# شبيه سازي عددي جريان سيال لزج با استفاده از روش المان‌هاي مرزي

قاسم حيدري نژاد[i]; جعفر اسماعيليان[ii]

## چكيده

به منظور استفاده از روش المانهاي مرزي در حل مسايل سيالات, بايستي علاوه بر انفصال روي مرز، تعدادي سلول داخلي براي محاسبه انتگرال‌هاي ناشي از ترم‌هاي جابجايي نيز در نظر گرفت. براي اين منظور از روش تابع پنالتي كه كاربرد زيادي در روش المان‌هاي محدود دارد استفاده شده است. با استفاده از اين روش، ترم فشار از معادلات حاكم حذف شده و معادلات به شكل معادلة ناوير در الاستواستاتيک تبديل مي‌شود. اين روش از برتري‌هاي ويژه‌اي برخوردار است كه از جمله مي‌توان به سادگي استفاده از انواع المانها، محاسبه دقيق مشتق‌ها توسط تابع حل اساسي در هر نقطه دلخواه از دامنه و كاهش حافظه مورد نياز و تعداد محاسبات در الگوريتم تكرار اشاره كرد. در اين تحقيق دو روش مختلف براي محاسبه مشتق‌هاي داخلي بررسي شد و معادلات حاصل براي حل جريان داخل حفره تا ميزان عدد رينولدز ۴۰۰ و جريان پشت پله تا عدد رينولدز ۷۵ مورد استفاده قرار گرفت. نتايج حاصل از شبيه سازي عددي با كارهاي قبلي مقايسه گرديد كه بر خلاف كاهش زمان محاسبات و حافظة لازم از دقت بسيار خوبي برخوردار است.

## كلمات كليدي

روش المانهاي مرزي، تابع پنالتي، جريان حفره، جريان پله

# *Viscous Flow Analysis using Boundary Elements Method*

Ghassem Heidarinejad, Jafar Esmaeelian

***ABSTRACT***

In this research, applications of the Boundary Element Method to viscous flow are investigated. The BEM formulation allows a boundary-only solution for linear stokes flow. For higher speed flows in which the non-linear convective effects cannot be ignored, a volume integral must be retained. The proposed formulation is based on analogy between Navier's equations in elastostatics and Navier-Stokes equations expressed by using a penalty function. By using penalty function formulation, pressure term is eliminated and Navier-Stokes equations are converted to Navier equations in elastostatics. In many previous works, potential fundamental solution was used for solving viscous fluid flow with BEM but in this research elastostatics fundamental solution is used. Finally, some two-dimensional examples are provided to validate the presented approach. It is found that the boundary element method gives accurate solutions and it is more economical than other methods since the application of the method requires discretization only on the boundaries of the domain and thus it reduces the spatial dimensions of the problem by one.

***KEYWORDS***

i استاد بخش مهندسي مكانيک، دانشگاه تربيت مدرس Email: gheidari@modares.ac.ir
ii دانشجوي كارشناسي ارشد بخش مهندسي مكانيک، دانشگاه تربيت مدرس Email: esmaeleian@bhrc.ac.ir

Boundary Elements Method, Penalty function, Cavity flow, Step flow

## ۱- مقدمه

معادلات انتگرالي براي سيال تراکم‌ناپذير لزج در سال ۱۹۲۷ توسط اوسين براي جريان دوبعدي و سه بعدي ارائه شد [۱]. آکريوس و يانجرن در سال ۱۹۷۵ روش انتگرال عددي را براي جريان در طول اجسام و براي معادلة استوکس بکار بردند که اولين کاربرد روش المان‌هاي مرزي براي جريان سيال لزج بود [۲]. در سال ۱۹۷۷ وو و تامسون از پيشنهاد لايت‌هيل براي بکارگيري ورتيسيتي به عنوان متغيرهاي ثانويه براي بيان معادلات ناوير-استوکس استفاده کردند [۳]. در اين روش، معادلات حاکم بر سيالات به دو بخش سينتيک و سينماتيک تقسيم مي‌شود. قسمت سينتيک، تغييرات ميدان ورتيسيتي[۱] با زمان را بيان مي کند که شامل معادله انتقال ورتيسيتي است. قسمت سينماتيک، ميدان سرعت را به ورتيسيتي مربوط مي‌کند که معادلات پواسون و لاپلاس را شامل مي‌شود. وو و تامسون اين فرمولبندي را براي مطالعه جريان اطراف ايرفويل به کمک به هم پيوستن روش تفاضل‌هاي محدود و معادلات انتگرال مرزي توسعه دادند اما همچنان مشکلاتي در مرزهاي جامد وجود داشت [۳]. کار بعدي توسط بوش و تانر انجام شد که شامل جملات غيرخطي فرمولاسيون ارائه شده توسط اوسين بود و براي جريان غير قابل تراکم و پايدار انجام گرفت [۴]. بوش اين روش را بوسيله ترکيب کردن حل اساسي با جملات جابجايي خطي شده گسترش داد و مثال‌هاي گوناگوني را براي جريان اطراف سيلندر حل نمود. ولي نتايج حاکي از اين بود که حل غير خطي براي اعداد رينولدز بزرگتر از ۱۰ کارايي ندارد. اونيشي و توساکا در سال ۱۹۸۵ فرمولبندي ديگري را براي جابجايي طبيعي پيشنهاد دادند که در آن ورتيسيتي و تابع جريان به عنوان متغيرهاي اصلي در نظر گرفته مي‌شدند[۵]. اين فرمولبندي کاربرد عمومي ندارد زيرا کمتر شرايط مرزي يک مساله بصورت ورتيسيتي و تابع جريان و گراديان آنها بيان مي‌شود. کاکودا و توزاکا در سال ۱۹۸۶ روش بوش و تانر را بوسيله يک الگوريتم نيوتن- رافسون براي حل دستگاه معادلات غير خطي به دست آمده گسترش دادند [۶]. طي سال‌هاي اخير نيز کارهاي زيادي براي حل مستقيم جريان سيال غير قابل تراکم ويسکوز صورت گرفته است که در همه آنها از معادلات انتگرال اوسين استفاده شده و روش حل بوش و تانر دنبال شده است [۷]. محققين طي سال‌هاي اخير به دنبال روش‌هايي بوده‌اند که ترم‌هاي غير خطي را لحاظ نموده و به انتگرال روي مرز تبديل نمايند. بعنوان مثال روش ديگري که توسط وو پيشنهاد شده و اسکرگت و همکارانش آنرا توسعه دادند روش سرعت- ورتيسيتي است [۸]. اين روش سينتيک و سينماتيک مساله را از هم جدا مي‌کند. معادلات انتگرال تنها براي معادله پواسون که سينماتيک مساله را بيان مي‌کند نوشته مي‌شوند و از روش المان‌هاي محدود براي تحليل قسمت سينتيک استفاده مي‌شود [۸].

