پايش پروفايل‌هاي خطي ساده با استفاده از نمودارهاي كنترل جمع تجمعي

عباس سقايي[i]؛ مرضيه مهرجو[ii]؛ اميرحسين اميري[iii]

چكيده

آنچه در اكثر مسائل كنترل فرايند آماري به آن پرداخته مي‌شود، توصيف عملكرد يك فرايند يا كيفيت محصول به وسيله يك مشخصه كيفي تك متغيره يا چند متغيره و كنترل آن با استفاده از نمودارهاي كنترل مناسب است. هر چند در بعضي اوقات توصيف عملكرد يك فرايند يا كيفيت يك محصول بوسيله رابطه‌اي بين يك متغير پاسخ و يك يا چند متغير پاسخ نتايج بهتري در پي هايي براي پايش انواع پروفايل‌ها در هر دو فاز ۱ و ۲ ارائه كرده‌اند. در اين مقاله، روشي خواهد داشت. محققان اين رابطه را كه مي‌تواند خطي، غير خطي و يا حتي پيچيده‌تر باشد، پروفايل ناميده و تاكنون روش جديد مبتني بر آماره‌هاي جمع تجمعي (*CUSUM*) براي بهبود پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در فاز ۲ ارائه شده است. براي ارزيابي و مقايسه روش پيشنهادي با روش‌هاي موجود از شبيه‌سازي و معيار متوسط طول دنباله استفاده و نتايج گزارش شده است. نتايج نشان دهنده عملكرد مناسب روش پيشنهادي براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در فاز ۲ مي‌باشد. در پايان، اثر مقدار ماخذ روي عملكرد نمودارهاي كنترل جمع تجمعي مورد بررسي و تحليل قرار گرفته است.

كلمات كليدي

پروفايل، متوسط طول دنباله، نمودار كنترل جمع تجمعي، نمودار كنترل ميانگين متحرك موزون نمايي، كنترل فرايند آماري.

Monitoring Simple Linear Profiles Using Cumulative Sum Control Charts

ABSTRACT

In some applications a single variable, either a process variable or product variable, characterizes the state of the process. In the other applications, multiple variables characterize the state of the process. However, in some practical situations, the quality of a process or product is characterized by a relationship between two or more variables instead of by the distribution of a single quality characteristic. This relationship, which can be linear, nonlinear or even a complicated model, is referred to as profile by researchers. Up to now, several methods have been proposed for monitoring simple linear profiles in both Phases I and II. In this paper, for improving phase II monitoring of linear profiles, a method has been proposed which applies Cumulative Sum control charts. Average run length criterion and simulation studies are used in order to evaluate the performance of the proposed method. The results show the suitable performance of the proposed method. Finally, the effect of reference value on the performance of the proposed method is evaluated.

[i] استاديار، دانشكده مهندسي صنايع؛ دانشگاه آزاد اسلامي؛ واحد علوم و تحقيقات. Email: a.saghaei@srbiau.ac.ir
[ii] دانش اندوخته دوره كارشناسي ارشد؛ دانشكده مهندسي صنايع؛ دانشگاه آزاد اسلامي؛ واحد علوم و تحقيقات. Email: m.mehrjoo@srbiau.ac.ir
[iii] استاديار؛ دانشكده مهندسي صنايع؛ دانشگاه شاهد. Email: amirhossein.amiri@gmail.com

KEYWORDS

Profile, Average Run Length (ARL), Cumulative Sum (CUSUM) control chart, Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) control chart, Statistical process control.

۱- مقدمه

در بسياري از كاربردهاي كنترل فرايند آماري، از تابع توزيع يك يا چند مشخصه كيفي براي توصيف كيفيت محصول يا عملكرد فرايند استفاده مي‌شود. در بعضي از مواقع، عملكرد يك فرايند يا كيفيت محصول به‌وسيله رابطه بين متغير پاسخ و يك يا چند متغير مستقل توصيف مي‌شود كه محققان اين رابطه را پروفايل مي‌نامند. اين رابطه مي‌تواند خطي ساده، خطي چندگانه، چندجمله‌اي، غيرخطي و يا حتي پيچيده‌تر باشد. در مراجع [۸][۱۴][۱۶][۱۷][۱۹][۲۰][۲۱] كاربردهاي عملي از پروفايل‌ها معرفي شده‌اند. روشهاي زيادي براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در فاز ۱ و ۲ توسط محققان ارائه شده است. در فاز ۱، پايداري فرايند مورد ارزيابي قرار گرفته و پارامترهاي مدل تخمين زده مي‌شوند، درحاليكه هدف اصلي فاز ۲ كشف تغييرات در فرايند در زودترين زمان ممكن است. در مرجع [۸] دو روش T^2 و $EWMA/R$ براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در هر دو فاز ۱ و۲ ارائه شده‌اند. در مرجع [۱۱] از طريق كد كردن مقادير x و تغيير ميانگين آنها به مقدار صفر، برآوردكننده‌هاي پارامترهاي رگرسيون مستقل شده و سپس سه نمودار كنترل $EWMA$ مجزا براي پايش عرض از مبدا، شيب و انحراف معيار خطا پيشنهاد شده است. استفاده از يك آزمون F براي پايش ضرايب رگرسيون در كنار يك نمودار كنترل تك متغيره براي پايش انحراف معيار خطا در فاز ۱ پروفايل‌هاي خطي ساده در مرجع [۱۴] پيشنهاد شده است. مرجع [۱۵] مدل خطي تعميم يافته را همزمان با نمودار كنترل R براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده معرفي مي‌نمايد. مرجع [۱] استفاده از نمودارهاي كنترل چندمتغيره‌ي با حافظه $MCUSUM$ يا $MEWMA$ همراه يك نمودار مربع كاي را براي بهبود پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در فاز ۲ پيشنهاد كرده است. مراجع [۱۳] و [۲۲]، روش‌هايي بر اساس آماره‌هاي نسبت درستنمايي براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده به ترتيب در فاز ۲ و فاز ۱ ارائه كرده‌اند. مرجع [۵] عملكرد روش ارائه شده در[۱۱] را با روش ارائه شده در [۲]، مقايسه كرده است. روشهايي نيز توسط محققان براي پايش پروفايل‌هاي پيچيده‌تر همچون پروفايلهاي چندجمله‌اي و پروفايلهاي غيرخطي ارائه شده است كه از جمله مي‌توان به مراجع [۴] [۷] [۹] [۱۰] [۱۸] اشاره كرد.

در اين مقاله روشي جديد براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در فاز ۲ ارائه شده و سپس عملكرد اين روش با روش‌هاي موجود از جمله T^2 و $EWMA/R$ [۸]، ۳- $EWMA$ [۱۱]، $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ [۱] و GLT/R [۱۵] مقايسه شده است.

۲- روش‌هاي فاز ۲

فرض كنيد خروجي يك فرايند متغير تصادفي Y بوده كه تابعي خطي از متغير مستقل X است. يعني،

$$Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{۱}$$

كه در آن A_0 و A_1 پارامترهاي مدل هستند، متغيرهاي تصادفي ε_{ij} مستقل بوده و داراي توزيع نرمال با ميانگين صفر و واريانس σ^2 هستند. براي سادگي، مقاديري ثابت براي X در نظر گرفته مي‌شود و مجموعه مقادير يكسان براي هر نمونه وجود دارد.

