

## تحلیل تنش در مقاطع چند سلولی بسته تحت پیچش

خسرو نادران طحان<sup>i\*</sup>؛ محمد شیشه‌ساز<sup>ii</sup>؛ مهدی بهرامی قلعه سفیدی<sup>iii</sup>

### چکیده

در این مقاله، مقاطع چند سلولی بسته تحت پیچش به عنوان اجزای سازه‌ها، برای مشخص کردن چگونگی توزیع تنش در نقاط مختلف مقطع و همچنین برآورد حداکثر تنش برشی و محل آن بررسی شده‌اند. مرز سلول‌ها و همچنین مرز بیرونی برای بعضی مقاطع، دایره در نظر گرفته شده است. در این دسته از مقاطع، با نسبت‌های هندسی متفاوت، مقادیر تنش برشی برای نقاط واقع بر لبه سلول‌ها، به کمک روش اجزای محدود محاسبه و به صورت نمودار رسم شده‌اند. ماکزیمم این تنش‌ها بر حسب نسبت‌های هندسی که نشان دهنده مساحت و ممان اینرسی قطبی مقطع هستند در نمودارهای جداگانه رسم شده‌اند تا میان‌یابی تنش‌های ماکزیمم ساده‌تر شود. مقاطع مستطیلی تو خالی با ضخامت جداره ثابت و متغیر به عنوان نمونه‌ای دیگر از مقاطع بسته نیز در این بررسی مورد مطالعه قرار گرفته است. توزیع تنش‌ها در لبه‌های داخلی، بیرونی و در همسایگی گوشه‌ها و همچنین تنش متوسط در امتداد خط میانی جداره‌ها، محاسبه و تغییرات آن‌ها به صورت نمودار ارائه و افزایش قابل ملاحظه تنش‌ها در نزدیکی گوشه‌ها نشان داده شده است. برخی نتایج حاصل از این بررسی با نتایجی که در منابع دیگر وجود دارد مقایسه و تفاوت‌های موجود مورد بحث قرار گرفته‌اند.

**کلمات کلیدی:** مقاطع چند سلولی دایره‌ای، تمرکز تنش، چند سلولی مستطیلی، جدار نازک.

## *Stress Analysis of Closed Multi Cell Sections under Torsion*

K. Naderan Tahan; M. Shishehsaz; M. Bahrami

### ABSTRACT

Closed multi cell sections under torsion are used as structural members to investigate how the shear stresses vary over the cross section and to find the magnitude and location of the maximum stress. The boundary of cells in one type of sections, are circles. Sections with different geometrical ratios are considered. The shear stress is calculated by finite element method, and the results are plotted. The maximum of these stresses are determined and classified according to the area and polar moment of inertia ratios and plotted in separate diagrams to simplify interpolation. Rectangular boxes with the same and different wall thickness are also investigated as another type of closed multi cell sections. Stresses along the inner and outer edges near the corners and the mean shear stress along the middle line of all section walls are determined. Diagrams show considerable increase in the magnitude of stresses. Some findings are compared with similar quantities found in other references and differences are discussed.

**KEYWORDS:** Circular multi cell sections, stress concentration, rectangular multi cell sections, sharp edges, thin wall sections.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۶/۱۰/۱۱

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۸/۲/۹

<sup>i\*</sup> نویسنده مسئول و دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز Email: naderan\_k@scu.ac.ir

<sup>ii</sup> استاد گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز Email: mshishehsaz@scu.ac.ir

<sup>iii</sup> کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، پژوهشکده تکنولوژی تولید جهاد دانشگاهی خوزستان Email: bhrami001@yahoo.com

## ۱- مقدمه

تنش برشی متوسط در دیواره‌های داخلی مقاطع مستطیلی نسبت به مقدار آن در دیواره‌های بیرونی، ناچیز است.

## ۲- مبانی نظری

از لحاظ نظری برای تعیین تنش در هر نقطه از مقطع جسم توپر با یک مرکز، هنگامی که تحت پیچش قرار گرفته باشد باید بتوان تابع تنش  $\varphi$  را به گونه‌ای تعیین کرد که معادله حاکم، شرط مرزی و شرط تعادل برطبق روابط (۱) تا (۳) را فراهم نماید.

$$\nabla^2 \varphi = -2G\theta \quad (۱) \quad \text{معادله حاکم}$$

$$\oint -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 2G\theta A \quad (۲) \quad \text{شرط مرزی}$$

$$T = 2 \iint \varphi dA \quad (۳) \quad \text{شرط تعادل در مقطع}$$

در این معادلات  $G$  مدول برش،  $\theta$  زاویه پیچش مقطع در واحد طول،  $A$  سطح مقطع جسم،  $n$  بردار نرمال بر مرکز مقطع و  $T$  گشتاور خارجی وارد بر مقطع است.