بر خلاف وجود مشکلات ياد شده در مورد کاربرد روش المان‌هاي مرزي به ويژه در مسايل غيرخطي مانند جريان سيالات، ويژگي‌هاي اين روش به گونه‌ايست که به نظر مي‌رسد پرداختن به روش المان‌هاي مرزي همچنان زمينه تحقيقاتي نو و چالشي براي روش‌هاي عددي به شمار مي آيد. در اين تحقيق کاربرد روش المان‌هاي مرزي در حل معادلات ناوير- استوکس ارائه شده است. اين معادلات با استفاده از روش تابع پنالتي به فرم معادلات ناوير در الاستواستاتيک تبديل شده و الگوريتم و فرمول‌بندي براي حل اين معادلات بر اساس روش انتگرال داخلي بيان شده است. در بيشتر کارهاي قبلي انجام شده از تابع حل اساسي معادله لاپلاس استفاده شده است ولي در اين تحقيق از تابع حل اساسي معادله ناوير و از دو روش مختلف براي محاسبه مشتقات در نقاط داخلي استفاده شده است تا بازه عدد رينولدز قابل استفاده افزايش يابد. همانطور که گفته شد در اين روش، جملات جابجايي مانند نيروهاي حجمي در نظر گرفته شده و انتگرال حاصل از آنها توسط تعدادي المان داخلي محاسبه مي‌شود. گرچه استفاده از المان‌هاي داخلي از برتري‌هاي روش مي‌کاهد ولي بايد توجه داشت که اين المانها فقط براي محاسبه انتگرالهاي داخلي در نظر گرفته مي‌شوند و دستگاه معادلات تنها بر روي مرز تشکيل مي‌شود.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات پيوستگي و بقاي اندازه حرکت خطي براي جريان سيال تراکم‌ناپذير لزج در حالت پايا در سيستم مختصات کارتزين به صورت رابطه ۱ است [۹]:

$$\begin{cases} v_{i,i}=0 \\ v_j v_{i,j} = -\frac{1}{\rho_0} p_{,i} + \nu (v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر مقادير $V_0$ و $L$ به عنوان مقياس‌هاي سرعت و طول در نظر گرفته شده و عدد رينولدز به صورت $V_0 L/\nu$ تعريف شود معادلات حاکم بر سيال به صورت بي‌بعد توسط معادلات (۲) بيان مي‌شود [۹]:

$$\begin{cases} v_{i,i} = 0 \\ v_j v_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{Re}(v_{i,j} + v_{j,i})_{,j} \end{cases} \quad (۲)$$

در اين معـادلات v سـرعت، $p$ فـشار، $\nu$ لزجـت سـينماتيكي و $\rho_0$ چگالي سيال مي‌باشند.