براي نمونه‌گيري از فرآيند، n نقطه ثابت x_1، x_2، ...، x_n انتخاب مي‌شوند. براي نمونه j ام، خروجي فرايند y_{1j}، y_{2j}، ...، y_{nj} است. نقاط (x_1,y_{1j})، (x_2,y_{2j})، ...، (x_n,y_{nj}) مجموعه نقاطي هستند كه در زمان j ام بر آنها رابطه (۱) برازش مي‌شود.

۲-۱- نمودار كنترل T^2

در مبحث كنترل فرايند آماري، براي پايش يك فرايند كه داراي بيش از يك متغير بوده و متغيرهاي آن وابسته هستند مي‌توان از نمودارهاي كنترل چند متغيره مانند T^2 استفاده كرد. از آنجا كه برآوردهاي پارامترهاي يك رگرسيون خطي ساده (a_0,a_1) از طريق روش حداقل مربعات خطا وابسته هستند، مي‌توان آنها را از طريق يك نمودار كنترل T^2 به طور همزمان پايش كرد[۸]. در اين نمودار كنترل، آماره نمونه

$$T_j^2 = (z_j - \mu)^T S^{-1} (z_j - \mu) \tag{۲}$$

است كه در آن

$$z_j = (a_{0j}, a_{1j})^T \ , \mu = (A_0, A_1) \ , \ S = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{01}^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} ,$$

$$a_{0j} = \bar{y}_j - a_{1j}\bar{x} \ ، a_{1j} = \frac{s_{xy(j)}}{s_{xx}} \ , \tag{۳}$$

$$\sigma_0^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}}\right) \ ، \ \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{s_{xx}} \ ، \ \sigma_{01}^2 = -\sigma^2 \frac{\bar{x}}{s_{xx}} .$$

هنگامي كه فرايند تحت كنترل است، T_j^2 توزيع مربع كاي با ۲

(تعداد متغيرها) درجه آزادي دارد. بنابراين حد كنترل بالا براي اين نمودار $UCL=\chi^2_{2,\alpha}$ است كه $\chi^2_{2,\alpha}$ صدك αام در توزيع مربع كاي با دو درجه آزادي است.

۲-۲- نمودار كنترل *EWMA/R*

همانگونه كه در مقدمه گفته شد، يكي از روشهايي كه در [۸] براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده پيشنهاد شده است روش *EWMA/R* مي‌باشد. در اين روش از نمودار كنترل *EWMA* براي پايش ميانگين باقيمانده‌ها و از نمودار R براي پايش انحراف معيار آنها استفاده شده است. در نمودار كنترل *EWMA*، j امين آماره نمونه

$$z_j=\theta\bar{e}_j+(1-\theta)z_{j-1} \quad (٤)$$

است كه در آن ۱ ≥ θ > ۰ ثابت هموارسازي بوده و

$$e_{ij}=y_{ij}-A_0-A_1x_i\ ,\ \bar{e}_j={}^1\!/_n\sum_{i=1}^{n}e_{ij}\ ,z_0=0 \quad (۵)$$

حدود كنترل بالا و پايين اين نمودار به صورت رابطه ۶ هستند:

$$UCL=L\sigma\sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}} \text{ و } LCL=-L\sigma\sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}} \quad (۶)$$

در رابطه‌هاي اشاره شده، *L(>۰)* ثابتي است كه براي بدست آوردن *ARL* تحت كنترل مشخص مورد استفاده قرار مي‌گيرد. آماره نمونه‌ي نمودار R كه براي پايش انحراف معيار باقيمانده‌ها پيشنهاد شده است به صورت $R_j=\max(e_{ij})-\min(e_{ij})$ است. حدود كنترل بالا و پايين نمودار R به قرار رابطه ۷ است:

$$UCL=\sigma(d_2+Ld_3)\ ،LCL=\sigma(d_2-Ld_3) \quad (۷)$$

در رابطه۷، *L(>۰)* ثابتي است كه براي بدست آوردن *ARL* تحت كنترل مشخص استفاده مي‌شود. d_2 و d_3 مقادير ثابتي هستند كه به اندازه نمونه بستگي دارند.

۳-۲- نمودار كنترل۳- *EWMA*

در اين روش كه در[۱۱] معرفي شده است، ابتدا مقادير X به گونه‌اي كه ميانگين آنها برابر صفر شود، كد مي‌شوند. زيرا با كد كردن، برآوردكننده‌هاي حداقل مربعات شيب و عرض از مبدا براي هر نمونه، متغيرهاي تصادفي مستقل شده و نياز به رويكرد T^2 از بين مي‌رود. پس از كد كردن مقادير X، مدل ۸ جايگزين مدل اصلي در (۱) مي‌شود:

$$Y_{ij}=B_0+B_1X'_i+\varepsilon_{ij}\ ,\quad i=1,2,..,n \quad (۸)$$

كه در آن $B_0=A_0+A_1\bar{X}$ ، $B_1=A_1$ و $X'_i=(X_i-\bar{X})$.

براي j امين نمونه، برآوردكننده حداقل مربعات B_0 به صورت $b_{0j}=\bar{y}_j$ بوده و برآوردكننده حداقل مربعات B_1 با برآوردكننده حداقل مربعات A_1 در (۳) يكسان است. b_{0j} و b_{1j} داراي توزيع نرمال به ترتيب با ميانگين‌هاي B_0 و B_1 و واريانس‌هاي $\frac{\sigma^2}{n}$ و $\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$ هستند. همچنين كوواريانس بين b_{0j} و b_{1j} برابر صفر است. بنابراين از نمودارهاي كنترل مجزا بدون روبرو شدن با مشكل همبسته بودن برآوردكننده‌ها استفاده مي‌شود. روش پيشنهادي[۱۱] براي كشف شيفت در پارامترهاي مدل، استفاده از نمودارهاي كنترل تك متغيره مجزا است. در اين روش، نمودارهاي *EWMA* براي پايش شيب، عرض از مبدا و پراكندگي خطاها پيشنهاد شده‌اند.

در نمودار *EWMA* براي پايش عرض از مبدا، B_0، از برآوردكننده عرض از مبدا، b_{0j}، براي محاسبه آماره *EWMA* استفاده مي‌شود.

$$EWMA_I(j)=\theta b_{0j}+(1-\theta)EWMA_I(j-1),\ j=1,2,...,n \quad (۹)$$

در رابطه ۹، ۱ ≥ θ > ۰ ثابت هموارسازي بوده و $EWMA_I(0)=B_0$ است.

حدود كنترل بالا و پايين نمودار به صورت رابطه ۱۰ است:

$$LCL=B_0-L_I\sigma\sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}}$$
$$UCL=B_0+L_I\sigma\sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}} \quad (۱۰)$$

در (۱۰)، *L*L_I *(>۰)* به گونه‌اي انتخاب مي‌شود تا *ARL* تحت كنترل مشخصي به‌دست آيد.

