

## تاثیر پارامترهای مختلف در توزیع تنش صفحات غیرهمسانگرد با بریدگی مثلثی

محمد جعفری<sup>i\*</sup>؛ جلیل رضایی پژند<sup>ii</sup>

### چکیده

صفحات حاوی بریدگی در کاربردهای صنعتی بسیاری دیده می‌شود. این بریدگیها در صفحات، بیشتر برای کاهش وزن سازه یا نیاز به راههای ورودی و خروجی در سازه ایجاد می‌شود. به‌خاطر تغییری که در اثر هندسه صفحه در اثر این بریدگیها ایجاد می‌شود تنش موضعی شدیدی در اطراف بریدگی ایجاد می‌شود که تمرکز تنش نامیده می‌شود. دانستن مقادیر تمرکز تنش در دستیابی به طراحی بهین بسیار مهم می‌باشد. در این مقاله تحلیل تنش اطراف بریدگی مثلثی بطور کامل با در نظر گرفتن پارامترهای مختلف موثر بر شدت تنش شامل زاویه بار، زاویه الیاف، زاویه چرخش بریدگی و تاثیر مواد همچنین اثر انحنای گوشه بریدگی مورد بررسی قرار گرفته است. اساس روش مورد استفاده در این مقاله بر پایه یک حل تحلیلی است. این حل از بسط حل تحلیلی لخنیتسکی که پیشتر برای بریدگی دایره‌ای و بیضی استفاده می‌شد، بدست می‌آید. برای اثبات درستی جوابها، حل المان محدود نیز صورت گرفته است. با توجه به نتایج ارائه شده، پارامترهای یاد شده تاثیر بسزایی در شدت تنش اطراف بریدگی مثلثی دارند.

کلمات کلیدی : بریدگی مثلثی، حل تحلیلی، صفحه سوراخدار، مواد غیرهمسانگرد

### *Effect of Different Parameters on Stress Distribution in Anisotropic Plates with Triangular Cutout*

M. Jafari; J. Rezaeepazhand

#### ABSTRACT

Holes or cutouts present in many practical structures. Cutouts are needed to reduce the weight of the system or provide access to other parts of the structure. These cutouts create highly localized stresses or stress concentration at the vicinity of the cutout. The understanding of the effects of cutouts on stress concentration of such structures is very important in design. In this study, a simple analytical method for stress analysis of perforated plates is presented. The Lekhnitskii's solution for circular and elliptical cutout is expanded to triangular cutout shape using complex variable mapping. The solution is capable of considering large variety of cutouts with different shapes, bluntness, fiber angle, load angle and rotation angle. The results obtained clearly demonstrate the effect of these parameters on maximum stresses in perforated plates subjected to uni-axial tensile load.

**KEYWORDS :** Triangular Cutout, Analytical Solution, Perforated Plates, Anisotropic

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۳/۲۲

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۸/۱۰/۷

E-mail: mojaf2001@yahoo.com

<sup>i\*</sup> نویسنده مسئول و استادیار دانشگاه صنعتی شاهرود؛ دانشکده مهندسی مکانیک

E-mail: jrezaeep@ferdowsi.um.ac.ir

<sup>ii</sup> دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد

## ۱- مقدمه

امروزه کاربرد مواد مرکب در صنعت افزایش چشم گیری یافته است. در طراحی بهینه خودرو و هواپیما از این مواد برای افزایش استحکام و کاهش وزن کمک می‌گیرند. طراحی بهینه برای ساختارهای مختلف در ارتقا طرح بسیار مهم است. برای دستیابی به این هدف اولین گام شناخت پارامترهای حاکم بر طراحی است. بعد از شناخت این پارامترها با مطالعه چگونگی تاثیرگذاری آنها می‌توان برای رسیدن به طراحی بهینه گام برداشت. در هر طراحی، بسته به تاثیر هندسه طرح یا چگونگی بارگذاری و تغییر جنس ماده در نقاطی از جسم تنش شدت زیادی دارد که در اصطلاح تمرکز تنش نامیده می‌شود. چون طراحی با دانستن این تنشها ممکن می‌شود، پس بحث تمرکز تنش بحثی بسیار مهم به نظر می‌رسد. در زمینه تمرکز تنش برای مواد همسانگرد و غیرهمسانگرد حلهای زیادی صورت گرفته است. اکثر این حلهای تحلیلی و عددی برای بریدگی‌های منظمی مثل دایره و بیضی می‌باشند. این حلها به‌طور کامل در مورد پارامترهای مختلف و حاکم بر مساله بحث نکرده‌اند، بنابراین یک حل تحلیلی با در نظر گرفتن پارامترهای مختلف طراحی لازم به نظر می‌رسد. در تاریخچه حل تحلیلی برای بریدگی مثلثی، این الزام به روشنی احساس می‌شود.