اگر مقطع دارای چند سلول توخالی هر یک با مرکز جداگانه باشد یکی از روش‌ها برای تعیین تنش در هر نقطه از مقطع از لحاظ نظری منجر به تعیین تابع تنشی می‌شود که از ترکیب خطی توابع تنش جداگانه برای هر یک از سلول‌ها حاصل خواهد شد. در این روش برای هر یک از مرزها تابع تنشی تعریف می‌شود که علاوه بر این که در معادله حاکم (۱) صدق می‌کند مقدار آن روی مرزی که تعریف شده است برابر واحد و روی بقیه مرزها صفر باشد. برای نمونه اگر  $\varphi_i$  تابع تنش مرز  $i$ ام و  $\varphi_0$  تابع تنش مرز آخری باشد (ترتیب شماره گذاری مرزها بطور دلخواه است)، در این صورت تابع تنش  $\varphi$  که به صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود نیز در معادله حاکم صدق می‌کند.

$$\varphi = \varphi_0 + c_1(\varphi_1 - \varphi_0) + c_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \dots + c_i(\varphi_i - \varphi_0) \quad (۴)$$

ضرایب  $c_1, c_2, \dots, c_i$  مقادیر ثابت هستند که با اعمال شرط مرزی برای هر یک از سلول‌ها به صورت رابطه (۵) باید محاسبه شوند.

$$-\oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 2G\theta A_i \quad (۵)$$

در رابطه (۵)،  $A_i$  سطح محصور به مرز  $i$ ام است. به این ترتیب تعدادی معادلات خطی بر حسب  $c_1, c_2, \dots, c_i$  به دست می‌آید که با حل همزمان این معادلات ضرایب ثابت و در نتیجه تابع تنش  $\varphi$  معلوم خواهد شد [۲]. روش مشابهی برای محاسبه تنش در مقطع توخالی دایره‌ای با یک جای خار به کار گرفته شده است [۳]. در همین مرجع منابعی گفته شده که با استفاده از سری‌ها و دستگاه مختصات بیضوی توانسته‌اند

مقاطع چند سلولی در سازه‌های سبک مانند سازه‌های ساختمانی، ماشین آلات، هواپیما و کشتی به صورت بسته یا باز کاربرد فراوان دارند. به لحاظ اهمیتی که مصرف این گونه مقاطع دارند، ارزیابی مقاومت آن‌ها با روش‌های ساده و مطمئن مورد توجه است. اگرچه فرمول‌بندی این گونه مقاطع از لحاظ تئوری کاری ساده است [۱] - [۳] ولی حل معادلات حاصل با اعمال شرایط مرزی زیاد برای یافتن پاسخ‌های تحلیلی عمومی غیرممکن است. از این‌رو محققان با انتخاب روش‌های گوناگون و ساده سازی‌ها و مدل سازی‌های فراوان تلاش کرده‌اند پاسخ‌های تقریبی با دقت کافی را برای محاسبه تنش ماکزیم در این مقاطع پیدا کنند. استفاده از روش تشابه غشایی وقتی جداره سلول‌ها نازک باشد، و یا استفاده از روش تفاضل محدود برای جداره‌های ضخیم وقتی که تعداد سلول‌ها کم باشد [۳] و یا استفاده از روش اجزای محدود [۴] و یا ابداع روش‌های ابتکاری جدید همانند استفاده از تئوری گراف‌ها، [۵] و [۶]، نشانه‌ای از این تلاش‌هاست. در تحلیل مقاطع چند سلولی تحت پیچش یکی از پارامترهای مهم خواص هندسی مقطع در پیچش است. این پارامتر برای مقاطع جدار نازک، مقاطع بسته - باز، برای تیرهای بتون مسلح و برای مقاطع مستطیلی توخالی مورد بررسی قرار گرفته است [۶] - [۹]. رفتار غیرخطی مقاطع و پایداری مقاطع جدار نازک تحت پیچش با مقطع دلخواه ثابت و متغیر نیز تحلیل شده‌اند [۱۰] و [۱۱]. روش اجزای محدود به عنوان یک روش کارآمد و سریع برای تحلیل سازه‌هایی که مقاطع چند سلولی در آن‌ها به کار رفته مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲] - [۱۴]. مجموعه‌ای از مقاطع مختلف توپر، هم چنین مقاطع دایره‌ای و مستطیلی توخالی یک سلولی تحت پیچش همراه با روابطی برای محاسبه تنش و تغییر مکان زاویه‌ای آن‌ها نیز ارائه شده‌اند [۱۵].