برآوردهاي شيب B_1، b_{1j} در نمودار *EWMA* براي پايش شيب استفاده مي‌شوند. آماره *EWMA* براي پايش شيب به صورت رابطه ۱۱ محاسبه مي‌شود:

$$EWMA_S(j)=\theta b_{1j}+(1-\theta)EWMA_S(j-1)\ ,j=1,2,...n \quad (۱۱)$$

در (۱۱)، ۱ ≥ θ > ۰ ثابت هموارسازي بوده و $EWMA_S(0)=B_1$ است. حدود كنترل بالا و پايين نمودار به صورت رابطه ۱۲ است:

$$LCL=B_1-L_S\sigma\sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)S_{xx}}}$$
$$UCL=B_1+L_S\sigma\sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)S_{xx}}} \quad (۱۲)$$

در رابطه ۱۲، L_S *(>۰)* به گونه‌اي انتخاب مي‌شود تا *ARL* تحت كنترل مشخصي به‌دست آيد.

در نهايت از نمودار*EWMA* بر اساس رويكرد ارائه شده در [۳] براي پايش پراكندگي خطا استفاده مي‌شود. در اين روش، مقدار MSE_j (برآوردكننده معمول σ^2 بر اساس باقيمانده‌هاي

مربوط به خط برازش شده در نمونه j ام) براي محاسبه آماره‌ي $EWMA$ استفاده مي‌شود.

$$EWMA_E(j)=\max\{\theta \ln(MSE_j)+(1-\theta)EWMA_E(j-1), \ln(\sigma_0^2)\}$$
$$j=1,2,...,n \quad (۱۳)$$

در اين رابطه $0<\theta\le 1$ ثابت هموارسازي بوده و $EWMA_E(0)=Ln(\sigma_0^2)$.

در اين رويكرد، مقدار σ_0^2، مقدار تحت كنترل σ^2، برابر يك فرض شده است، بنابراين $EWMA_E(0)=0$. زماني‌كه $EWMA_E(j)$ بزرگ‌تر از حد كنترل بالا شود، فرايند خارج از كنترل آماري است. حد كنترل بالا به صورت رابطه ١٤ است:

$$UCL=L_E\sqrt{\frac{\theta\,\mathrm{var}[\ln(MSE_j)]}{(2-\theta)}}$$
$$\mathrm{Var}[\ln(MSE_j)]=\frac{2}{(n-2)}+\frac{2}{(n-2)^2}+\frac{4}{3(n-2)^3}-\frac{16}{15(n-2)^5} \quad (۱۴)$$

در رابطه ۱۴، L_E (>0) به گونه‌اي انتخاب مي‌شود تا ARL تحت كنترل مشخصي به‌دست آيد.

۲-۴- نمودار كنترل $MCUSUM/\chi^2$

در اين روش از نمودار كنترل $MCUSUM$ پيشنهادي [۶] براي پايش عرض از مبدا و شيب و از يك نمودار مربع كاي براي پايش پراكندگي خطا استفاده مي‌شود[۱]. آماره $MCUSUM$ به صورت رابطه ۱۵ است:

$$S_j=\max(S_{j-1}+a'(x_j-\mu_G)-.5D,0) \quad (۱۵)$$

در رابطه ۱۵ تساوي هاي رابطه ۱۶ برقرارست:

$$a'=\frac{(\mu_B-\mu_G)'\Sigma^{-1}}{\sqrt{(\mu_B-\mu_G)'\Sigma^{-1}(\mu_B-\mu_G)}}$$
$$D=\sqrt{(\mu_B-\mu_G)'\Sigma^{-1}(\mu_B-\mu_G)} \quad (۱۶)$$

همچنين، بردار x_j بردار برآوردكننده‌هاي حداقل مربعات عرض از مبدا و شيب پروفايل j ام و Σ ماتريس كواريانس برآوردكننده‌هاي ياد شده است. μ_G بردار مقادير معلوم پارامترهاي عرض از مبدا و شيب و μ_B بردار مقادير پارامترها با اعمال كوچك‌ترين شيفتي است كه بايد به كشف آن پرداخت. اين آماره داراي حد كنترل بالاي UCL است كه اين حد كنترل بالا به گونه‌اي انتخاب مي‌شود كه ARL تحت كنترل دلخواهي به‌دست آيد. اگر آماره S_j بزرگتر از UCL شود، فرايند خارج از كنترل آماري اعلام مي‌شود.

براي پايش پراكندگي، آماره ۱۷ پيشنهاد شده است[۱]:

$$\chi_j^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}e_{ij}^2 \quad (۱۷)$$

اين آماره توزيع χ^2 با n درجه آزادي دارد، بنابراين حد كنترل بالا براي اين آماره به صورت رابطه ۱۸ تعريف مي‌شود:

$$UCL=\chi_{\alpha,n}^2 \quad (۱۸)$$

اگر $\chi_j^2>\chi_{\alpha,n}^2$ شود، فرايند خارج از كنترل آماري است.

۲-۵- نمودار كنترل $MEWMA/\chi^2$

در اين روش از نمودار $MEWMA$ پيشنهادي[۱۲] براي پايش عرض از مبدا و شيب و از آماره و حد كنترل ياد شده در روابط (۱۷) و (۱۸) براي پايش انحراف معيار خطا استفاده شده است[۱].

آماره $MEWMA$ پيشنهادي [۱۲] به صورت رابطه ۱۹ تعريف مي‌شود:

$$z_j=\theta x_j+(1-\theta)z_{j-1} \quad (۱۹)$$

در رابطه ۱۹، z_j، j امـين بـردار $EWMA$ و x_j، بـردار j امـين مشاهده است و z_0، ميـانگين بـردار مـشاهدات تحـت كنتـرل و $0<\theta\le 1$ ثابت هموارسازي مي‌باشد.

مقدار آماره اي كه بر روي نمودار كنترل ترسيم مي‌شود به صورت رابطه ۲۰ است:

$$T_j^2=z_j'\Sigma_{z_j}^{-1}z_j \quad (۲۰)$$

در رابطه ۲۰، ماتريس كواريانس به صورت رابطه ۲۱ محاسـبه مي‌شود:

$$\Sigma_{z_i}=\frac{\theta}{2-\theta}\left[1-(1-\theta)^{2j}\right]\Sigma \quad (۲۱)$$

در صورتي كه j بـزرگ باشـد، مـي‌تـوان مـاتريس كواريـانس j امين $EWMA$ را به صورت رابطه ۲۲ ساده كرد:

$$\Sigma_{z_j}=\frac{\theta}{2-\theta}\Sigma \quad (۲۲)$$

در روش پيشنهادي [۱]، بردار x_j، بردار برآوردكننده‌هاي حداقل مربعات عرض از مبدا و شيب پروفايل j ام و Σ ماتريس كواريانس برآوردكننده‌هاي ياد شده است. z_0 بردار مقادير معلوم پارامترهاي عرض از مبدا و شيب مي‌باشد.

در نمودار $MEWMA$ ، زماني كه T_j^2 بزرگ‌تر از حد كنترل بالا شود فرايند خارج از كنترل آماري اعلام مي‌شود. حد كنترل بالا به گونه‌اي تعيين مي‌شود كه ARL تحت كنترل مشخصي براي نمودار به‌دست آيد .

۲-۶- نمودار كنترل GLT/R

در اين روش، از يك آماره F به منظور انجام آزمون فرض (۲۳) استفاده مي‌شود.