## ۲- مروری بر کارهای انجام شده

تحلیل تنش صفحات نامحدود و حاوی بریدگی‌های دایره‌ای و بیضوی ساخته شده از مواد همسانگرد که تحت کشش قرار گرفته‌اند، در اکثر کتابهای مقاومت مصالح موجود است. تیموشنکو برای بریدگی بیضی، ضریب تمرکز تنش را بصورت  $K=1+2a/b$  معرفی می‌کند. که در آن  $2a$  قطر بزرگ بیضی و عمود بر امتداد بار است و  $2b$  قطر کوچک بیضی است [۲]. در این رابطه برای  $a=b$  ضریب تمرکز تنش ۳ است که مربوط به بریدگی دایره‌ای است. صفحه با سوراخ مثلثی و با لبه‌های گرد در ابتدا توسط ساوین<sup>۱</sup> [۳] حل شد. او با استفاده از نگاهت همونا و رابطه شوارتز تنش‌ها را محاسبه کرد. وی در مورد مواد همسانگرد برای بریدگیهای مختلف و برای مواد غیرهمسانگرد فقط برای بریدگی بیضی شکل، حلهایی را ارائه داد. سپس براساس تئوریهای لختیسکی<sup>۲</sup> [۴] و ساوین برای مسائل با مقادیر مرزی مختلط یعنی مسائلی که تنش روی قسمتی از مرز و جابجائی روی بخش مانده از مرز مشخص شده‌اند، از روش تحلیلی حلهائی صورت گرفت. این حلها براساس معرفی توابع تنشی بود که معادلات سازگاری را در

حالت تنش صفحه‌ای برآورده می‌کرد. توزیع تنش اطراف بریدگی مثلث متساوی الاضلاع در یک صفحه الاستیک به‌وسیله تئوکاریس<sup>۳</sup> و پترو<sup>۴</sup> [۵] مورد مطالعه قرار گرفت. آنها تاثیر انحنای بریدگی را نیز بررسی کردند. حلهای قبلی برای بریدگی مثلثی دارای محدودیتهایی بودند. مانند حل ساوین که اثر انحنای گوشه بریدگی و سایر پارامترهایی که در این مقاله بررسی شده‌اند، را در نظر نمی‌گرفت. سپس حل ساوین برای بریدگی مثلثی توسط دائوست<sup>۵</sup> و هووا<sup>۶</sup> [۶] بسط داده شد، به طوری که توسط آنها، با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، علاوه بر مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین و مواد غیرهمسانگرد با در نظر گرفتن انحنای گوشه بریدگی حل شد. ولی در این تحلیل نیز بحثی از اثرات پارامترهایی مانند زاویه چرخش بریدگی، زاویه بار و زاویه الیاف برای مواد غیرهمسانگرد صورت نگرفت. ابوالفتوح<sup>۷</sup> [۷] رابطه واحدی برای مولفه تنش مماس بر مرز بریدگی برای هندسه‌های دایره - بیضی مثلث - مربع در صفحه نامحدود از ماده غیرهمسانگرد خاص تحت کشش بیان نمود. او توانست نقاط روی هر بریدگی با شکل خاص را به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل کند. کارهایی نیز توسط رضایی پژند و جعفری در زمینه صفحات فلزی [۸] و صفحات غیرهمسانگرد [۸]-[۱۱]) برای بریدگیهای مختلف از جمله بریدگی مثلثی انجام شده است. در این مقالات نیز پارامترهایی مانند زاویه چرخش و زاویه الیاف ملاحظه نشده است.

## ۳- فرضیات و تعریف مساله

مطابق شکل (۱) صفحه‌ای را که در مرکز دارای یک بریدگی مثلثی است و تحت تنش تک محوره کششی قرار گرفته است، در نظر بگیرید. تنش در فاصله‌ای دور از بریدگی و تحت زاویه‌ای دلخواه ( $\alpha$ ) نسبت به محور افق اعمال می‌شود. محور اصلی بریدگی مثلثی در داخل صفحه می‌تواند زوایای مختلفی ( $\beta$ ) را نسبت به محور افق داشته باشد. این زاویه، زاویه چرخش بریدگی نام‌گذاری شده است. ابعاد بریدگی نسبت به صفحه چنان است که بتوان صفحه را نامحدود تصور کرد. پارامترهای زاویه بار و زاویه چرخش و زاویه الیاف در شکل (۱) به ترتیب با زاویه  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  مشخص شده‌اند. ماده رفتار الاستیک خطی دارد و بین تنش و کرنش رابطه هوک برقرار است.

$$R_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2R_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2R_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + R_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

در این رابطه  $R_{ij}$  اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته صفحه می باشند که براساس فرض تنش صفحه ای ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ) بصورت تابعی از ماتریس سختی  $S_{ij}$  می باشند.

$$R_{ij} = S_{ij} \quad i, j = (1, 2, 6) \quad (5)$$

معادله شماره (۵) به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه اول بصورت رابطه (۶) بیان می شود [۴]:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 U = 0 \quad (6)$$

$$D_i (i=1, 2, 3, 4) = \partial / \partial y - \mu_i \partial / \partial x$$

که  $\mu_i$  جواب معادله مشخصه رابطه (۷) است:

$$R_{11} \mu^4 - 2R_{16} \mu^3 + (2R_{12} + R_{66}) \mu^2 - 2R_{26} \mu + R_{22} = 0 \quad (7)$$

ثابت می شود که معادله شماره (۷) چهار ریشه موهومی دارد [۴]. چهار ریشه این معادله را می توان بصورت رابطه (۸) نوشت:

$$\mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1 \quad (8)$$

$$\mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2$$

چون این ریشه ها دو به دو مزدوج هم هستند، بنابراین حل معادله (۴) با توجه به ریشه های معادله مشخصه به صورت رابطه (۹) خواهد بود:

$$U(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)} \quad (9)$$

فرض رابطه (۱۰) به خاطر پایین آمدن مرتبه مشتق مفید است:

$$\frac{dF_1}{dz_1} = \phi_0(z_1) \quad , \quad \frac{dF_2}{dz_2} = \psi_0(z_2)$$

$$\frac{d\overline{F_1}}{dz_1} = \overline{\phi_0(z_1)} \quad , \quad \frac{d\overline{F_2}}{dz_2} = \overline{\psi_0(z_2)} \quad (10)$$