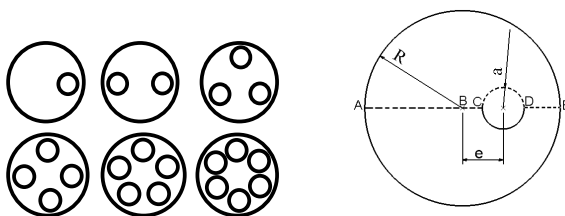
در بررسی حاضر مقطع دایره‌ای با سلول‌های دایره‌ای توخالی و مقطع مستطیلی توخالی تحت گشتاور پیچشی با استفاده از روش اجزای محدود مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته و توزیع تنش در مقطع و ماکزیم و محل آن تعیین و نتایج به صورت نمودار ارائه شده است. همچنین نشان داده می‌شود که در مقاطع بسته با مرزهای دایره‌ای، بسته به ابعاد و اندازه سلول‌ها، تعداد آن‌ها و دوری و نزدیکی سلول‌ها به یکدیگر توزیع تنش برشی یکنواخت نیست و محل ماکزیم آن با توجه به شرایط مرزی ممکن است در جداره بیرونی و یا در جداره داخلی سلول‌ها باشد. همچنین نشان داده می‌شود که

صرفنظر از پیچیدگی روش‌ها برای پیدا کردن تابع تنش مناسب، در مواردی که جداره سلول‌ها نازک باشد به طوری که بتوان تنش برشی را در امتداد آن‌ها ثابت فرض کرد، و برای سلول‌هایی با هر مرز می‌توان راه حل‌های ساده‌تری با استفاده از روش تشابه غشایی برای محاسبه تنش و زاویه پیش این گونه مقاطع به کار گرفت. در این گونه موارد لازم است تمرکز تنش در گوشه مرزها نیز در نظر گرفته شود زیرا با استفاده از نتایج حاصل از روش‌های تشابه غشایی و تشابه تابع پتانسیل الکتریکی نشان داده شده است که بسته به نسبت ضخامت جداره‌ها و شعاع انحنا در محل اتصال ممکن است تنش‌ها در گوشه‌ها به میزان قابل ملاحظه‌ای افزایش یابند.

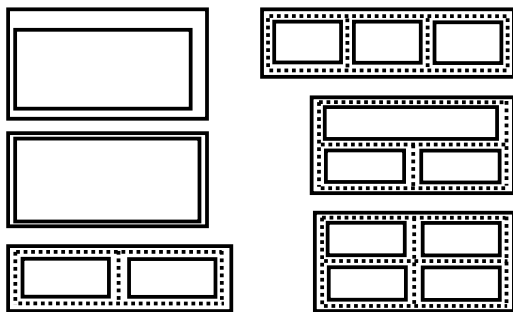
برای محاسبه ضریب تمرکز تنش که به صورت نسبت تنش حداکثر به تنش اسمی در فاصله دور از ناپیوستگی هندسی (در این جا دور از گوشه) تعریف می‌شود، در گوشه مقاطع مستطیلی بسته و باز جدار نازک روابطی تقریبی و نمودارهایی ارائه شده اند [۳].

### ۳- روش بررسی

مقاطع چند سلولی بسته با مرز دایره‌ای به عنوان مقاطع جدار ضخیم، شکل ۱- الف، و مقاطع چند سلولی با مرز مستطیلی به عنوان مقاطع جدار نازک، شکل ۱- ب، به کمک المان ۴۲ plane از نرم افزار Ansys V8 [۱۶]، شبکه بندی و تحلیل شده‌اند. تعداد مناسب المان‌ها برای این مقاطع جداگانه بررسی شده است [۱۷].