H_0: Intercept= B_0, Slope= B_1

$$H_1: Intercept \neq B_0,\ Slope \neq B_1 \qquad (۲۳)$$

در رابطه (۲۳)، B_0 و B_1 مقادير تحت كنترل پارامترهاي رگرسيون در رابطه (۸) هستند.

$$F^*_j = [\sum^n_{i=1} (Y_{ij} - B_0 - B_1X_{ij})^2 - \sum^n_{i=1} (Y_{ij} - b_{0j} - b_{1j}X_{ij})^2]/2 \div [\sum^n_{i=1} (Y_{ij} - b_{0j} - b_{1j}X_{ij})^2/(n-2)] \qquad (۲۴)$$

اگر $F^*_j < F_{(1-\alpha\, ;\, df(Rj) - df(Fj)\, ,\, df(Fj))}$ فرض H_0 پذيرفته شده، يعني عرض از مبدا و شيب تحت كنترل هستند. در نامساوي ۲۴، $df(Rj)$ درجه آزادي رگرسيون بوده و برابر است با تعداد پارامترها و $df(Fj)$ درجه آزادي خطاست و برابر با تفاضل تعداد نمونه، n، از تعداد پارامترها است.

همچنين، براي پايش پراكندگي خطا به طور همزمان از نمودار Rپيشنهادي[۸] استفاده مي‌شود. در قسمت ۲-۲ به چگونگي استفاده از اين نمودار اشاره شده است.

۳- روش پيشنهادي

در اين مقاله، ابتدا مقادير X به گونه اي كد مي‌شوند كه برآوردكننده‌هاي پارامترهاي شيب و عرض از مبدا از يكديگر مستقل شوند. سپس از سه نمودار كنترل مجزاي $CUSUM$ براي تشخيص شيفت در پارامترهاي مدل يعني عرض از مبدا، شيب و پراكندگي خطا استفاده مي‌شود. سه نمودار كنترل $CUSUM$ به صورت همزمان استفاده مي‌شوند و وقوع شيفت در هر يك از اين نمودارها نشان دهنده وقوع شيفت در فرايند است. به دليل كد كردن مقاديرX ، مدل مورد مطالعه مدل ارائه شده در (۸) خواهد بود.

در نمودار كنترل $CUSUM$ پيشنهادي براي پايش عرض از مبدا، از برآوردكننده عرض از مبدا، b_{0j}، استفاده شده و آماره $CUSUM$ محاسبه مي‌شود. آماره $CUSUM^+$ براي تشخيص شيفت‌هاي مثبت و آماره $CUSUM^-$ براي تشخيص شيفت‌هاي منفي به‌كار مي‌رود.

$$CUSUM^+_I(j)=max[0,b_{0j}-(B_0+K_I)+ CUSUM^+_I(j-1)]$$
$$CUSUM^-_I(j)=max[0,(B_0-K_I)- b_{0j}+CUSUM^-_I(j-1)] \qquad (۲۵)$$

در رابطه‌هاي اخير، مقادير اوليه $CUSUM^+_I(j)$ و $CUSUM^-_I(j)$ صفر در نظر گرفته مي‌شوند. در اين روابط، K_I مقدار ماخذ عرض از مبدا ناميده مي‌شود كه معمولا مقدار آن برابر با نصف فاصله بين مقدار هدف B_0 و مقدار ميانگين مربوط به حالت خارج از كنترل يا $B_0'=B_0+\Delta$ انتخاب مي‌شود. به عبارت ديگر، K_I برابر با نصف اندازه تغييري است كه بايد به وجود آن پي برد يا $K_I=\Delta/۲$. بايد توجه داشت كه $CUSUM^+_I(j)$ و$CUSUM^-_I(j)$ انحرافات از مقدار B_0 كه بيشتر از K باشند را با يكديگر جمع مي‌كنند و اگر هر يك از آنها منفي گردد به طور خودكار مقدار آن برابر با صفر قرار داده مي‌شود. اگر هر يك از مقادير $CUSUM_I^+$ و $CUSUM_I^-$ بزرگتر از حد كنترل UCL_I گردد، آنگاه فرايند خارج از كنترل اعلام مي‌شود. مقدار UCL_I به گونه‌اي انتخاب مي‌شود تا ARL تحت كنترل مشخصي به‌دست آيد. برآوردهاي شيب، b_{1j}، در نمودارهاي $CUSUM$ براي پايش شيب استفاده مي‌شوند. آماره $CUSUM$ براي پايش شيب به صورت رابطه ۲۶ محاسبه مي‌شود:

$$CUSUM^+_S(j)=max[0,b_{1j}-(B_1+K_S)+ CUSUM^+_S(j-1)]$$
$$CUSUM^-_S(j)=max[0,(B_1- K_S)- b_{1j}+CUSUM^-_S(j-1)] \qquad (۲۶)$$

كه در آن $CUSUM^+_S(0) = CUSUM^-_S(0) = 0$. K_S مقدار ماخذ شيب بوده و UCL_S حد كنترل بالاي نمودار كنترل شيب است. اگر هر يك از مقادير $CUSUM_S^+$ و $CUSUM_S^-$ بزرگتر از حد كنترل UCL_S گردد، آنگاه فرايند خارج از كنترل اعلام مي‌گردد.

بالاخره در اين روش از آماره MSE_j براي محاسبه آماره $CUSUM$ پيشنهادي براي پايش انحراف معياراستفاده مي‌شود.

$$CUSUM^+_E (j) = max[0, MSE_j - K_E +CUSUM^+_E (j-1)]$$
$$CUSUM^-_E (j) = min[0 , MSE_j - K_E+ CUSUM^-_E (j-1)] \qquad (۲۷)$$

كه در آن $CUSUM^+_E(0) = CUSUM^-_E(0) = 0$. K_E مقدار ماخذ بوده و UCL_E حد كنترل است. اگر هر يك از مقادير $CUSUM^+_E$ و $CUSUM^-_E$ بزرگتر از حد كنترل UCL_E گردد، آنگاه فرايند خارج از كنترل اعلام مي‌گردد.

۴- مقايسه عملكرد روش پيشنهادي با روش‌هاي موجود

در اين بخش، با استفاده از معيار متوسط طول دنباله، ARL، به مقايسه عملكرد روش پيشنهادي با روش‌هاي موجود در فاز ۲ پرداخته شده است. بدين منظور از مثال پيشنهادي در [۸] يعني $Y_{ij}=۳+۲X_i+\varepsilon$ كه در آن X=۲،۴،۶،۸ (با ميانگين ۵) و $\varepsilon \sim N(0,1)$ مي‌باشد استفاده شده است. شبيه‌سازي‌ها در اين مرجع به گونه‌اي بوده است كه ARL تحت كنترل ۲۰۰ حاصل شود. از آنجا كه مايل به مقايسه عملكرد روش خود با روش ارائه شده در اين مرجع بوده، طراحي نمودارهاي كنترل به گونه‌اي صورت گرفته‌اند كه در انتها به ARL تحت كنترل نزديک به ۲۰۰ دست يافت. با توجه به رابطه (۸) مقادير X مورد مطالعه در روش ما ۳، ۱، ۱-و ۳- با ميانگين صفر هستند و مدل تبديل شده‌اي كه به بررسي آن پرداخته مي‌شود $Y_{ij}=۱۳+۲X'_i+\varepsilon$ است كه در آن$\varepsilon \sim N(۰،۱)$ ها هم توزيع بوده و مستقل از هم هستند. براي محاسبه هر مقدار ARL،

تعداد تكرارهاي شبيه‌سازي ۱۰۰۰۰ مرتبه بوده است.