تابع پنالتي در روش المان محدود كاربرد زيادي دارد و از آن براي از بين بردن ترم فشار از معادلة ناوير استوكس استفاده مي‌شود. براي اين منظور فشار به صورت رابطه (۳) تقريب زده شده و دو معادله پيوستگي و اندازه حركت خطي به يك معادله كه حل اساسي آن موجود است تبديل مي‌شوند [۱۰]:

$$p = -\lambda v_{i,i} \quad (۳)$$

كه $\lambda$ به عنوان پارامتر پنالتي شناخته مي‌شـود. چـون فـشار داراي مقدار محدود است، هنگامي كه تابع $\lambda$ برابر بي‌نهايت در نظر گرفته شود مقدار $v_{i,i}$ به سمت صفر ميل مي‌كند. اين امر موجب برآورده شدن معادلة پيوستگي خواهد شد اما در محاسبات واقعي مقدار $\lambda$ يک مقدار بزرگ ولي محدود در نظر گرفته مـي‌شـود. بـا جـايگزيني معادلة (۳) در (۲)، معادلة شماره (۴) بدست مي‌آيد:

$$(\lambda + \frac{1}{Re})v_{j,ji} + \frac{1}{Re}v_{i,jj} = v_j v_{i,j} \quad (۴)$$

اكنون به مقايسة معادلة (۴) بـا معـادلات حـاكم بـر الاستواسـتاتيك پرداخته مي‌شود. تحت شرايط ايزوتروپي و هموژني معادله اساسي الاستواستاتيک كه به معادلة ناوير معروف است به صورت معادلـه (۵) مي‌باشد [۱۱]:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = -b_i \quad (۵)$$

در معادله (۵)، $b_i$ بيانگر نيروهاي حجمي، $u_i$ نشان دهندة بردارهاي جابجايي و $\lambda$ و $\mu$ ثابت‌هاي لامه مي‌باشند.

مقايسة معادلات (۴) و (۵) نشان مي‌دهد كه طرف چپ اين معادلات مشابه است. بنابراين، براي حل معادلة جريان سيال لزج مي‌توان از روش‌هاي حل معادلة ناوير در الاستواستاتيک استفاده نمود. مقايسة متغيرهاي متناظر در دو معادله براي جريان سيالات و الاستواستاتيک در جدول (۱) آورده شده است.

جدول (۱) مقايسة متغيرهاي متناظر در دو معادله براي جريان سيالات و الاستواستاتيک

| الاستيسيته | | جريان سيال لزج | |
|---|---|---|---|
| جابجايي | $u_i$ | سرعت | $v_i$ |
| ثابت لامه | $\lambda$ | تابع پنالتي | $\lambda$ |
| ثابت لامه | $\mu$ | معكوس عدد رينولدز | $\frac{1}{Re}$ |
| نيروهاي حجمي | $b_i$ | ترم جابجايي و نيروهاي حجمي | $-v_j v_{i,j}$ |

## ۳- فرمول‌بندي انتگرالي معادلات

ابتدا به بررسي معادلة ناوير در الاستواستاتيک پرداخته شده و سپس اين معادله براي حل جريان سيال گسترش داده مي شود. معادلة ناوير به صورت معادله (۶) بازنويسي شده است:

$$(\frac{1}{1-2\nu})u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu}b_i = 0 \quad (۶)$$

كه در اين معادله $\nu$ ثابت پواسـون بـوده و رابطـة بـين $\nu$ و $\mu$ و $\lambda$ به صورت رابطه (۷) مي‌باشد[۱۲] :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (۷)$$

با ميل دادن $\lambda$ به سـمت بـي‌نهايـت و يـا $\nu$ بـه سـمت ۰/۵، معادله پيوستگي ارضا شده و مي‌توان از معادلة ناوير براي حل جريـان سـيال لـزج اسـتفاده نمـود. شـرايط مـرزي بـه صورت جابجايي و يا تنش‌هاي سطحي بـه صـورت روابـط شماره (۸) تعريف مي‌شوند.

$$u = \bar{u}_i \quad \Gamma_u \quad \text{روي}$$
$$t = \bar{t}_i \quad \Gamma - \Gamma_u \quad \text{روي} \quad (۸)$$

$t$ نشان دهنده تنش سطحي است و با دو بار انتگرال‌گيـري جزء به جزء از معادلة (۶) و اعمال قضية گاوس معادلـة (۹) بدست مي‌آيد :

$$u_l^i + \int_\Gamma t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = \int_\Gamma u_{lk}^* t_k \, d\Gamma + \int_\Omega u_{lk}^* b_k \, d\Omega \quad (۹)$$

اين معادله نقطة شروع روش المان‌هاي مرزي است و در عين حال شرايط مرزي را نيز برآورده مي‌كند. معادله ياد شده با انتگرال‌گيري روي نقاط مرزي براي اين نقاط به معادله (۱۰) تبديل مي شود[۱۲] :

$$\frac{1}{2}u_l^i + \int_\Gamma t_{lk}^* u_k \, d\Gamma = \int_\Gamma u_{lk}^* t_k \, d\Gamma + \int u_{lk}^* b_k \, d\Omega \quad (۱۰)$$

تابعي كه براي حل اساسي در فضاي دو بعدي بدست آمده است به صورت رابطه (۱۱) است[۱۳] :

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}[(3\text{-}4\nu)\ln\frac{1}{r}\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}] \quad (۱۱)$$

همچنين با توجه به رابطة بين ترم‌هاي جابجايي و تنش ، مقادير تنش سطحي به صورت زير بدست مي‌آيد :

$$t_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r}\Big[\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l})\Big] \quad (۱۲)$$

توجه شود كه براي مسائل الاستواستاتيک مقدار $b$ يک عدد ثابت است كه نشانگر نيروهاي حجمي است ولي در حل مسائل سيالات، $b$ شامل ترم‌هاي سرعت و مشتقات آن

مي‌باشد ، بنابراين به يک روش تکرار نياز است که در قسمت بعدي به آن پرداخته شده است.