الف- دایره‌ای



ب- مستطیلی

شکل (۱): مقاطع چند سلولی

توابع تنش را تعیین کنند که برای محاسبه تنش در مقاطعی با هندسه‌های مختلف توپر و توخالی و با مرزهای مختلف مثل چند ضلعی‌ها، نبشی‌ها، کاردیوئیدها، لمینسکات‌ها و مقاطع دایره‌ای با یک سلول خارج از مرکز به کار می‌روند.

چون پیدا کردن تابع تنش  $\phi$  به روش یاد شده برای اجسامی که شکل هندسی پیچیده‌ای دارند کاری غیر ممکن است، با استفاده از روش اجزا محدود می‌توان آن را به طور تقریبی تعیین و سپس تنش، کرنش و تغییر مکان نقاط مختلف جسم را محاسبه نمود. جزئیات فرمول‌بندی این روش که بر اساس اصل مینیمم تابع پتانسیل کلی،  $X$ ، استوار است در منابع مختلف تشریح شده است [۲] و [۴]. می‌توان ثابت کرد که اگر تابع تنش  $\phi$  در روابط (۱)، (۲) و (۳) درست باشد، در این صورت تابع پتانسیل کلی را که برابر مجموع انرژی کرنشی جسم و انرژی پتانسیل نیروهای وارد بر آن است مینیمم خواهد کرد. تابع پتانسیل کلی بر حسب  $\phi$  و برای جسمی که تحت پیش‌قرار گرفته باشد از رابطه (۶) محاسبه می‌شود [۲]:

$$X = \frac{1}{G} \iint \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\phi \right] dx dy \quad (6)$$

$$\delta X = 0 \quad \text{اصل مینیمم تابع پتانسیل کلی} \quad (7)$$

با تقسیم جسم (در این جا مقطع جسم) به بخش‌های کوچکی به نام المان و با فرض این که بتوان در محدوده المان‌ها،  $\phi$  را بر حسب  $x$  و  $y$  به صورت چند جمله‌ای‌ها با ضرایب ثابت نوشت، می‌توان  $X$  را در محدوده هر المان و در نتیجه برای تمام جسم و یا مقطع آن تعیین نمود. اگر مشتقات  $X$  نسبت به ضرایب چند جمله‌ای‌های فرضی برابر صفر قرار داده شود یک دستگاه معادلات خطی بدست می‌آید که با حل آن و تعیین ضرایب ثابت، تابع تنش  $\phi$  در محدوده هر المان مشخص خواهد شد. به لحاظ سادگی و کارایی این روش، نرم‌افزارهای تجاری به کمک متخصصان تهیه شده است که به کمک آن‌ها با سرعت و دقت کافی می‌توان کمیت‌های مورد اشاره را به ویژه در محدوده رفتار الاستیک خطی مواد، بدست آورد.

برای فرمول‌بندی این نرم‌افزارها به جای  $\phi$  از توابعی که تغییر مکان نقاط درون هر المان را بر حسب تغییر مکان گوشه‌ها یا گره‌های المان بیان می‌کنند، استفاده می‌شود. با داشتن تغییر مکان هر نقطه، می‌توان کرنش‌ها و تنش‌ها را در آن نقطه به راحتی محاسبه نمود. در بررسی حاضر یکی از این نرم‌افزارهای تجاری برای برآورد تنش‌ها مورد استفاده قرار گرفته است.

### ۱-۳- بررسی مقاطع چند سلولی بسته دایره‌ای

مقاطع دایره‌ای با یک تا شش سلول توخالی دایره‌ای، هر یک به شعاع  $a$  که فاصله مرکز آن تا مرکز هندسی مقطع بدون حفره  $e$  و شعاع مقطع بدون حفره  $R$  می‌باشد، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. شکل ۱ - الف تصویر این مقاطع و پارامترهای هندسی آن‌ها را نشان می‌دهد. برای نشان دادن تغییرات تنش ماکزیمم به جای استفاده از پارامترهای بدون بعد  $a/R$  و  $e/R$ ، تعداد سلول‌ها، از دو پارامتر دیگر استفاده شده است: یکی  $l = j/j_0$  که نسبت ممان‌های اینرسی قطبی مقطع با حفره‌های توخالی به ممان اینرسی قطبی مقطع بدون حفره است و دیگری  $m = A/A_0$  که نسبت مساحت‌های این دو مقطع است. به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$m = 1 - N (a/R)^2 \quad (8)$$