در اين روش، طراحي نمودارهاي مجزاي *CUSUM* به گونه‌اي بوده كه هر سه نمودار *CUSUM* داراي *ARL* تحت كنترل برابر باشند. گفتني است به اين علت كه به بررسي شيفت‌هاي مثبت پرداخته شده است، آماره‌هاي $CUSUM^+$ براي پايش فرايند به كار برده شده‌اند. در مورد نمودار *CUSUM* اي كه براي پايش عرض از مبدا طراحي شده، حد كنترل، UCL_I ، ۱/۱۹۵ و مقدار ماخذ، K_I ، ۰/۵ انتخاب شده‌اند. . حد كنترل و مقدار ماخذ نموداري كه براي پايش شيب طراحي شده است به ترتيب ۱/۸ و ۰/۰۵ انتخاب شده اند. در پايان نموداري كه پراكندگي خطا را پايش مي‌كند، داراي حد كنترل ۲/۵۱ و مقدار ماخذ ۲ مي‌باشد. *ARL* تحت كنترل هر يك از اين سه نمودار نزديک به ميزان ۵۷۰ بوده و تركيب اين سه نمودار كنترل داراي *ARL* تحت كنترل نزديک به ميزان ۲۰۰ است. شايان گفتن است كه مقادير ماخذ براي هر يك از نمودارها بر مبناي ميزان شيفتي كه مايل به كشف آن هستيم و توضيحاتي كه پيشتر به آن اشاره شد تعيين شده و حدود كنترل هر يك از نمودارها با استفاده از شبيه‌سازي تعيين شده‌اند.

در شبيه‌سازيهاي انجام شده، چهار شيفت مختلف شامل شيفت در عرض از مبدا، شيفت در شيب رابطه‌هاي (۱) و (۸) و شيفت در پراكندگي خطا مورد بررسي قرار گرفته‌اند. شيفت‌هاي مورد بررسي نيز مانند شيفت‌هايي است كه در مرجع [۸] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

جدول ۱ مقادير *ARL* خارج از كنترل را زماني‌كه در A_0 (يا به‌طور معادل در B_0) شيفت‌هايي كه مضاربي از σ هستند رخ داده است، نشان مي‌دهد. همانگونه كه ديده مي‌شود، روش پيشنهادي در تشخيص شيفت‌هاي متوسط تا بزرگ، به جز بزرگترين شيفت كه در آن T^2 بهترين عملكرد را دارد بهتر از ساير روشها عمل مي‌كند. اما در شيفت‌هاي كوچک داراي عملكرد ضعيف‌تري نسبت به روشهاي *EWMA/R*، *EWMA*-۳ ، $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ مي‌باشد.

در جدول ۲ مقادير *ARL* خارج از كنترل براي زماني‌كه در A_1 شيفت‌هايي از مضارب σ رخ مي‌دهند، ارائه شده است. دقت شود كه شيفت در شيب مدل اصلي در رابطه (۱) معادل شيفت همزمان در عرض از مبدا و شيب مدل تغيير فرم يافته در رابطه (۸) است. در تشخيص اين نوع شيفت، به جز دو شيفت آخر كه در آنها روش پيشنهادي*CUSUM* -۳ به همراه $MEWMA/\chi^2$ قوي‌ترين عملكرد را دارا هستند ، دو روش $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ داراي بهترين عملكرد هستند. عملكرد *CUSUM* -۳ در تشخيص شيفت‌هاي بسيار كوچك و تقريبا بزرگ در مرتبه بعدي قرار داشته در حالي‌كه در تشخيص شيفت‌هاي كوچك و متوسط نمودار*EWMA* -۳ نيز پس از دو روش ياد شده بهتر از روش پيشنهادي عمل مي‌كند.

به منظور مقايسه دقيق‌تر دو رويكرد *CUSUM* -۳ و *EWMA* -۳ در مورد شيفت‌هاي بسيار كوچك، شيفت‌هاي ۰/۰۰۵σ، ۰/۰۱σ، ۰/۰۱۵σ و ۰/۰۲σ نيز در A_1 ايجاد و بررسي گرديد كه نتايج بدست آمده طبق جدول ۳ نشان‌دهنده عملكرد بهتر روش*CUSUM* -۳ هستند.

جدول (۳): مقايسات ***ARL*** تحت شيفت‌هاي بسيار كوچك در شيب از A_1 به $A_1+\beta\sigma$

Chart \ β	۰/۰۰۵	۰/۰۱	۰/۰۱۵	۰/۰۲
$EWMA-3$	۱۹۱/۱	۱۷۳/۶	۱۴۸/۱	۱۲۴/۸
CUSUM -3	۱۷۲/۴	۱۴۰/۷	۱۱۹/۱	۱۰۰/۸

در جدول ۴، مقادير *ARL* خارج از كنترل براي زماني‌كه شيفت‌هايي در پراكندگي خطا رخ مي‌دهند، گزارش شده است. همانطور كه ديده مي‌شود، روش پيشنهادي در شيفت‌هاي كوچك تا متوسط داراي بهترين عملكرد بوده و با افزايش اندازه شيفت نيز عملكرد آن مناسب بوده و در كنار روش‌هاي $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ بهترين عملكرد را داراست.

جدول ۵ نتايج حاصل از شيفت در شيب مدل تغيير فرم يافته در (۸)، B_1، را نشان مي‌دهد. از آنجا كه مقادير *ARL* تحت شيفت δ در شيب مدل تغيير فرم يافته حول $\delta=0$ متقارن هستند[۱۱]، از شيفت‌هاي مثبت در جدول ۵ استفاده شده است. اين ويژگي كمك مي‌كند كه بتوان از آماره‌هاي $CUSUM^+$ طراحي شده، براي بررسي اين نوع شيفت نيز استفاده كرد. همانگونه كه در جدول ۵ ديده مي‌شود، اگرچه روش پيشنهادي در مقايسه با روش‌هاي $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ براي تشخيص شيفت‌هاي كوچك تا متوسط از عملكرد بهتري برخوردار است، اما در مقايسه با ساير روش‌ها، به جز در كوچكترين شيفت عملكرد چندان خوبي ندارد. علت اين امر مقدار ماخذي است كه براي پايش شيب انتخاب شده است يعني مقدار ۰/۰۵. اين ميزان در مقايسه با شيفت‌هايي كه در اين جدول به بررسي آنها پرداخته شده يعني ۰/۲، ۰/۳، . . . و ۱ مقداري ناچيز است. زيرا همانطور كه پيشتر گفته شد مقدار ماخذ برابر است با نصف ميزان تغييري كه مايل به تشخيص آن بوده و در بخش ۵ به تفصيل در رابطه با تاثير مقدار ماخذ بر عملكرد روش *CUSUM*-۳ بحث خواهد شد.

در مرجع [۱۵] روش *GLT/R* با دو روش ارائه شده در مرجع [۸] يعني روش‌هاي *EWMA/R* و T^2 مقايسه شده است.