## ۴- ارزيابي و محاسبه ترم‌هاي جابجايي

يکي از مهم‌ترين قسمت‌هاي حل جريان سيال لزج به وسيله روش المان‌هاي مرزي، ارزيابي و محاسبة ترم‌هاي جابجايي در معادلة ناوير_ استوکس است. براي محاسبة مشتقات سرعت در هر نقطه داخلي از دو روش مختلف استفاده شده است:

الف) استفاده از تفاضل محدود

اين روش، ساده‌ترين راه براي محاسبة عددي مشتقات سرعت است. در اين حالت از روش تفاضل محدود و از روش بالادست[۲] استفاده شده است.

ب) استفاده از فرمول‌بندي انتگرال مرزي

در اين روش مشتقات سرعت بطور مستقيم از فرمول‌بندي انتگرالي معادلات حاصل مي‌شود. براي اين منظور معادلة شماره (۱۳) با استفاده از مشتق‌گيري از معادلة (۹) بدست مي‌آيد[۱۴] :

$$u^{i}_{l,m} + \int_{\Gamma} t^{*}_{lkm} u_k \, d\Gamma = \int_{\Gamma} u^{*}_{lkm} t_k \, d\Gamma + \int_{\Omega} u^{*}_{lkm} b_k \, d\Omega \qquad (۱۳)$$

به طوري‌که

$$u^{*}_{lkm} = u^{*}_{lk,m} \qquad (۱۴)$$

$$t^{*}_{lkm} = t^{*}_{lk,m}$$

بدين ترتيب مشتقات سرعت نيز همانند سرعت به طور مستقيم از طريق روش انتگرال مرزي توسط معادله (۱۳) محاسبه مي‌شوند.

## ۵- فرمول‌بندي المان مرزي

براي تشکيل دستگاه معادلات، مرز به $N$ المان ثابت و دامنه به $M$ المان داخلي تقسيم شده و فرمول (۱۰) به صورت رابطه ۱۵ نوشته مي‌شود:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N} \{ \int_{\Gamma_j} t^* d\Gamma \} u^j = \sum_{j=1}^{N} \{ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \} t^j + \sum_{s=1}^{M} \{ \int_{\Omega_s} u^* b \, d\Omega \qquad (۱۵)$$

معادلة بالا براي نقطة $i$ نوشته شده است و ترم‌هاي $\int_{\Gamma_j} u d\Gamma$ و $\int_{\Gamma_j} t d\Gamma$ رابطة بين نقطة $i$ را با نقطة $j$ بيان مي‌کنند. بعد از انتگرال‌گيري اين انتگرال‌ها به زيرماتريس‌هاي $G^{ij}$ و $\hat{H}^{ij}$ تبديل مي‌شوند. انتگرال ترم‌هاي جابجايي نيز در هر سلول داخلي محاسبه شده و مجموع آنها در محاسبات اعمال مي‌شود :

$$\sum_{s=1}^{M} \{ \int_{\Omega_s} u^* b \, d\Omega = \sum_{s=1}^{M} B^{is} \qquad (۱۶)$$

بردار $B^{is}$ شامل دو مؤلفه $B_1^{is}$ و $B_2^{is}$ در دو جهت مي‌باشد که پس از محاسبه در دستگاه معادلات جايگزين مي‌شوند. بنابراين معادلة (۱۵) به صورت رابطه (۱۷) تبديل مي‌شود:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{N} \hat{H}^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{N} G^{ij} t^j + \sum_{s=1}^{M} B^{is} \qquad (۱۷)$$

اين معادله رابطة بين مقدار $u$ را در نقطة $i$ با مقادير $u$ و $t$ در همة نقاط مرزي (از جمله نقطة $i$) بيان مي‌کند. مي‌توان با يک تغيير متغير، معادلة (۱۷) را به فرم خلاصه‌تري نوشت. با فرض:

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} \qquad i = j \qquad (۱۸)$$

$$H^{ij} = \hat{H}^{ij} + c^i \qquad i \neq j$$

معادلة (۱۷) به معادله (۱۹) تغيير مي‌کند :

$$\sum_{j=1}^{N} H^{ij} u^j = \sum_{j=1}^{N} G^{ij} t^j + \sum_{s=1}^{M} B^{is} \qquad (۱۹)$$

حال اگر معادلة (۱۹) به همة نقاط مرزي اعمال شود و همه مجهولات به سمت چپ معادله منتقل شود، نتيجه به فرم ماتريسي به صورت رابطه (۲۰) خواهد بود:

$$AX = F + B \qquad (۲۰)$$

ماتريس $X$ شامل همة مجهولات موجود بر روي مرز مي‌باشد. با حل معادلة (۲۰) کلية مقادير مرزي محاسبه مي‌شود. وقتي که مقدار مجهولات بر روي مرز مشخص شد مي‌توان مقادير سرعت و مشتقات آن را در هر نقطه داخلي محاسبه نمود. مقدار سرعت در هر نقطة داخلي و با قرار دادن $c^i = I$ ( $I$ ماتريس واحد) در معادلة (۱۷) قابل محاسبه است.