$$l = 1 - N (a/R)^2 \left[ (a/R)^2 + 2(e/R)^2 \right] \quad (9)$$

به این ترتیب تعداد متغیرهای مستقل از ۳ به ۲ کاهش می‌یابند. مقطعی که دارای  $l$  و  $m$  های مساوی باشند می‌توانند نسبت‌های  $a/R$  و  $e/R$  و تعداد سلول‌های متفاوت داشته باشند و این امر کار میان‌یابی تنش ماکزیمم را ساده‌تر خواهد کرد. مشخصات هندسی مقاطعی که در بررسی حاضر مورد استفاده قرار گرفته‌اند در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول (۱): مشخصات هندسی مقاطع چند سلولی دایره‌ای

$a/R$	$e/R$				
	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
۰/۳	۰/۱۲	۰/۲۴	۰/۳۶	۰/۴۸	۰/۶
۰/۴	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۴۸
۰/۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۳۶	۰/۴
۰/۶	۰/۱	۰/۱۶	۰/۲	۰/۲۶	۰/۳
۰/۷	۰/۰۶	۰/۱۲	۰/۱۴	۰/۱۸	۰/۲

### ۲-۳- بررسی مقاطع چند سلولی بسته مستطیلی

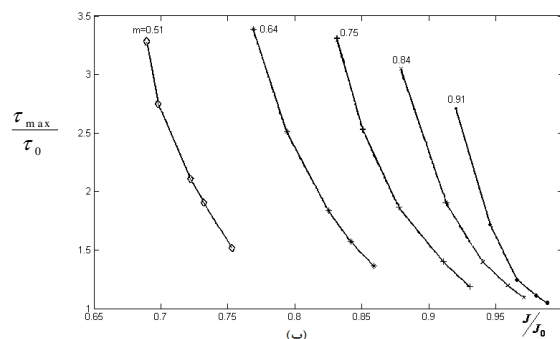
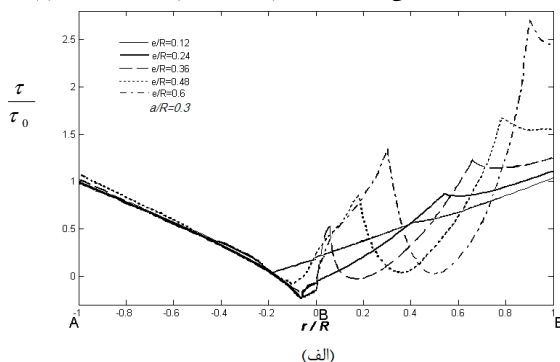
به منظور بررسی تنش در مقاطع چند سلولی بسته مستطیلی، مقاطع یک تا چهار سلول با ویژگی‌های هندسی متفاوت تحلیل شد. اندازه اضلاع بیرونی تمام این مقاطع  $۱۰۰ \times ۵۰$  میلیمتر و ضخامت جداره‌های بیرونی و داخلی در همه آن‌ها بجز یکی، برابر ۵ میلیمتر در نظر گرفته شد. گشتاور پیچشی ۹۰ نیوتن-میلیمتر بر هر کدام از آن‌ها وارد و توزیع تنش در امتداد تمامی جداره‌های بیرونی و داخلی محاسبه و بعضی از آن‌ها به صورت نمودار ترسیم شده‌اند. برای ارزیابی تأثیر تغییر ضخامت بر تمرکز تنش در گوشه‌ها، فقط یک مقطع مستطیلی یک سلولی با ضخامت جداره‌های متفاوت تحلیل شد.

در این مقاطع جهت  $s$  در امتداد خط میانی جداره و جهت  $n$  عمود بر آن انتخاب شده است.