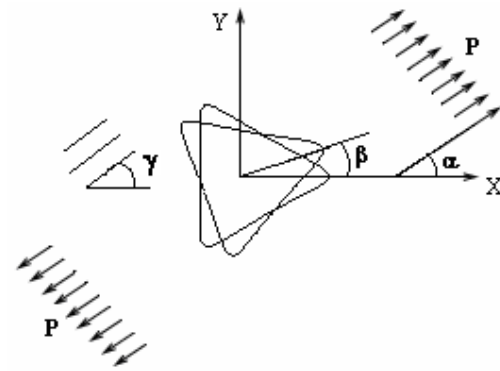
بنابراین در مختصات منحنی الخط نشان داده شده در شکل (۲)، تنش به صورت تابعی از دو تابع تنش  $\phi_0(z_1)$  و  $\psi_0(z_2)$  بیان می شود. توابع تحلیلی  $\phi_0(z_1)$  و  $\psi_0(z_2)$  علاوه بر فرم توابع انتگرالی که توسط ساوین [۳] تعریف شده اند، به فرمهای دیگری مثل سری لورنت نیز بیان می شود. برای شرایط بارگذاری نشان داده شده در شکل (۱) تنش اطراف بریدگی در صفحات غیرهمسانگرد به صورت رابطه (۱۱) بیان می شود:

$$\sigma_x = P \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \phi_0'(z_1) + \mu_2^2 \psi_0'(z_2)]$$

$$\sigma_y = P \sin^2 \alpha + 2 \operatorname{Re}[\phi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)]$$

$$\tau_{xy} = P \sin \alpha \cos \alpha - 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \phi_0'(z_1) + \mu_2 \psi_0'(z_2)] \quad (11)$$

که  $k=1, 2$  می باشد.  $\mu_1$  و  $\mu_2$  در رابطه شماره (۱۱) از معادله تعادل مربوط به مواد غیرهمسانگرد بدست می آید [۴].



شکل (۱): تعریف زاویه بار ( $\alpha$ ) و زاویه چرخش ( $\beta$ ) و زاویه ییاف ( $\gamma$ )

مواد مورد استفاده در این مقاله مطابق مواد بکار رفته در مراجع [۶] و [۸] است. جدول (۱) بیانگر برخی از خواص این مواد است. در این جدول برای مواد مختلف،  $n$  نسبت  $E_2$  به  $E_1$  می باشد. ( $n = E_1/E_2$ )

جدول (۱) خواص مواد [۸]

مواد	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$n$
Steel	۲۰۷	۲۰۷	۷۹/۳	۰/۳	۱
Woven Glass/Epoxy(7781/5 245C)	۲۹/۷	۲۹/۷	۵/۳	۰/۱۷	۱
CE9000 Glass/Epoxy[6]	۴۷/۴	۱۶/۲	۷	۰/۲۶	۲/۹۳
Carbon/Epoxy	۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۲۸	۱۷/۵۷
Carbon/Epoxy(GY-70/934)	۲۹۴	۶/۴	۴/۹	۰/۲۳	۴۵/۹۴

## ۸- روش حل و مدل سازی

مطابق تعمیم قانون هوک در حالت سه بعدی می توان هر مؤلفه تغییر شکل نسبی را به تمام مؤلفه های تنش مربوط ساخت:

$$\epsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (1)$$

$S_{ij}$  ماتریس سختی ماده است. از طرفی اگر  $U(x, y)$  تابع تنش باشد، پس:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

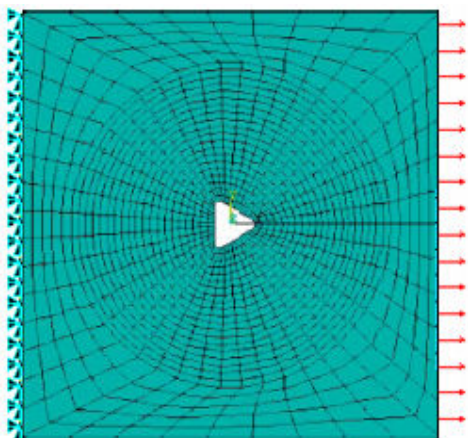
در حالت دو بعدی رابطه سازگاری بصورت رابطه (۳) بیان می شود:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

با ترکیب روابط (۱)، (۲) و (۳)، معادله سازگاری برای ماده غیرهمسانگرد بصورت رابطه (۴) خواهد بود [۴]:

## ۵- بررسی درستی جوابها

به منظور بررسی درستی جوابهای ارائه شده از روش عددی المان محدود و از مراجع مرتبط با موضوع استفاده شده است. المان مورد استفاده Plane42 یا Plane82 با قید تنش صفحه‌ای است. برای اینکه صفحه بی نهایت به نظر برسد کافی است نسبت شعاع دایره محاط بر گشودگی بر ابعاد صفحه، کوچکتر از ۰/۰۵ باشد. چگونگی مش بندی و اعمال شرایط مرزی در شکل (۴) نشان داده شده است.