## ۶- الگوريتم حل مسئله

همانطوري که توضيح داده شد ترمهاي جابجايي به صورت نيروي حجمي در نظر گرفته شده‌اند:

$$b_i = -v_j v_{i,j} \qquad (۲۱)$$

پس از تشکيل دستگاه معادلات و حل آن مقادير سرعت و مشتقات آن در همة نقاط داخلي محاسبه مي‌شود ولي بايستي اين نکته را در نظر گرفت که با توجه به معادلة (۲۱)، مقدار بردار $b$ تابعي از سرعت و مشتقات آن مي‌باشد بنابراين به يک روش تکرار نياز است که مراحل آن عبارت است از [۱۰] :

گام ۱: حدس مقدار سرعت و مشتقات آن. با اين عمل مقدار بردار $b$ محاسبه مي‌شود.

گام ۲: حل دستگاه معادلات و بدست آوردن مقادير

مجهول بر روي مرز

گام ۳: با استفاده از مجهولات بدست آمده در گام ۲ و بردار $b$ محاسبه شده در گام ۱ مقادير سرعت و مشتقات آن در نقاط داخلي محاسبه مي‌شود.

گام ۴: همگرايي مقدار سرعت و مشتق آن در كلية نقاط داخلي بررسي مي‌شود. اگر همگرايي برقرار باشد كه حل پايان مي‌يابد در غير اينصورت به گام ۱ بازگشته و الگوريتم تكرار مي‌شود.

## ۷- ارائه نتايج

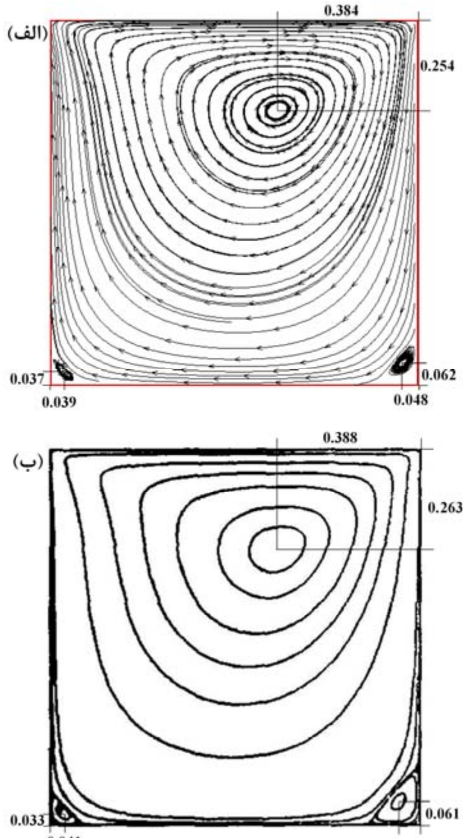
برابر الگوريتم گفته شده يک كد كامپيوتري نوشته شد. در ادامه نتايج عددي حاصل براي جريان داخل يک حفره[۳] و جريان پشت پله ارائه مي‌شود.

### ۷-۱- جريان داخل يک حفره

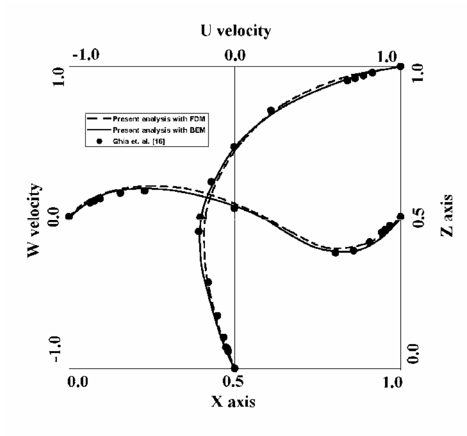
نتايج عددي براي اعداد رينولدز ۱۰۰ و ۴۰۰ آورده شده است. براي رينولدز ۱۰۰ از ۹۶ المان مرزي و ۸۱ سلول داخلي و براي رينولدز ۴۰۰ از ۱۲۰ المان مرزي و ۱۲۱ سلول داخلي استفاده شده است. ابتدا شبكه مورد استفاده در اين تحقيق با شبكه مورد استفاده در كارهاي قبلي مقايسه مي‌شود. عنوان مثال قيا و همكارانش[۱۶] در حل اين مسئله در Re=۱۰۰ با روش اختلاف محدود از يک شبكه ۱۲۹ در ۱۲۹ استفاده كردند كه منجر به تشكيل دستگاه معادله با ۱۶۶۴۱ معادله و ۱۶۶۴۱ مجهول مي شود. اين در حالي است كه در روش المانهاي مرزي دستگاه معادلات تنها بر روي مرز تشكيل مي‌شود و نقاط داخلي تنها به عنوان نقاط كمكي در محاسبه مشتقات داخلي مورد استفاده قرار مي‌گيرند كه به اين ترتيب منجر به تشكيل يک دستگاه معادله با ۹۶ معادله و ۹۶ مجهول مي‌شود.