### ۴- نتایج

#### ۴-۱- مقاطع چند سلولی دایره‌ای

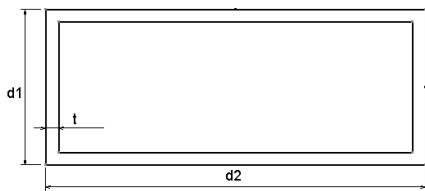
مقادیر تنش برشی در مقاطع دایره‌ای با شعاع بیرونی ۵۰ میلیمتر برای نقاطی واقع بر امتداد یکی از شعاع‌ها که از مرکز حفره می‌گذرد و همچنین در نقاط واقع بر لبه حفره (مسیر خط چین  $ABCD$  در شکل ۱ - الف) به کمک روش اجزای محدود محاسبه شد. با تقسیم این تنش بر مقدار  $\tau_0 = \frac{2T}{\pi R^3}$  که ماکزیمم تنش برشی در مقطع دایره‌ای توپر تحت گشتاور پیچشی است، تنش بی‌بعد حاصل بر حسب فاصله نقاط از مرکز هندسی مقطع توپر، برای یک و یا چند سلول که مراکز آن‌ها روی یک دایره گام و به فواصل مساوی از یکدیگر قرار دارند رسم شد (به عنوان نمونه شکل ۲- الف برای یک سلول و شکل ۳- الف برای چهارسلول). سپس مقادیر ماکزیمم این تنش‌های بی‌بعد برای نسبت‌های مختلف  $a/R$  بر حسب  $l$  و  $m$  به صورت نمودارهایی ارائه شدند (شکل ۲- ب و شکل ۳- ب).



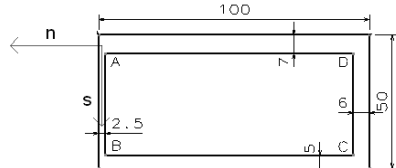
شکل (۲): توزیع تنش برشی در مقطع یک سلولی دایره‌ای با نسبت

$a/R = ۰/۳$  (الف) و تنش برشی ماکزیمم (ب)

شده‌اند.  $t$  و  $t'$  به ترتیب ضخامت جداره نازکتر و ضخیم‌تر و  $\tau_{\max}$  و  $\tau_0$  به ترتیب تنش برشی ماکزیمم در گوشه داخلی و تنش برشی در فاصله دور از گوشه و در جداره داخلی است.