شکل (۴): چگونگی مش بندی و اعمال شرایط مرزی روش اجزا محدود

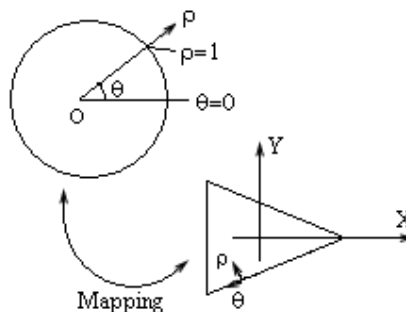
در شکل (۵) مقایسه ای بین روش المان محدود و حل تحلیلی حاضر برای ماده همسانگرد و بریدگی مثلثی در  $w$  های مختلف صورت گرفته است. در نمودارهای ارائه شده تنش بی بعد<sup>۱</sup> با تقسیم تنش ایجاد شده در اطراف بریدگی به تنش صفحه سالم و بدون بریدگی بدست می آید. همپوشانی دو روش حل، نشان دهنده اعتبار و درستی جوابهای ارائه شده در این مقاله است. علاوه بر آن همانطور که انتظار می رود، برای بریدگی دایره‌ای در مواد همسانگرد تمرکز تنش مستقل از نوع ماده بوده و برابر مقدار ۳ است در شکل (۵) نیز حل تحلیلی حاضر جواب ۳ را برای  $w=0$  که معادل بریدگی دایره‌ای است، نشان می دهد.

در ابتدا با مشخص شدن جنس صفحه، معادله (۷) قابل حل بوده و ریشه‌های آن که مطابق رابطه (۸) دو به دو مزدوج بوده، بدست می آید. در ادامه به تعریف هندسه بریدگی برای اعمال شرایط مرزی و به دست آوردن تنش مطابق رابطه (۱۱)، نیاز است. برای بسط روش تحلیلی مربوط به بریدگی دایره‌ای به بریدگی مثلثی، ابتدا باید با استفاده از یک تابع نگاشت ساده  $(z_i=x+\mu_i y)$  مطابق شکل (۲) بریدگی مثلثی را به یک دایره به شعاع واحد تبدیل کرد. برای تعریف هندسه بریدگی از رابطه واحدی که توسط ابوالفتح [۷] بیان شده استفاده می شود:

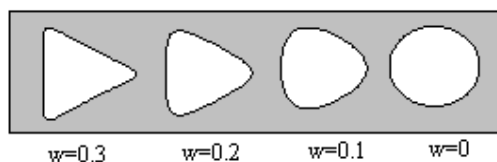
$$\begin{aligned} X &= \cos\theta + w \cos(2\theta) \\ Y &= -\sin\theta + w \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

در این رابطه  $w$  انحناي گوشه بریدگی است و مطابق شکل (۳) با کاهش آن بریدگی به دایره ( $w=0$ ) نزدیک می شود. در حقیقت شکل (۳) ترسیم معادله (۱۲) برای  $w$  های مختلف و  $c=1$  است. برای اینکه حل علاوه بر بریدگی مثلث متساوی الاضلاع قابلیت حل مثلث متساوی الساقین را نیز داشته باشد، از پارامتر  $c$  استفاده شده است. اگر پارامتر  $c$  مخالف یک باشد در این صورت مثلث متساوی الساقین خواهد بود. بعد از تعریف هندسه بریدگی با توجه به معادله (۱۲)، مقادیر  $X$  و  $Y$  معلوم می شود، و پس از مشخص شدن توابع تنش مقادیر تنشهای مختلف مطابق رابطه (۱۱) تعیین می شود [۱۱].

آنچه که برای اولین بار در این مقاله برای بریدگی مثلثی مورد مطالعه قرار گرفته است، اعمال زاویه چرخش بریدگی با تعریف ماتریس دوران مناسب در روابط تحلیلی قبلی است. همچنین بررسی زاویه الیاف نیز از پارامترهایی است که اولین بار در این مقاله صورت گرفته است.



شکل (۲): مختصات منحنی الخط



شکل (۳): تاثیر انحناي گوشه ( $w$ ) در شکل بریدگی

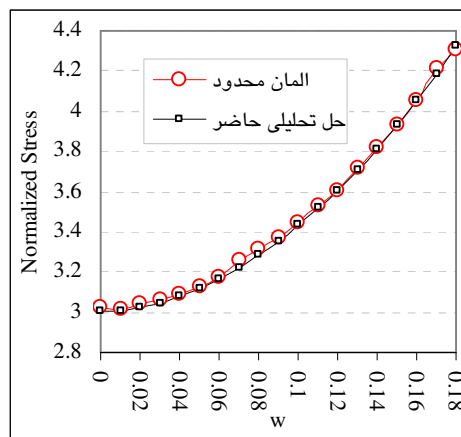
در مقایسه‌های صورت گرفته، برای هر سه روش کلیه زوایای بار، الیاف و چرخش صفر در نظر گرفته شده‌اند. نتایج مراجع مختلف با نتایج حاصل از این مقاله بطور کامل همدیگر را تایید می‌کنند.