در Re=۱۰۰ هر دو روش اختلاف محدود و انتگرال مرزي نتايج خوبي ارائه دادند كه مقايسه خطوط جريان و مكان گردابه‌ها در شكل (۱) و مقايسه سرعت هاي افقي و عمودي در خطوط مياني داخل حفره با كارهاي قبلي انجام شده در شكل (۲) ديده مي‌شود. در Re=۴۰۰ نتايج حاصل از روش اختلاف محدود داراي اختلاف زيادي با كارهاي انجام شده در گذشته بود ولي روش انتگرال مرزي نتايج بسيار خوبي ارائه داد كه مقايسه خطوط جريان و مكان گردابه‌ها در شكل (۳) و مقايسه سرعت‌هاي افقي و عمودي در خطوط مياني حفره در شكل (۴) نشان داده شده است. الگوريتم تكرار استفاده شده در اين تحقيق براي جريان حفره در رينولدزهاي بالاتر از ۴۰۰ همگرا نمي‌شود زيرا در اعداد رينولدز بالاتر، جريان حفره ناپايدار است[۱۵]. به نظر مي‌رسد كه اين ناپايداري دليل واگرايي الگوريتم تكرار در اين اعداد رينولدز باشد. در واقع در اين حالت ترم‌هاي جابجايي رفتاري متفاوت نسبت به حالت پايدار جريان دارند و نمي‌توان مانند قبل آنها را به صورت نيروهاي حجمي در نظر گرفت.

همانطور كه پيشتر گفته شد در اين روش دستگاه معادلات تنها بر روي مرز تشكيل مي‌شود و اين امر موجب اشغال حافظه كامپيوتر به ميزان بسيار كمتري در مقايسه با روشهاي ديگر مانند المان محدود مي‌شود. در ضمن با توجه به اينكه ماتريسهايG وH و پيرو آن ماتريسA فقط تابع خواص سيال و شكل هندسي مساله هستند اين ماتريس‌ها تنها در مرحله اول تكرار محاسبه مي شوند و در مراحل بعدي فقط بردارB با توجه به سرعت‌هاي جديد محاسبه شده و در دستگاه معادلات جايگزين مي‌شود. بدين ترتيب حجم محاسبات در مراحل بعدي تكرار به شدت كاهش مي‌يابد.



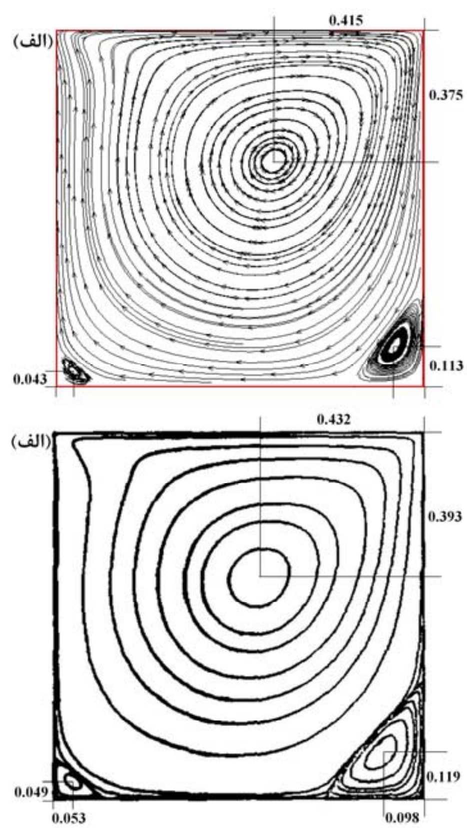

شكل (۱) خطوط جريان براي جريان حفره در Re=۱۰۰ الف) كار اين تحقيق و ب) قيا و همكاران [۱۶]



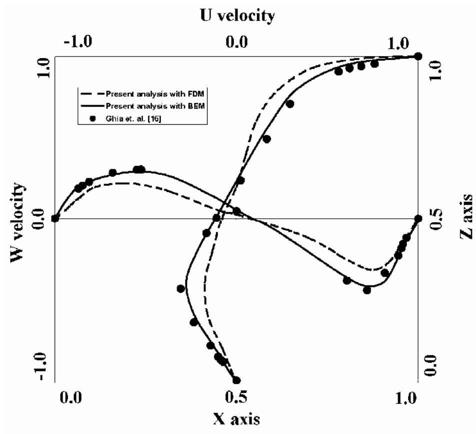

شکل (۲) ارائه و مقایسه سرعت‌هاي افقي و عمودي در خطوط مياني حفره براي Re=۱۰۰

## ۲-۷- جریان پشت پله

با توجه به اینکه در حل این مساله از شبکه غیر یکنواخت استفاده شد و در این حالت بکار بردن روش تفاضل محدود مشکل است، تنها از روش انتگرال مرزي براي محاسبة جملات جابجايي استفاده شد.