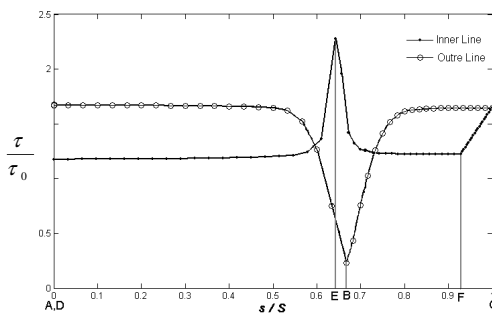


الف- ضخامت ثابت

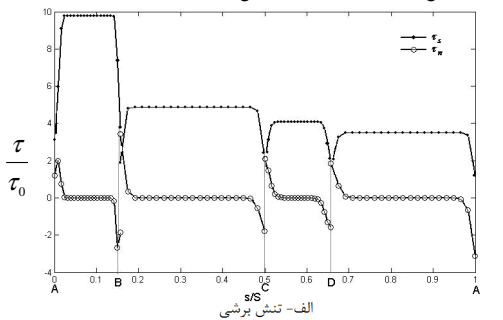


ب- ضخامت متفاوت

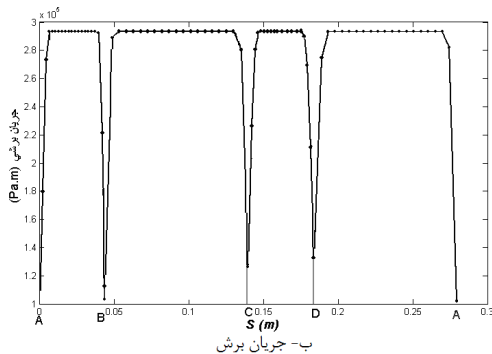
شکل (۴): مقاطع مستطیلی جدار نازک



شکل (۵): توزیع تنش در جداره مقطع مستطیلی با ضخامت ثابت

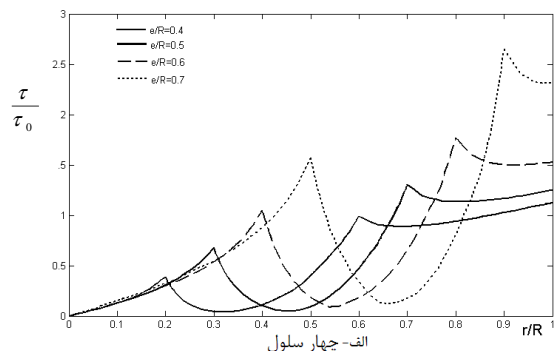


الف- تنش برشی

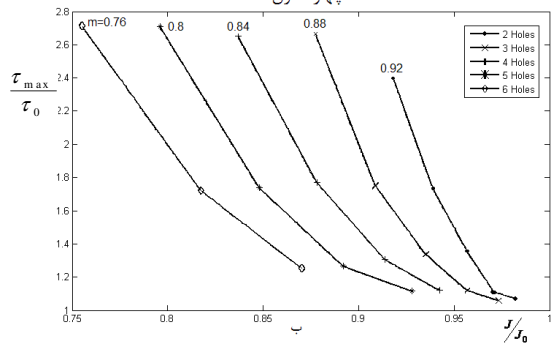


ب- جریان برش

شکل (۶): توزیع تنش و جریان برش در مقطع با جداره‌های متفاوت



الف- چهار سلول



شکل (۳): توزیع تنش برشی در مقاطع چهار سلولی برای  $a/R = 0.2$  (الف) و تنش برشی ماکزیمم برای مقاطع مختلف دایره‌ای (ب)

## ۲-۴- مقاطع چند سلولی مستطیلی

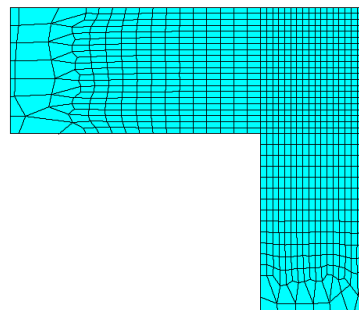
در مقطعی با جداره ثابت (شکل ۴ - الف)، تنش برشی در امتداد لبه داخلی و بیرونی محاسبه و به کمک رابطه  $\tau_0 = \frac{T}{\alpha d_2 d_1^2}$  به ازای  $\alpha = 0.246$  بدون بعد گردیده و تغییرات آن به صورت نمودار در شکل ۵ رسم شد. برای مقطعی با ضخامت جداره متفاوت (شکل ۴ - ب)، علاوه بر مقادیر تنش‌ها در امتداد جداره، تنش‌های عمود بر جداره (شکل ۶ - الف) و جریان برش (شکل ۶ - ب) که به صورت  $q = \tau \cdot t$  تعریف می‌شود نیز محاسبه و ترسیم گردیدند تا بزرگی و اهمیت هر یک از این دو مؤلفه تنش و درستی این فرض که تنش‌ها و تغییرات آن‌ها در امتداد عمود بر جداره ناچیزند ارزیابی شود. برای بررسی تأثیر گوشه‌ها در افزایش تنش‌های برشی، یکی از گوشه‌های مقطع با ضخامت جداره متفاوت، با شبکه بندی ریزتر (نزدیک شش برابر ریزتر) نیز مدل سازی شد (شکل ۷). تنش‌های برشی بر لبه‌های داخلی گوشه‌ها محاسبه شده و به صورت نمودار در شکل ۸ نشان داده شده‌اند. به کمک این نمودار ضرایب تمرکز

تنش،  $k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_0}$  بر حسب  $\frac{t}{t'}$  محاسبه و در جدول ۲ درج

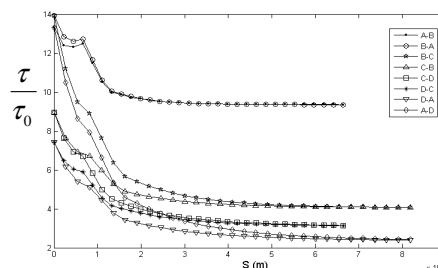
جدول (۲): ضرایب تمرکز تنش در گوشه‌های داخلی

$\frac{t}{t'}$	۰/۳۶	۰/۵	۰/۸۳	۰/۸۶
$k = \frac{\tau_{max}}{\tau_0}$	۱/۴۲	۱/۵	۲/۲۵	۲/۲۵

$e/R$  ممکن است در جداره بیرونی و یا داخلی حفره‌ها باشد. برای مقطع دایره‌ای یک سلولی با نسبت‌های  $a/R = ۰/۳$  و  $e/R = ۰/۱۶$  از شکل-۲ الف نسبت  $\tau_{max}/\tau_0$  نزدیک به  $۲/۷$  برآورد می‌شود در حالی که با استفاده از روابط موجود در [۱۵] این نسبت نزدیک به  $۱/۵۳$  است. این اختلاف زیاد ایجاب می‌کند مطالعه و بررسی بیشتری صورت گیرد. به همین منظور نتایج حاصل از تحلیل یک مقطع با چهار سلول که به صورت متقارن بر یک دایره گام قرار گرفته‌اند با نتایج موجود در [۴] مقایسه شدند. شکل ۱۳ این مقایسه را نشان می‌دهد.