## ۶- نتایج

پارامترهایی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است عبارتند از: زاویه الیاف، زاویه بار، زاویه چرخش بریدگی، خاصیت ماده و اثر نرمی و تیزی بریدگی. در این مقاله هر یک از پارامترها بطور مجزا بررسی شده است، بدین معنی که وقتی اثر زاویه الیاف مورد مطالعه قرار می‌گیرد، زاویه بار و زاویه چرخش ثابت در نظر گرفته می‌شود. در اینجا لازم است تا قبل از هرچیز مفهوم تنش مطلوب و تنش نامطلوب توضیح داده شود. اگر برای یک زاویه بار و زاویه الیاف خاص اثر زاویه چرخش بر روی توزیع تنش بررسی شود، به ازای هر زاویه چرخش یک تنش بی بعد حداکثر در اطراف بریدگی وجود خواهد داشت. با تغییر زاویه چرخش مقدار این تنش بی بعد حداکثر نیز تغییر می‌کند. اگر زاویه چرخش از صفر تا ۱۸۰ تغییر کند کمترین و بیشترین تنش بی بعد حداکثر که در زوایای چرخش خاصی اتفاق می‌افتد، به ترتیب تنش بی بعد مطلوب و تنش بی بعد نامطلوب و یا به اختصار تنش مطلوب و تنش نامطلوب نام‌گذاری شده است. در طراحی باید از تنش نامطلوب اجتناب کرده و پارامترهای مختلف طوری انتخاب گردد که به تنش مطلوب منجر شود. در همه نتایج به جز آنجا که در مورد خواص مواد بحث می‌شود، ماده مورد بررسی CE9000 Glass/Epoxy است.

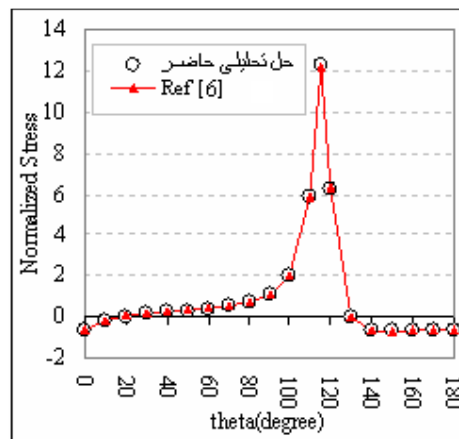
### ۶-۱- تاثیر زاویه چرخش بریدگی ( $\beta$ )

زاویه چرخش بر روی تنش حداکثر، تاثیر دارد. در شکل (۷) تاثیر این زاویه بر روی تنش بی بعد حداکثر مشخص است. این شکل تغییرات زاویه چرخش را از صفر تا ۶۰ درجه نشان می‌دهد. دلیل این امر رفتار تناوبی تابع با دوره تناوب ۶۰ درجه است. مطابق شکل (۷) و طبق تعریف بیان شده، تنش مطلوب در زاویه چرخش صفر یا ۶۰ درجه و تنش نامطلوب در زاویه چرخش ۳۰ درجه اتفاق می‌افتد. نتیجه این شکل برای زوایای بار و الیاف صفر آورده شده است. یعنی اگر زوایای بار و الیاف صفر باشند باید بریدگی تحت زاویه چرخش صفر یا ۶۰ درجه ایجاد شده تا باعث حداکثر تنش بی بعد کمتری شود و همچنین از ایجاد بریدگی تحت زاویه ۳۰ درجه اجتناب گردد.



شکل(۵): مقایسه حل المان محدود و حل تحلیلی حاضر

مقایسه بین روش حل حاضر و حل انجام شده توسط هووا و دائوست [۶] برای بریدگی مثلثی و  $w=1/3$  در شکل (۶) دیده می‌شود. برای این شکل ماده مورد تحلیل CE9000 Glass/Epoxy می‌باشد. در جدول (۲) نیز بین حل تحلیلی حاضر و مراجع مختلف مقایسه‌ای صورت گرفته است. در این جدول  $\theta=\theta_0$  مربوط به زاویه‌ای است که در آنجا بیشترین تنش در اطراف بریدگی ایجاد می‌شود و برای انحنای مختلف متفاوت است (شکل (۲)).



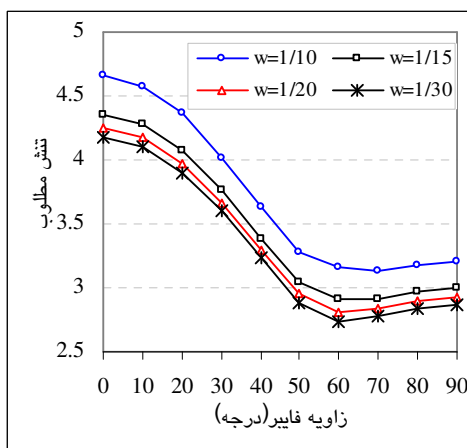
شکل(۶): مقایسه حل مرجع [۶] و حل تحلیلی حاضر برای  $w=1/3$

جدول(۲) مقایسه حل تحلیلی حاضر با مراجع مختلف

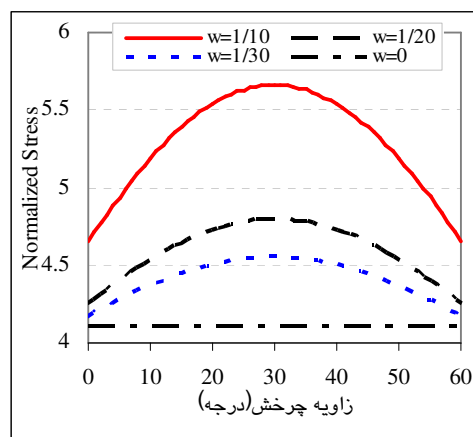
ماده	w	$\theta_0$	Normalized Stress ( $\theta=\theta_0$ )		
			مرجع [۲]	مرجع [۶]	حل حاضر
Isotropic	0.0	0	۲/۰۰	۲/۰۰	۲/۰۰
Isotropic	۱/۴	۱۱۱/۴۷	۵/۳۱	۵/۳۳	۵/۳۱
Isotropic	۱/۳	۱۱۵/۱۷	۸/۲۴	۸/۲۸	۸/۲۵
CE9000	۱/۴	۱۱۱/۴۷	۷/۷۴	۷/۶۳	۷/۷۰
CE9000	۱/۳	۱۱۵/۱۷	۱۲/۳۹	۱۲/۱۳	۱۲/۲۶