اما از آنجا كه مقادير X استفاده شده در اين مرجع اعداد ۱، ۲، . . .، ۱۰ بوده و متفاوت از Xهايي است كه در اين مقاله مورد استفاده قرار گرفته‌اند، امكان مقايسه مستقيم اين روش با ساير روش‌ها از جمله روش پيشنهادي نيست. بنابراين به بررسي غيرمستقيم اين امر پرداخته شده است.

در تشخيص شيفت در عرض از مبدا مدل (۱) روش GLT/R با فاصله قابل توجهي ضعيف‌تر از دو روش ارائه شده در [۸] عمل مي‌كند. اما همانگونه كه از جدول ۱ پيداست روش پيشنهادي در تشخيص تمامي شيفت‌ها به جز آخرين شيفت عملكرد بهتري از روش T^2 داشته و تنها در تشخيص شيفت‌هاي كوچك با فاصله‌اي نه چندان زياد عملكردي ضعيف‌تر از روش $EWMA/R$ را داراست.

در مورد شيفت در شيب نيز روش GLT/R نسبت به دو روش $EWMA/R$ و T^2 داراي عملكرد ضعيف‌تري است درحاليكه با توجه به نتايج ارائه شده در جدول ۲، روش ۳- $CUSUM$ از هر دوروش ياد شده قوي تر عمل مي‌كند.

عملكرد روش GLT/R در تشخيص شيفت در پراكندگي خطا كاملا يكسان با روش $EWMA/R$ بوده و بهتر از روش T^2 است. روش پيشنهادي در اين مقاله در تمامي شيفت‌ها حتي از روش $EWMA/R$ نيز بهتر عمل مي‌كند.

در مورد وقوع شيفت در شيب مدل تغيير فرم يافته در رابطه (۸)، از آنجا كه اندازه شيفت‌هاي مورد مطالعه در [۱۵] متفاوت از اندازه شيفت‌هايي است كه در اين مقاله و در جدول ۵ مورد بررسي قرار گرفته‌اند، امكان مقايسه اين دو روش وجود نداشته است.

به طور كلي، روش پيشنهادي داراي عملكرد مناسبي در كليه شيفت‌ها در پارامترهاي مدل اصلي در رابطه (۱) مي‌باشد. اگرچه عملكرد روش پيشنهادي ۳- $CUSUM$ در بعضي از شيفت‌ها از جمله شيفت در شيب مدل اصلي بدتر از روشهاي $MCUSUM/\chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ مي‌باشد ليكن تفسيرپذيري روش در كشف پارامتر عامل شيفت از جمله مزاياي روش پيشنهادي بر روشهاي ياد شده است. به عبارت ديگر بعد از كشف حالت خارج از كنترل توسط هر يك از روشها، روش ۳- $CUSUM$ به دليل اينكه از ۳ نمودار كنترل مجزا براي پايش هر يك از پارامترهاي مدل استفاده مي‌كند قادر است مشخص كند شيفت در كدام يك از پارامترهاي مدل رگرسيون شامل عرض از مبدا، شيب و يا انحراف معيار باعث ايجاد حالت خارج از كنترل شده است. بديهي است دانستن پارامتر خارج از كنترل به مهندس كيفيت كمك مي‌كند تا زودتر بتواند علت غير تصادفي را كشف و فرايند را اصلاح نمايد.

۵- بررسي اثر مقدار ماخذ K

هدف از اين بخش، بررسي اثر مقدار ماخذ روي عملكرد روش پيشنهادي و نيز مقايسه عملكرد روش هاي ياد شده در بخش ۲ با روش ۳- $CUSUM$ به ازاي مقادير ماخذ متفاوت است.

در قسمت اول به مطالعه عملكرد نمودار كنترل ۳- $CUSUM$ با دو مقدار مختلف K براي نمودارهاي عرض از مبدا و شيب پرداخته شده است كه K اول كوچكتر از مقداري است كه پيش از اين در نظر گرفته شده بود و دومين K بزرگتر از آن مقدار است. در نمودار $CUSUM$اي كه براي پايش عرض از مبدا طراحي شده مقادير ماخذ ۰/۲ و ۰/۸ و به ترتيب حدودكنترل ۲/۷و ۰/۶۹۱ انتخاب شده و در مورد نموداري كه براي پايش شيب طراحي شده مقادير ماخذ ۰/۰۲۵ و ۰/۱ و به ترتيب حدود كنترل ۲/۶۴ و ۱/۱۱ انتخاب شده و ARLهاي تحت كنترل نزديک ۵۷۰ حاصل شده اند. از آنجا كه روش پيشنهادي به ازاي مقدار ماخذ انتخاب شده براي پايش پراكندگي خطا در تمامي شيفت‌ها داراي عملكردي مناسب است، نيازي به تغيير مقدار ماخذ اين نمودار احساس نشده است.

نتايج حاصل از اين بررسي‌ها در جداول ۶ و ۷ آورده شده‌اند. جدول ۶ نشان‌دهنده وقوع شيفت در عرض از مبدا بوده و جدول ۷ نمايانگر وقوع شيفت در شيب مدل اصلي است. سطرهاي اين جداول عملكرد روش ۳- $CUSUM$ با مقادير مختلف K به ترتيب از كوچك تا بزرگ را نشان مي‌دهند. يعني براي بدست آوردن نتايج ارائه شده در سطر اول اين جداول از مقدار ماخذ ۰/۲ براي نمودار عرض از مبدا و مقدار ماخذ ۰/۰۲۵ براي نمودار شيب استفاده شده است. نتايج حاصل از روش ۳- $CUSUM$ در بخش قبل با مقادير ماخذ ۰/۵ و ۰/۰۵ براي عرض از مبدا و شيب در سطر دوم اين دو جدول گزارش شده‌اند و در نهايت از مقادير ماخذ ۰/۸ و ۰/۱ در نمودارهاي جمع تجمعي عرض از مبدا و شيب استفاده شد و نتايج گزارش شده در سطر سوم بدست آمدند.

بر اساس نتايج جداول ۶ و ۷ مي‌توان نتيجه گرفت با تخصيص مقادير كوچك به K قادر به تشخيص سريعتر شيفت‌هاي كوچك بوده و با تغيير اين مقدار به عددي بزرگ مي‌توان شيفت‌هاي بزرگ را زودتر تشخيص داد. بعلاوه، در صورت تمايل به كشف تغييرات در كل محدوده شيفت‌ها، بهترين مقدار ماخذ نصف ميانه شيفتي است كه مايل به كشف

آن بوده. در اين مطالعه اين مقدار انتخاب شده و نتايج مناسبي حاصل شده است. حال اگر هدف، كشف شيفت‌هاي بزرگ و يا كوچك باشد بايستي به ترتيب از مقادير ماخذ بزرگتر و يا كوچكتر استفاده كرد.

