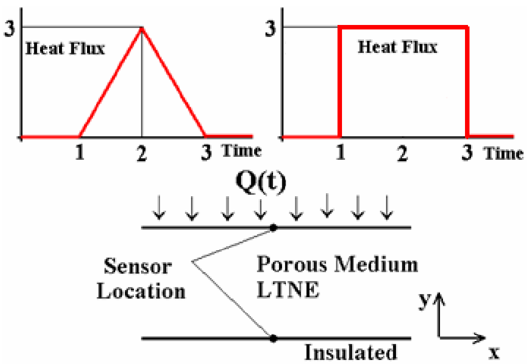
## ۵- نتایج و بحث

شار حرارتی اعمال شده به دیواره کانال در روش انتقال حرارت معکوس شار مثلثی مطابق شکل (۱) است. این شار حرارتی در زمانهای $\tau < ۳$ و $\tau > ۱$ برابر صفر است. درشکل (۲)، شار حرارتی گفته شده، با روش SFSM تخمین زده شده است. در این مورد، داده های اندازه گیری شده دما از محل دیواره عایق انتخاب شده اند و فرض شده است که این مقادیر اندازه گیری شده بدون نویز هستند. تخمین شار حرارتی با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی برای عدد r صورت گرفته است. همانگونه که انتظار می‌رود استفاده از ضریب r = ۱ در این روش منجر به تخمین دقیق شار حرارتی مثلثی (-Exact

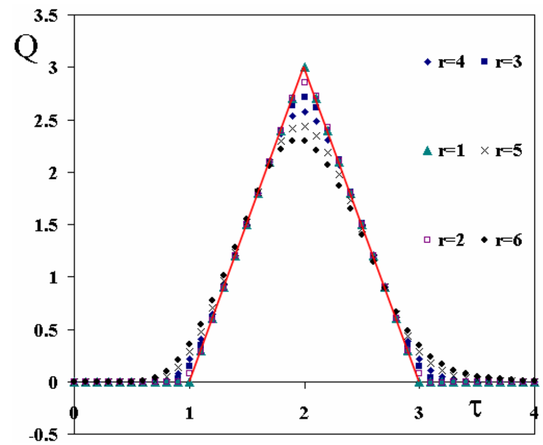
Matching) شده است. با افزایش عدد r انحراف شار حرارتی تخمین زده شده از شار حرارتی واقعی افزایش می‌یابد که این افزایش به دلیل اضافه شدن خطای بایاس[۷] ناشی از مرتب‌سازی[۸] به دلیل افزایش r است. با نویزدار شدن داده ها، تخمین شار حرارتی نیاز به مرتب‌سازی دارد تا از نوسانات شار حرارتی تخمین زده شده جلوگیری شود. در شکل (۳)، شارحرارتی به ازای مقادیر مختلف r و با استفاده از داده‌های نویزدار تخمین زده شده است. در این مورد سنسور در محل دیواره عایق قرار گرفته است. همانگونه که مشخص است، با افزایش ضریب r نوسانات شار تخمین زده شده نسبت به شار واقعی کمتر بوده ولی خطای بایاس افزایش خواهد یافت. با بیان دیگر با افزایش این ضریب، خطای واریانس کاهش خواهد یافت. ترکیب دو خطای یاد شده معیاری مناسب برای بیان خطای شار تخمین زده شده است. به طور مشابه می‌توان حسگر را در محل دیواره فعال (دیواره تحت اثر شار حرارتی) قرار داده و نسبت به تخمین شار واقعی وابسته به زمان اقدام کرد. در شکل (۴) شار حرارتی تخمین زده شده در مقادیر مختلف r و با وجود داده‌های اندازه‌گیری شده نویزدار در محل دیواره فعال به نمایش در آمده است. با افزایش ضریب r نوسانات شار تخمین زده شده نسبت به شار واقعی کمتر بوده و خطای واریانس کم کم کاهش یافته است. خطای کلی که اثرات واریانس و بایاس ناشی از مرتب سازی را در خود دارد، به صورت $\sqrt{\left(Q-\hat{Q}\right)^2/N}$ محاسبه شده بطوریکه Q شار تخمین زده شده با اندازه‌گیری های آلوده با نویز و $\hat{Q}$ شار حرارتی واقعی مورد انتظار می‌باشد. همچنین N تعداد مولفه‌های شار تخمین‌زده‌شده است. اگر Q شار تخمین‌زده‌شده با اندازه‌گیری‌های بدون‌نویز باشد، خطای بدست آمده همان بایاس ناشی از مرتب سازی مي باشد. خطای واریانس نیز از کم کردن خطای اضافه شده بایاس در روش Regularization بدست خواهد آمد. شکل (۵) خطای روش انتقال حرارت معکوس را در هر دو حالت وجود سنسور نشان داده است. همانگونه که از شکل مشخص است در این روش تخمین شار حرارتی یک نقطه بهینه برای انتخاب ضریب r وجود دارد. به بیان دیگر تغیرات خطای بایاس و خطای واریانس در روش انتخاب شده در مقابل یکدیگر قرار دارد و افزایش یکی منجر به کاهش دیگری خواهد شد. این نقطه بهینه در هر دو حالت در شکل (۵) نشان داده شده است. توانایی روش SFSM در تخمین شار پله ای در شکل (۶) نشان داده شده است. در این شکل شار حرارتی تخمین زده شده در مقادیر مختلف r و با وجود داده‌های اندازه‌گیری شده نویزدار در محل دیواره فعال به نمایش در آمده است. نقطه بهینه در این حالت ضریب r = ۲ می‌باشد.