است، زاویه ۶۰ درجه است. آنچه که نیاز به تامل و توضیح دارد این است که چگونه هر دو تنش مطلوب و نامطلوب در یک زاویه الیاف یکسان اتفاق می‌افتد. برای پاسخ، لازم است به این نکته توجه شود که طبق تعریف تنش مطلوب و نامطلوب، این تنشها در زوایای چرخش متفاوتی رخ می‌دهند. برای نمونه برای ماده مورد بحث و تحت زاویه الیاف ۶۰ و همچنین  $w=0/05$  زوایای چرخشی که منجر به تنش مطلوب و نامطلوب می‌شود، به ترتیب ۴ و ۳۳ درجه است. با تغییر زاویه الیاف، زاویه چرخشی که در آن تنش مطلوب و نامطلوب رخ می‌دهد متفاوت خواهد بود. بنابراین نتایج ارائه شده در شکل‌های (۹) و (۱۰) در زوایای چرخش متفاوتی اتفاق می‌افتد. همچنین با تغییر انحنای بریدگی ( $w$ ) تنش مطلوب و نامطلوب در زوایای چرخش متفاوتی رخ می‌دهد ولی شدت این تغییرات کمتر است. برای نمونه برای ماده مورد بحث، در زاویه الیاف ۶۰ درجه، اگر فقط تغییرات  $w$  مدنظر باشد، آنگاه با تغییر  $w$  از ۰/۱ تا ۰/۰۳ مقدار این زاویه برای تنش مطلوب از ۳ تا ۵ درجه تغییر می‌کند و برای تنش نامطلوب در این زاویه الیاف مقدار زاویه چرخش مستقل از  $w$  است. همانطور که انتظار می‌رود با تغییر ماده نتایج متفاوت خواهد بود که در قسمت بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بطور کلی مطابق شکل (۱۱)، در زوایای چرخش مختلف وقتی که تاثیر زاویه الیاف بررسی شود، تنش بی بعد حداکثر در زاویه الیاف ۶۰ درجه رخ می‌دهد. البته این شکل برای  $w=0/05$  است ولی برای سایر  $w$ ها نیز نتیجه به همین صورت است.

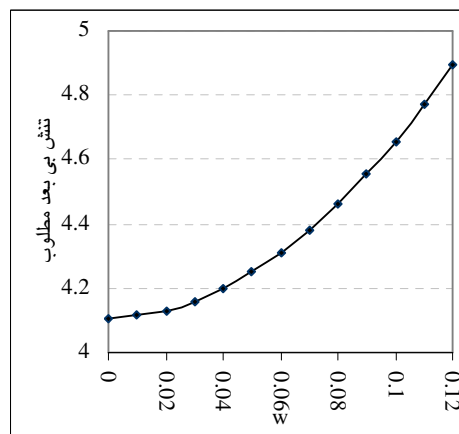


شکل (۹): تاثیر زاویه الیاف بر روی تنش مطلوب



شکل (۷): تاثیر زاویه چرخش روی تنش بی بعد حداکثر

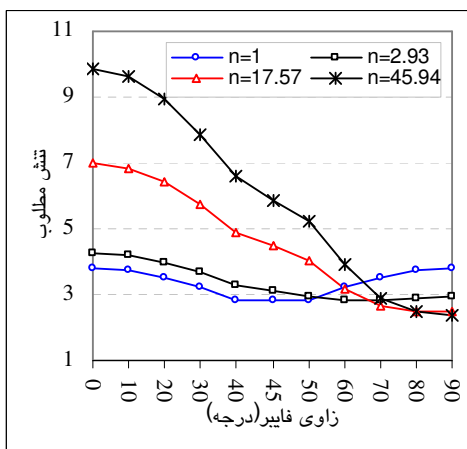
در شکل (۸) تغییرات تنش مطلوب برحسب انحنای گوشه بریدگی ( $w$ ) نشان داده شده است. این نتایج برای  $w$ های مختلف در زاویه چرخش صفر یا ۶۰ درجه اتفاق می‌افتد. همانطور که در این شکل نیز دیده می‌شود، با کاهش  $w$  یا نرمتر شدن بریدگی تنش مطلوب نیز کاهش می‌یابد. به روشنی می‌توان نتیجه گرفت که در  $w=0$  که نشان دهنده بریدگی دایره‌ای است تنش مطلوب کمترین مقدار است.