شکل (۳) خطوط جریان براي جریان حفره در Re=۴۰۰الف) کار این تحقیق و ب) قیا و همکاران [۱۶]




شکل (۴) ارائه و مقایسه سرعت‌هاي افقي و عمودي در خطوط مياني حفره براي Re=۴۰۰

باید توجه داشت به دلیل اینکه در روش انتگرال مرزي محاسبه سرعت و مشتقات آن در هر نقطه داخلي به صورت مستقیم امکان پذیر است به راحتي مي‌توان این روش را براي هر نوع شبکه محاسباتي مورد استفاده قرار داد. براي مش بندي از ۱۴۰ المان مرزي و ۳۴۴ سلول داخلي استفاده شده است. خطوط جریان براي رینولدزهاي ۲۵، ۵۰ و ۷۳ در شکل (۵) نشان داده شده است. همانطوریکه در شکل‌ها دیده مي‌شود با افزایش عدد رینولدز گردابة تشکیل شده در پایین پله بزرگتر مي‌شود. جدول ۱، مقایسه طول این گردابه را نسبت به ارتفاع پله با کارهاي قبلي نشان مي‌دهد.

جدول(۱) مقایسه طول نسبي گردابه تشکیل شده

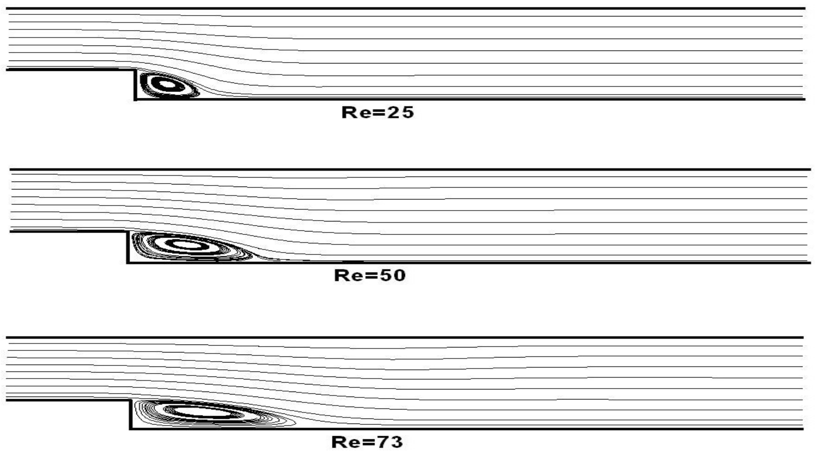
| | کار این تحقیق | دنهام و پاتریک[۱۸] | باربر و فنتي[۱۹] |
|---|---|---|---|
| Re=۵۰ | ۳/۰۵ | ۲/۷۲ | ۳/۴۹ |
| Re=۷۳ | ۴/۳ | ۳/۷۸ | ۴/۶۵ |

همچنین در شکل (۶) بردارهاي سرعت افقي در مقاطع مختلف کانال براي Re=۷۳ ارائه و با کارهاي قبلي انجام شده مقایسه شده است. همانطوري‌که دیده مي‌شود نتایج به دست آمده توافق بسیار خوبي با کارهاي قبلي دارد.

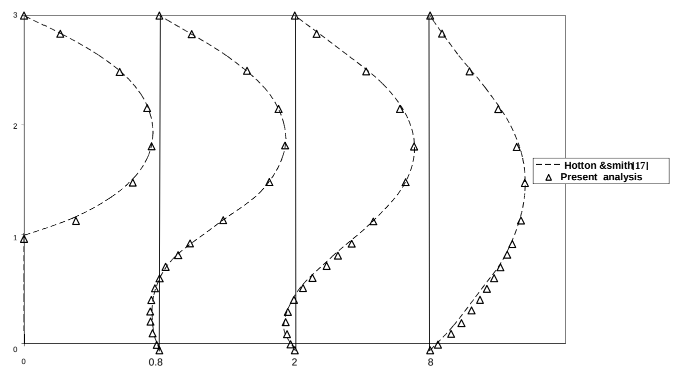
به منظور مقایسه روش حاضر با روشهاي کلاسیك، جریان پشت پله براي رینولدز ۷۳ توسط نرم افزار Fluent در خطاي مساوي با روش BEM حل شد که نتایج آن در جدول ۲ آورده شده است. همانطور که ملاحظه مي‌شود زمان محاسبات و حافظه اشغالي در روش المانهاي مرزي کمتر از روش حجم محدود مي‌باشد.