شکل (۷) و شکل (۸) تخمین شار حرارتی با استفاده از روش گرادیان های مزدوج و معادله الحاقی می‌باشند. همانگونه که پیشتر گفته شد، معادلات حاکم در حالت عدم تعادل حرارتی به دو معادله مزدوج الحاقی منجر شدند و حل این معادلات به محاسبه تابع گرادیان منجر خواهد شد. حل این معادلات الحاقی در مواد متخلخل در حالت عدم تعادل حرارتی بین دو فاز جامد و سیال کار جدیدی در این زمینه است. از دشواری های این روش در مواد متخلخل این است که معادلات الحاقی مي‌بايست به درستی استخراج و حل شوند. زیرا در غیر این صورت تابع گرادیان و جهت جستجوی مربوطه نادرست بوده و شار حرارتی تخمین‌زده‌شده تحت تاثیر قرار خواهد گرفت. نکته حایز اهمیت این است که در صورت بروز هر گونه خطا در استخراج و یا حل معادلات الحاقی و برآورد نادرست تابع گرادیان، زمان مورد نیاز برای تخمین مجهول به شدت طولانی خواهد شد. روش گرادیان های مزدوج و معادلات الحاقی در مقایسه با روش SFSM سریع‌تر به تخمین شار حرارتی مجهول منجر خواهد شد. نکته جالب در این روش اینجاست که در حل معادلات مواد متخلخل، اگر دما های اندازه گیری شده دارای اغتشاشات زیادتری باشند، روش معکوس گرادیانهای مزدوج بسیار کاراتر خواهد بود. شکل (۷) و شکل (۸) شار حرارتی تخمین زده شده را در حالت‌های مختلف داده‌های اندازه‌گیری شده نویز دار نشان می‌دهد. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که حتی با افزایش اختلالات اندازه‌گیری، روش معادلات الحاقی روشی مفید است. همانگونه که گفته شد، اطمینان از درستی محاسبه تابع گرادیان در معادلات الحاقی بسیار مهم است بطوریکه محاسبه جهت نادرست کمینه‌سازی خطا، منجر به نوسانات شدید و گاهی غیر کاهنده تابع خطا می‌شود. به منظور اطمینان از درستی داده های بدست آمده، تابع گرادیان را می‌توان از روش مستقیم مشتق گیری عددی نیز محاسبه کرد و با مقادیر خروجی روش استفاده شده مقایسه نمود. روش مستقیم تخمین گرادیان بسیار زمان‌بر بوده و تمامی مولفه‌های تابع گرادیان می‌بایست بصورت مجزا از مولفه‌های شار حرارتی استخراج شوند. درشکل (۹) تابع گرادیان در سه مرحله از محاسبات شار حرارتی، ارایه شده است. مقایسه بین مقادیر خروجی روش CGM و روش مستقیم تخمین شار حرارتی، درستی نتایج بدست آمده از روش معادلات الحاقی را اثبات میکند. جدول( ۱) نیز نشان دهنده مقادیر خطا در هر دو حالت

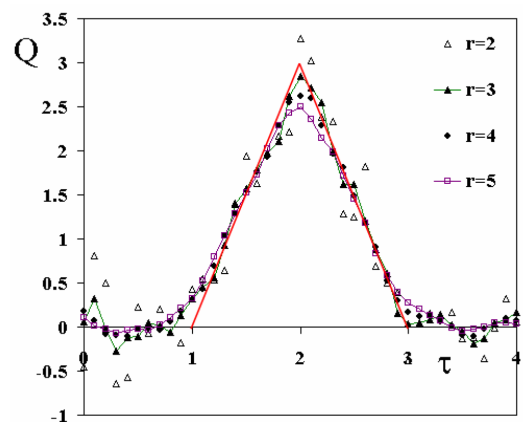
وجود حسگر است.