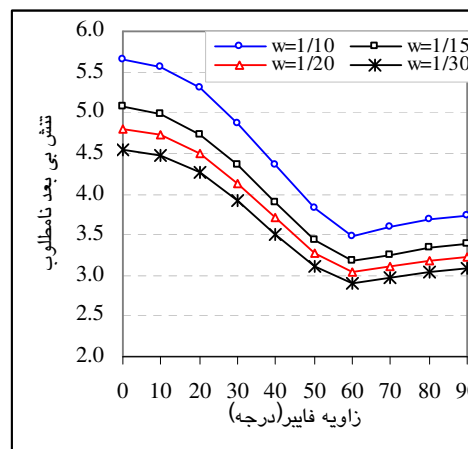
شکل (۸): تاثیر معیار تیزی روی تنش مطلوب

## ۶-۲- تاثیر زاویه الیاف (۷)

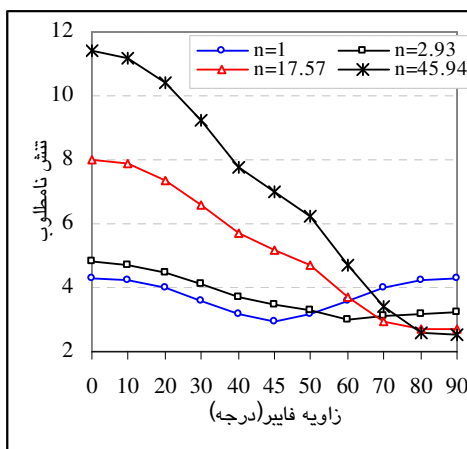
در شکل‌های (۹) و (۱۰) تاثیر زاویه الیاف بر روی تنش‌های مطلوب و نامطلوب به خوبی نشان داده شده است. در این شکل‌ها با تغییر  $w$  مقادیر تنش مطلوب و نامطلوب تغییر می‌کند ولی رفتار کلی منحنی یکسان است. بطور نمونه برای همه  $w$ ها زاویه الیافی که در آن تنش مطلوب و نامطلوب کمترین مقدار



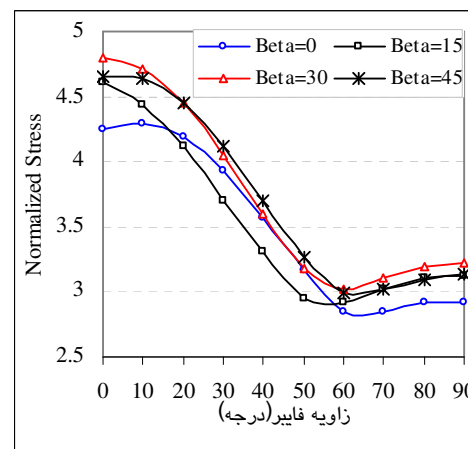
شکل (۱۲): تاثیر ماده بر روی تنش مطلوب برای  $w=0.5$



شکل (۱۰): تاثیر زاویه الیاف بر روی تنش نامطلوب



شکل (۱۳): تاثیر ماده بر روی تنش نامطلوب برای  $w=0.5$



شکل (۱۱): تاثیر زاویه الیاف و زوایای چرخش بر روی تنش بی بعد حداکثر

### ۶-۴- تاثیر زاویه بار ( $\alpha$ )

شکل (۱۴) تاثیر زاویه بار و  $w$  را بر روی تنش بی بعد حداکثر نشان می دهد. این نتایج برای زاویه الیاف صفر و زاویه چرخش صفر (یا ۶۰) آورده شده است. چون زاویه چرخش ثابت در نظر گرفته شده و با تغییر زاویه بار زوایای چرخش نظیر تنش مطلوب و نامطلوب تغییر می کند. در این قسمت نتایج ارائه شده تنش مطلوب و نامطلوب به حساب نمی آید. همانطور که در این شکل نیز نشان داده شده است با کاهش  $w$  برای زوایای بار مختلف تنش بی بعد حداکثر کاهش می یابد. نرخ این کاهش برای زوایای بار مختلف، یکسان است. مقادیر تنش بی بعد حداکثر برای زاویه بار ۶۰ درجه کمترین مقدار است. شکل (۱۵) تاثیر زاویه بار را، در  $w$  های مختلف نشان می دهد. در این شکل به خوبی نشان داده شده است که با تغییر انحنای گوشه بریدگی ( $w$ )، مقدار زاویه باری که در آن تنش بی بعد

### ۶-۳- تاثیر خاصیت ماده:

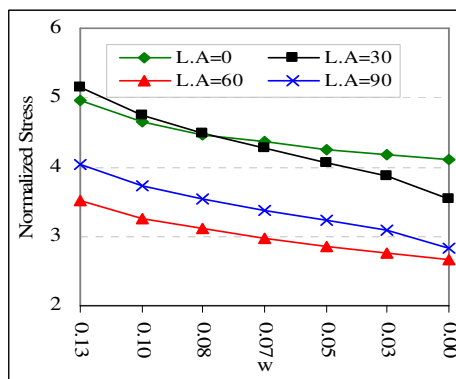
شکل‌های (۱۲) و (۱۳) تاثیر ماده را در زوایای الیاف مختلف بر روی تنش مطلوب و نامطلوب نشان می دهند. در اینجا نتایج ارائه شده برای  $w=0.5$  می باشد. در این شکل‌ها برای مواد مختلف  $n$  نسبت  $E_1$  به  $E_2$  ( $n=E_1/E_2$ ) می باشد. همانطور که در این شکل‌ها نشان داده شده است، برای مواد مختلف تا زاویه الیاف خاصی با کاهش  $n$  تغییرات تنش مطلوب و نامطلوب نامنظم است. برای هر ماده می توان زاویه الیاف بهینه ای معرفی کرد که تحت آن زاویه، تنش مطلوب کمترین مقدار باشد. این زاویه الیاف برای  $n=1$  برابر ۴۵ درجه است و همانطور که پیشتر نیز اشاره شد، برای  $n=2/93$  مقدار این زاویه ۶۰ درجه است. هر چه  $n$  افزایش می یابد این زاویه به ۹۰ نزدیک می شود. رفتار مواد مورد بحث برای  $w$  های مختلف به همین شیوه است فقط مقادیر تنش تغییر می کند...