جدول(۲) مقايسه زمان محاسبات و حافظه اشغالي در روشهاي المان مرزي و حجم محدود

| روش حل | حافظه اشغالي (Mbyte) | زمان محاسبات(s) |
|---|---|---|
| BEM | ۲/۳ | ۳/۶ |
| FVM | ۷/۶ | ۴/۳ |




شكل(۵) خطوط جريان در جريان پشت پله براي رينولدزهاي۲۵، ۵۰ و ۷۳




شكل (۶) ارائه و مقايسه سرعت افقي در مقاطع مختلف براي جريان پله در رينولدز ۷۳

## ۸- نتيجه

در اين مقاله از روش المان‌هاي مرزي كه كمتر در ايران مورد توجه قرارگرفته، استفاده شد. در بيشتر روش‌هاي انتگرال مرزي از تابع حل اساسي معادله لاپلاس براي حل جريان سيال استفاده شده است در صورتي كه در اين تحقيق از روش تابع پنالتي و تابع حل اساسي معادله ناوير در الاستواستاتيک استفاده شده است كه منجر به نتايج بسيار دقيقي مي‌شود. اگر چه از تعدادي سلول داخلي براي محاسبه انتگرالهاي داخلي استفاده شد ولي دستگاه معادلات تنها بر روي مرز تشكيل شد كه اين امر منجر به كاهش حافظه مورد نياز و حجم محاسبات در مراحل تكرار شده است. علاوه بر اين با توجه به اينكه با استفاده از روش انتگرال مرزي محاسبه ترم‌هاي سرعت و مشتقات آن در هر نقطه داخلي به طور مستقيم توسط تابع حل اساسي به راحتي امكان پذير است، مي‌توان از هر نوع مش داخلي استفاده نمود. در اينصورت مشكلات ساير روش‌ها در محاسبه مشتقات در نقاط داخلي و خطاي حاصل از آن وجود ندارد، همچنين استفاده از انواع المانها به آساني امكان پذير است كه اين امر استفاده از اين روش براي اشكال پيچيده را آسان مي‌سازد. نتايج، براي جريان داخل حفره و جريان پشت پله آورده شد و با كارهاي قبلي انجام شده مقايسه گرديد كه توافق بسيار خوبي را نشان داد.

## ۹- مراجع


[۱] Banerjee P. K., The Boundary element Methods in Engineering, McGraw-Hill, UK, (1981).

[۲] Youngren G.K. and Acrivos A., Stokes flow past a particle of arbitrary shape: a numerical method of solution, Journal of Fluid Mechanics, vol. 69, pp. 377-403, (1975).

[۳] Wrobel L.C. and Brebbia C.A., Boundary element methods in heat transfer, Kluwer Academic Publishers (1992).

[۴] Bush M.B. and Tanner R.I, Numerical solution of viscous flow using integral equation methods, International Journal for Numerical Methods in Fluids VOL. 3, pp. 71-92, (1983).

[۵] Tosaka N. and Onishi K., Boundary integral equation formulation for steady Navier-Stokes equations using the Stokes fundamental solution, Engineering Analysis with Boundary Elements, VOL 2, pp. 128-132, (1985).

[۶] Tosaka N. and Kakuda K., Development of BEM for convective viscous flow problems, International Journal of solids and structures, vol. 31, pp. 1847-1859, (1994)

[۷] Roumeliotis J., A boundary integral method applied to Stokes flow, University of New South Wales, PhD thesis, (2000).

[۸] Wrobel L.C., The Boundary Element Method-Applications in thermo-fluids and acoustics, John Wiley & Sons, Vol. 1, (2002).

[۹] Robert W. Fox and Alan T. McDonald, Introduction to fluid mechanics, Fourth edition, John Wiley & Sons, (1992).

[۱۰] Hughes T.J.R , Liu W.K. and Brooks A., Finite Element Analysis of Incompressible Viscous flows by penalty function formulation , Journal of computational physics, Vol. 30, pp. 1-60, (1979).

[۱۱] Park K.H, A BEM formulation for axisymmetric elasticity with arbitrary body force using particular integrals, ," Journal of Computers & Structures, Vol 80, pp 2507-2514, (2002)

[۱۲] Brebbia C.A. and Dominguez J. , Boundary Elements An Introductory course, second edition, Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill, London, (1992).

[۱۳] Alarcon E. , Brebbia C.A. and Dominguez J. The boundary element method in elasticity, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 20, pp 625-639, (1978).

[۱۴] Gregoriev M.M. and Fafurin A.V., A boundary element method for steady viscous fluid flow using penalty function formulation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 25, pp 907-929, (1997).

[۱۵] Yang Y. and Straatman A.G. , A study of laminar flow in low aspect ratio lid-driven cavities, Canadian Journal of Civil Engineering, VOL. 29, NO. 3, pp. 436-447,(2002).

[۱۶] Ghia U., Ghia K. N. and Shin C. T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, Journal of computational physics, Vol. 48 ,pp 387-411, (1982).

[۱۷] Hutton A.G. and Smith R.M., The prediction of laminar flow over a downstream-facing step by the finite element method, CEGB Report, No. N3660, (1979).

[۱۸] Denham M.K. and Patrick M.A., Laminar flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel, Transcript of the Institute of Chemical Engineers Vol. 52 ,pp 361-367, (1974).

[۱۹] Barber R. W. and Fonty A., a numerical study of laminar flow over a confined backward-facing step using a novel viscous splitting vortex algorithm, 4th GRACM Congress on Computational Mechanics GRACM 2002.


## ۱۰- زیرنویس‌ها

---

۱ Vorticity
۲ Upwind
۳ Cavity