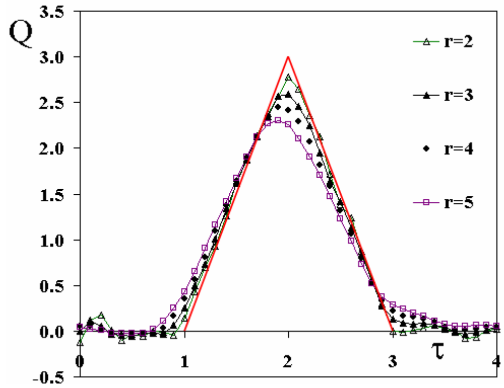

شکل (۱): هندسه مساله و دستگاه مختصات



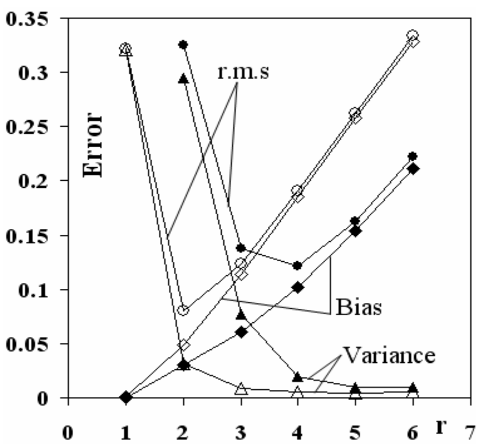

شکل (۲): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش SFSM با داده های بدون نویز، سنسور در محل دیواره عایق



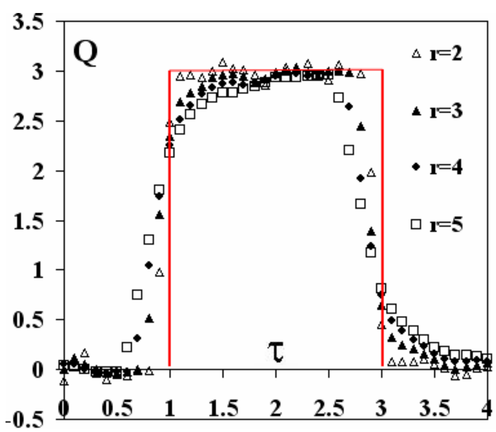

شکل (۳): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش SFSM با داده های نویز دار S.D. = ۰,۰۵، سنسور در محل دیواره عایق



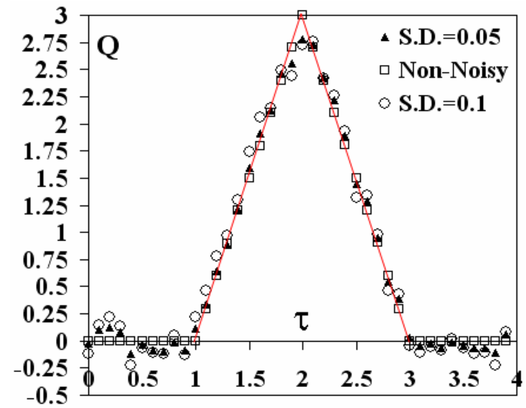

شکل (٤): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش SFSM با داده های نویز دار S.D. = ۰,۰۵، سنسور در محل دیواره تحت اثر شار



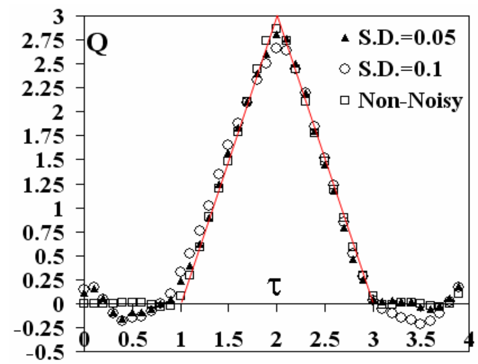

شکل (۵): مقایسه خطا در روش SFSM در حالت S.D. = ۰,۰۵، داده های تو خالی مربوط به سنسور در محل دیواره تحت اثر شار، داده های توپر مربوط به سنسور در محل دیواره عایق