در ادامه به مقايسه عملكرد روش هاي اشاره شده در بخش ۲ با روش۳- $CUSUM$ به ازاي مقاير ماخذ کوچک، متوسط و بزرگ پرداخته مي‌شود. اين امر از طريق استفاده همزمان جداول ۱ و ۶ جهت تشخيص شيفت در عرض از مبدا و جداول ۲ و ۷ براي تشخيص شيفت در شيب مدل اصلي ميسر مي‌گردد. همانگونه كه ديده مي‌شود، در تشخيص شيفت هاي كوچک در عرض از مبدا، با وجود اينكه مقادير ARL با كاهش مقدار ماخذ كاهش يافته اند، اما همچنان روشهاي $MCUSUM/\ \chi^2$ و $MEWMA/\ \chi^2$ داراي عملكرد بهتري هستند و جايگاه روش پيشنهادي پس از اين دو روش است. اما در تشخيص شيفت هاي متوسط وبزرگ در عرض از مبدا، به ترتيب با انتخاب مقادير ماخذ متوسط و بزرگ، روش پيشنهادي بهترين عملكرد را در ميان ساير روش ها داراست. درخصوص تشخيص شيفتهاي كوچك در شيب مدل اصلي، روش پيشنهادي با مقدار ماخذ کوچک پس از روش هاي $MCUSUM/\ \chi^2$ و $MEWMA/\chi^2$ داراي بهترين عملكرد بوده، در تشخيص شيفت هاي متوسط و بزرگ، با انتخاب مقادير ماخذ متوسط و بزرگ، پس از روش $MEWMA/\chi^2$ در جايگاه دوم قرار دارد و در تشخيص بزرگترين شيفت، همرديف روش $MEWMA/\chi^2$ داراي بهترين عملكرد است.

۶- نتيجه

در اين مقاله روشي جديد به منظور بهبود پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در فاز ۲ ارائه شد. در اين روش استفاده همزمان از سه نمودار كنترل $CUSUM$ به منظور پايش عرض از مبدا، شيب و پراكندگي خطا پيشنهاد گرديد. عملكرد اين روش با استفاده از شبيه‌سازي بررسي و با روش هاي موجود T^2، $EWMA/R$ ، ۳- $EWMA$، χ^2 /$MCUSUM$، $MEWMA/\chi^2$ و GLT/R مقايسه شد. بررسي‌ها نشان داد كه روش پيشنهادي در تشخيص بيش از۶۰% شيفت هاي مورد مطالعه داراي بهترين عملكرد بوده و يا نزديک و هم‌رديف قوي‌ترين روش‌ها عمل مي‌كند. تفسيرپذيري روش در كشف پارامتر عامل شيفت از مزاياي روش پيشنهادي عنوان شد. همچنين مطالعات شبيه‌سازي نشان داد كه مي‌توان عملكرد روش پيشنهادي را با انتخاب مقدار مناسب ماخذ، K، براي تشخيص شيفت‌هاي با اندازه‌هاي مختلف تقويت نمود. يعني، در صورت تمايل به تشخيص شيفت‌هاي كوچك، مقدار K را كوچك در نظر گرفته، در نتيجه اين روش داراي عملكرد بهتري در تشخيص شيفت‌هاي كوچك خواهد بود، به همين ترتيب در مورد شيفت‌هاي متوسط و بزرگ. لذا براي پايش پروفايل‌هاي خطي ساده در فاز ۲، روش۳- $CUSUM$ به عنوان روشي كارا پيشنهاد مي‌شود.

جدول(۱): مقايسات ARL تحت شيفت در عرض از مبدا از A_0 به $A_0+\lambda\sigma$

Chart \ λ	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
$EWMA/R$	۶۶/۵	۱۷/۷	۸/۴	۵/۴	۳/۹	۳/۲	۲/۷	۲/۳	۲/۱	۱/۹
T^2	۱۳۷/۷	۶۳/۵	۲۸	۱۳/۲	۶/۹	۴	۲/۶	۱/۸	۱/۵	۱/۲
$EWMA-3$	۵۹/۱	۱۶/۲	۷/۹	۵/۱	۳/۸	۳/۱	۲/۶	۲/۳	۲/۱	۱/۹
$MCUSUM/\chi^2$	۳۳/۵	۱۲/۲	۷/۳	۵/۱	۳/۹	۳/۱	۲/۶	۲	۱/۷	۱/۵
$MEWMA/\chi^2$	۳۹/۴	۱۲/۸	۶/۷	۴/۵	۳/۳	۲/۷	۲/۲	۱/۸	۱/۶	۱/۴
$CUSUM-3$	۷۲/۱	۲۰/۳	۸/۲	۴/۶	۳/۱	۲/۴	۱/۹	۱/۶	۱/۴	۱/۳

جدول(۲): مقايسات ARL تحت شيفت در شيب از A_1 به $A_1+\beta\sigma$

Chart \ β	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۷۵	۰/۱	۰/۱۲۵	۰/۱۵	۰/۱۷۵	۰/۲	۰/۲۲۵	۰/۲۵
$EWMA/R$	۱۱۹	۴۳/۹	۱۹/۸	۱۱/۳	۷/۷	۵/۸	۴/۷	۳/۹	۳/۴	۳
T^2	۱۶۶	۱۰۵/۶	۶۰/۷	۳۴/۵	۲۰/۱	۱۲/۲	۷/۸	۵/۲	۳/۷	۲/۷
$EWMA-3$	۱۰۱/۶	۳۶/۵	۱۷	۱۰/۳	۷/۲	۵/۵	۴/۵	۳/۸	۳/۳	۲/۹
$MCUSUM/\chi^2$	۵۶/۵	۲۱/۴	۱۲/۲	۸/۳	۶/۳	۵/۱	۴/۲	۳/۵	۳/۱	۲/۷
$MEWMA/\chi^2$	۵۹/۷	۲۲/۱	۱۱/۲	۷/۱	۵/۲	۴/۱	۳/۴	۲/۸	۲/۵	۲/۲
$CUSUM-3$	۸۵/۷	۳۷/۸	۱۹	۱۱/۱	۷/۲	۵	۳/۹	۳/۱	۲/۶	۲/۳

جدول(۴): مقایسات ARL تحت شیفت درانحراف معیار از σ به $\gamma\sigma$

Chart \ γ	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳
EWMA/R	۳۴/۳	۱۲	۶/۱	۳/۹	۲/۹	۲/۳	۱/۹	۱/۷	۱/۵	۱/۴
T^2	۳۹/۶	۱۴/۹	۷/۹	۵/۱	۳/۸	۳	۲/۵	۲/۲	۲	۱/۸
$EWMA-3$	۳۳/۵	۱۲/۷	۷/۲	۵/۱	۳/۹	۳/۲	۲/۸	۲/۵	۲/۳	۲/۱
MCUSUM / χ^2	۳۷/۲	۱۱/۸	۵/۷	۳/۶	۲/۶	۲	۱/۷	۱/۵	۱/۴	۱/۳
MEWMA / χ^2	۳۵/۱	۱۱/۴	۵/۶	۳/۵	۲/۵	۲	۱/۷	۱/۵	۱/۴	۱/۳
CUSUM – 3	۳۱/۲	۹/۴	۴/۸	۳/۲	۲/۴	۲	۱/۷	۱/۵	۱/۴	۱/۳