## ۷- بحث و نتیجه گیری

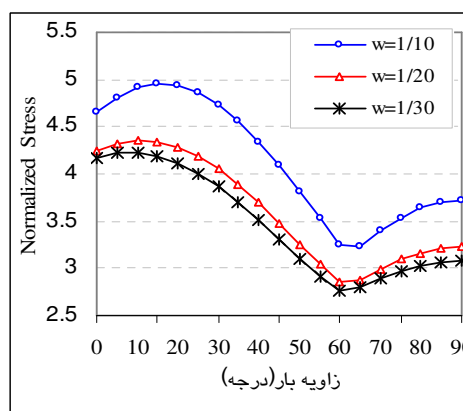
داکتر کمترین مقدار است (زاویه بار بهینه) تغییر می‌کند. برای نمونه زاویه بار بهینه برای  $w=0/1$ ،  $65^\circ$  درجه و برای  $w=0/0.3$  و  $w=0/0.5$  این زاویه برابر  $60^\circ$  درجه است.

داستانن بیشترین تنش و همچنین محلی که این تنش در اثر اعمال بار ایجاد می‌شود در بحث طراحی بسیار حائز اهمیت است و باید مورد توجه قرار گیرد. علاوه بر هندسه بریدگی، پارامترهای مختلفی بر محل و مقدار این بیشترین تنش تاثیرگذار است که مطالعه آنها قدرت طراحی را افزایش می‌دهد. در این مقاله باتوسعه روش حل لخنیتسکی، تحلیل بریدگی مثلثی و تاثیر پارامترهای مختلف بر روی تنش بی بعد حداکثر ممکن گردید. در این مقاله تاثیر هر پارامتر به صورت مجزا بررسی شد. باتوجه به این نتایج می‌توان در طراحی، پارامترهای مختلف را به گونه‌ای انتخاب کرد که به تنشهای کمتری در اثر اعمال بار دست یافت. باتوجه به نتایج ارائه شده، با نرمتر شدن بریدگی تنش مطلوب کاهش می‌یابد و سایر پارامترها مانند زوایای بار و چرخش و الیاف و حتی نوع ماده، بر روند و نرخ این کاهش تاثیرگذار هستند. زاویه بار و زاویه الیاف بهینه یعنی زوایای که در آن تنش بی بعد حداکثر با تغییر پارامترهای یاد شده کمترین مقدار است، با تغییر نوع ماده تغییر می‌کند ولی نوع ماده هیچ تاثیری در مقدار زاویه چرخش بهینه ندارد بعنوان مثال در زاویه بار و زاویه الیاف صفر درجه برای مواد مختلف زاویه چرخش بهینه همان صفر یا  $60^\circ$  درجه است.

حداکثر کمترین مقدار است (زاویه بار بهینه) تغییر می‌کند. برای نمونه زاویه بار بهینه برای  $w=0/1$ ،  $65^\circ$  درجه و برای  $w=0/0.3$  و  $w=0/0.5$  این زاویه برابر  $60^\circ$  درجه است.



شکل (۱۴): تاثیر انحنای گوشه (w) در زوایای الیاف مختلف



شکل (۱۵): تاثیر زاویه بار بر روی تنش بی بعد حداکثر

## ۸- مراجع

- [۷] Abulfoutouh, N.M. "Preliminary design of unstiffend composite shells", Symposium Of 7th technical Conference of ASC, p.p.693-786, 1993.
- [۸] Rezaeepazhand, J.; Jafari, M. "Stress analysis of perforated composite plates", Composite Structures, vol.71, p.p. 463-468, 2005.
- [۹] Rezaeepazhand, J.; Jafari, M. "Stress concentration in composite plates with special shaped cutout", 12th European Conference on Composite Materials, 29th August-1st September 2006.
- [۱۰] Rezaeepazhand, J.; and Jafari, M. "Stress analysis of composite plates with non-circular cut out", Key Engineering Materials, vols. 385-387, p.p. 365-368, 2008.
- [۱۱] Rezaeepazhand, J.; Jafari, M. "Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout", International Journal of Mechanical Sciences, vol. 52, p.p. 96-102, 2010.
- [۱] رضایی پژند، جلیل، جعفری، محمد، "تحلیل تنش در صفحه فلزی با بریدگی مرکزی"، دومین کنفرانس سازه های جدارنازک، کرمان، ص ۷۹ تا ۸۵، آبان ۱۳۸۴.
- [۲] Timoshenko, S.; Goodier, J.N. Theory of elasticity, McGraw-Hill book company, 1951.
- [۳] Savin, G.N.; Stress concentration around hole, New York, Pergamon Press, 1961.
- [۴] Lekhnitskii, S.G.; Anisotropic plates, Gordon & Breach Science Publishers, New York, USA, 1968.
- [۵] Theocaris, P.S.; Petrou, L. "Stress distributions and intensities at corners of equilateral triangular holes", Int J Fract, vol. 31, p.p. 271-289, 1986.
- [۶] Daoust, J.; Hoa, S.V. "An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes". Composite Structure, vol. 19, p.p. 107-130, 1991.



<sup>\</sup>Savin

<sup>\</sup>Lekhnitskii

<sup>\</sup>Theocaris

<sup>\</sup>Petrou

<sup>\</sup>Daoust

<sup>\</sup>Hoa

<sup>\</sup>AbuelFoutouh

<sup>\</sup>Normalized Stress