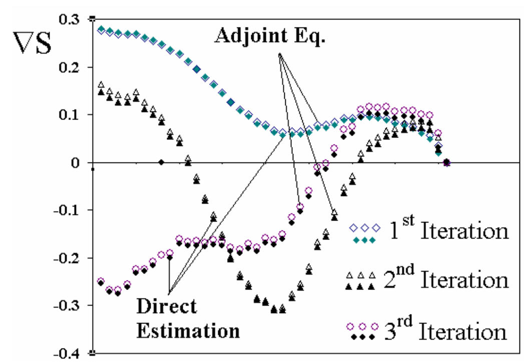

شکل (٦): تخمین شار حرارتی پله ای با روش SFSM با داده های نویز دار S.D. = ۰,۰۵، سنسور در محل دیواره تحت اثر شار




شکل ( ۷ ): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی، سنسور در محل دیواره تحت اثر شار




شکل (۸): تخمین شار حرارتی مثلثی با روش گرادیانهای مزدوج و معادلات الحاقی، سنسور در محل دیواره عایق




شکل (۹): بررسی درستی مقادیر مولفه های گرادیان در روش معادلات الحاقی با استفاده از روش محاسبه مستقیم

جدول( ۱ ): مقایسه خطا ها در روش گرادیان های مزدوج

| Error | S.D. = ۰,۰۵ | S.D. = ۰,۱ | Non-Noisy |
|---|---|---|---|
| Active wall | ۰,۰۸۱۵۷ | ۰,۱۴۵۶۷ | ۰,۰۰۱۸۷ |
| Inactive wall | ۰,۰۹ | ۰,۱۳۹۱۸ | ۰,۰۳۶۸۲ |

## ۶- مراجع


[۱] Prud’homme, M.; Jasmin, S.; "Inverse solution for a biochemical heat source in a porous medium in the presence of natural convection", Chemical Engineering Science, vol. 61, pp. 1667-1675, 2006.

[۲] Znaidia, S.; Mzali, F.; Sassi, L.; Mhimid, A.; Jemni, A.; Ben Nasrallah, S.; Petit, D.; "Inverse problem in a porous medium: estimation of effective thermal properties", Inverse Problems in Science and Engineering, vol. 13:6, pp. 581 – 593, 2005.

[۳] Jasmin, S.; Prud’homme, M.; "Inverse determination of a heat source from a solute concentration generation model in porous medium", Int. Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 32, pp. 43–53, 2005.

[٤] Prud’homme, M.; Jiang, H.; "inverse determination of concentration in porous medium with thermosolutal convection", International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 30, no. 3, pp. 303-312, 2003.

[۵] Prud_homme, M.; Jasmin, S.; "Determination of a heat source in porous medium with convective mass diffusion by an inverse method", Int. J. Heat and Mass Transfer, vol. 46, pp. 2065–2075, 2003.

[٦] Dantas, L.B.; Orlande, H.R.B.; Cotta, R.M.; "An inverse problem of parameter estimation for heat and mass transfer in capillary porous media", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 46, pp. 1587–1598, 2003.

[۷] Cheng-Hung Huang; Chun-Ying Yeh; "An inverse problem in simultaneous estimating the Biot numbers of heat and moisture transfer for a porous material", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 45, pp. 4643–4653, 2002.

[۸] Prud’homme, M.; Nguyen, Hung; "Solution of the inverse steady state convection problem in a porous medium by Adjoint equations", Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 28, no. 1, pp. 11-21, 2001.

[۹] Prud'homme, M.; Jasmin, S.; "Component analysis of a steady inverse convection problem solution in a porous medium", Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 28, no. 7, pp. 911-921, 2001.

[۱۰] Kaviany, M.; Principle of heat transfer in porous media, 2nd ed., Springer, Berlin, 1995.

[۱۱] Alazmi, B.; Vafai, K.; "Constant wall heat flux boundary conditions in porous media under local thermal non-equilibrium conditions", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 45, pp. 3071–3087, 2002.

[۱۲] Beck, J. V.; Blackwell, B.; Charles R.; Jr. St. Clair; Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, Wiley-Interscience, 1985.

[۱۳] Kurpisz, K.; Nowak, A. J.; Inverse Thermal Problems, 2nd ed., Computational Mechanics Publications, Southampton, 1995.

[۱٤] Necati Ozisik, M.; Orlande, H. R. B.; Inverse Heat Transfer-Foundation and Applications, Taylor & Francis, USA, 2000.


## ۷- زیرنویس ها

[1] Adjoint Equation
[2] Sequential Function Specification Method
[3] Step Size
[4] Conjugate Search Direction
[5] Temperature Sensitivity
[6] Sensitivity Equation
[7] Bias Error
[8] Regularization