جدول(۵): مقایسات ARL تحت شیفت در شیب از B_1 به $B_1+\delta\sigma$

Chart \ δ	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
EWMA/R	۷۶/۷	۳۳/۷	۱۵/۳	۷/۵	۴/۲	۲/۶	۱/۸	۱/۴	۱/۲
T^2	۵۲/۲	۲۱/۲	۹/۶	۴/۹	۲/۹	۱/۹	۱/۵	۱/۲	۱/۱
$EWMA-3$	۱۳/۱	۶/۶	۴/۴	۳/۳	۲/۷	۲/۳	۲/۱	۱/۹	۱/۷
MCUSUM / χ^2	۱۲۳/۶	۵۴/۱	۲۲/۷	۱۰/۷	۵/۴	۳/۲	۲/۱	۱/۶	۱/۳
MEWMA / χ^2	۱۲۸/۹	۵۴/۳	۲۳	۱۰/۸	۵/۵	۳/۲	۲/۱	۱/۶	۱/۳
CUSUM -3	۱۲/۴	۷/۹	۵/۸	۴/۶	۳/۸	۳/۳	۲/۹	۲/۶	۲/۴

جدول(۶): بررسي اثر مقدار ماخذ از طريق مقايسات ARL تحت شيفت در عرض از مبدا از A_0 به $A_0+\lambda\sigma$

Chart \ λ	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
CUSUM – 3 (small K)	۳۹/۹	۱۳/۲	۷/۵	۵/۲	۴	۳/۳	۲/۸	۲/۵	۲/۲	۲/۱
CUSUM – 3 (medium K)	۷۲/۱	۲۰/۳	۸/۲	۴/۶	۳/۱	۲/۴	۱/۹	۱/۶	۱/۴	۱/۳
CUSUM – 3 (big K)	۹۷/۹	۳۶/۶	۱۳/۹	۶/۵	۳/۷	۲/۵	۱/۹	۱/۵	۱/۳	۱/۲

جدول(۷): بررسي اثر مقدار ماخذ از طريق مقايسات ARL تحت شيفت در شيب از A_1 به $A_1+\beta\sigma$

Chart \ β	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۷۵	۰/۱	۰/۱۲۵	۰/۱۵	۰/۱۷۵	۰/۲	۰/۲۲۵	۰/۲۵
CUSUM – 3 (small K)	۶۲/۳	۲۵/۶	۱۴/۱	۹/۴	۷	۵/۶	۴/۷	۴	۳/۵	۳/۲
CUSUM – 3(medium K)	۸۵/۷	۳۷/۸	۱۹	۱۱/۱	۷/۲	۵	۳/۹	۳/۱	۲/۶	۲/۳
CUSUM – 3 (big K)	۱۰۶/۸	۵۲/۲	۲۸/۱	۱۵/۸	۹/۸	۶/۵	۴/۶	۳/۵	۲/۷	۲/۲

۷- مراجع

[۱] نورالسناء، رسول؛ اميري، اميرحسين؛ "بهبود پايش پروفايل‌هاي خطي در فاز ۲"، مجله علمي و پژوهشي اميركبير، جلد ۱۸، ش ب۶۶ ، ص ۱۹ تا ۲۷ ، ۱۳۸۶.

[۲] Croarkin, C.; Varner, R.; “Measurement Assurance for Dimensional Measurements on Integrated-Circuit Photomasks". NBS Technical Note 1164, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1982.

[۳] Crowder, S. V.; Hamilton, M. D.; “An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation”, Journal of Quality Technology, Vol. 24, No. 1, p.p. 12-211, 992.

[۴] Ding, Y.; Zeng, L.; Zhou, S; “Phase I Analysis for Monitoring Nonlinear Profiles in Manufacturing Processes”, Journal of Quality Technology, Vol. 38, No. 3, p.p.199-216, 2006.

[۵] Gupta, S.; Montgomery, D. C.; Woodall, W. H.; “Performance Evaluation of Two Methods for Online Monitoring of Linear Calibration Profiles”, International Journal of Production. Research, Vol. 44, No. 10, p.p. 1927–1942, 2006.

[۶] Healy J.D; “A Note on Multivariate CUSUM Procedures”, Technometrics, Vol. 29, No. 4, p.p. 409-412, 1987.

[۷] Jensen, W. A.; Birch, J. B.; “Profile Monitoring via Nonlinear Mixed Models”. Technical Report No. 06-4, Department of Statistics, Virginia Polytechnic Institute & State University, 2006.

[۸] Kang, L.; Albin, S. L.; "On-line Monitoring When the Process Yields a Linear Profile", Journal of Quality Technology, Vol. 32, No. 4, p.p.418-426, 2000.

[۹] Kazemzadeh, R. B.; Noorossana, R.; Amiri, A; “Phase I Monitoring of Polynomial Profiles”, Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol. 37, No. 10, p.p.1671-1686, 2008.

[۱۰] Kazemzadeh, R. B.; Noorossana, R; and Amiri, A.; “Monitoring Polynomial Profiles in Quality Control Applications”, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. 42, No. 7, p.p. 703-712, 2009.

[۱۱] Kim, K.; Mahmoud, M. A.; Woodall, W. H.; "On the Monitoring of Linear Profiles", Journal of Quality Technology, Vol. 35, No. 3, p.p. 317–328, 2003.

[۱۲] Lowry C.A.; Woodall W.H.; Champ C.W.; Rigdon S.E. “A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart”, Technometrics, Vol. 34, No. 1, p.p. 46-53, 1992.

[۱۳] Mahmoud, M. A.; Parker, P. A.; Woodall, W. H.; Hawkins, D. M.; "A Change Point Method for Linear Profile Data", Quality and Reliability Engineering International, Vol. 23, No. 2, p.p. 247–268, 2007.

[۱۴] Mahmoud, M. A.; Woodall, W. H.; "Phase I Analysis of linear profiles with calibration applications", Technometrics, Vol. 46, No. 4, p.p. 380-391, 2004.

[۱۵] Niaki, S. T. A.; Abbasi, B.; Arkat, J.; "A Generalized Linear Statistical Model Approach to Monitor Profiles", International Journal of Engineering, Transactions A: Basics, Vol. 20, No. 3, p.p. 233–242, 2007.

[۱۶] Stover, F. S.; Brill, R. V.; "Statistical Quality Control Applied to Ion Chromatography Calibrations", Journal of Chromatography, Vol. 804, No.1-2, p.p.37-43, 1998.

[۱۷] Wang, K.; Tsung, F.; "Using Profile Monitoring Techniques for a Data-Rich Environment with Huge Sample Size". Quality and Reliability Engineering International, Vol. 21, No. 7, p.p. 677–688, 2005.

[۱۸] Williams, J. D.; Woodall, W. H.; Birch, J. B.; “Statistical Monitoring of Nonlinear Product and Process Quality Profiles”, Quality and Reliability Engineering International, Vol. 23, No. 8, p.p. 925-941, 2007.

[۱۹] Woodall, W. H.; Spitzner, D. J.; Montgomery, D. C.; Gupta S.; "Using Control Charts to Monitor Process and Product Quality Profiles", Journal of Quality Technology, Vol. 36, No. 3, p.p. 309–320, 2004.

[۲۰] Woodall, W. H; “Current Research on Profile Monitoring”. Revista Producão, Vol. 17, No. 3, p.p. 420-425, 2007.

[۲۱] Zou, C.; Tsung, F.; Wang, Z; “Monitoring General Linear Profiles Using Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Schemes”, Technometrics, Vol. 49, No. 4, p.p. 395-408, 2007.

[۲۲] Zou, C.; Zhang, Y.; Wang, Z.; “Control Chart Based on Change-Point Model for Monitoring Linear Profiles”, IIE Transactions. Vol. 38, No. 12, p.p. 1093-1103, 2006.