شکل (۷): شبکه بندی گوشه با المان ریز



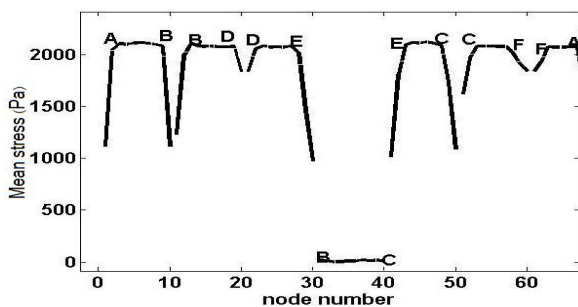
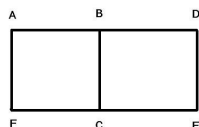
شکل (۸): تغییرات تنش در مجاورت گوشه‌ها برای مقطع مستطیلی با ضخامت متفاوت

شکل‌های ۹ تا ۱۱ توزیع تنش متوسط را در امتداد جداره مقاطع دو، سه و چهار سلولی مستطیلی که هر یک دارای دو محور تقارن عمود بر هم هستند نشان می‌دهند در حالی که شکل ۱۲ نمودار این کمیت را برای مقطع سه سلولی با یک محور تقارن عمودی نشان می‌دهد. در این نمودارها روی محور افقی شماره گره‌ها بجای فاصله درج شده است چون امتداد دیواره‌های داخلی عمود بر امتداد دیواره‌های بیرونی است و درج فاصله نقاط واقع بر آن‌ها روی محور افقی باعث تداخل اندازه در یکدیگر و ایجاد ابهام خواهد شد.

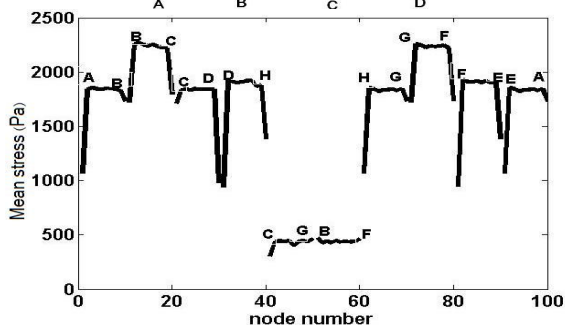
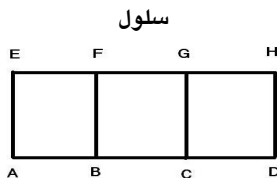
## ۵- بحث و بررسی

### ۵-۱- مقاطع دایره‌ای

شکل‌های ۲- الف و ۳- الف نشان می‌دهند که توزیع تنش در مقاطع توخالی، اگر چه که مرزها دایره‌ای باشند به صورت غیرخطی با دور شدن از مرکز مقطع تغییر می‌کند. علاوه بر آن محل ماکزیمم تنش برشی در مقطع بسته به نسبت هندسی



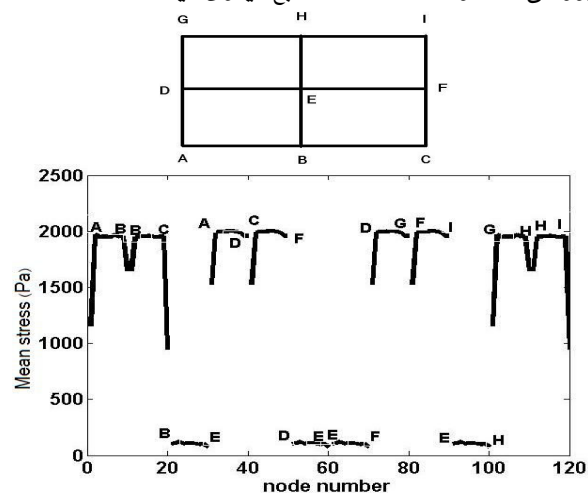
شکل (۹): توزیع تنش متوسط در جداره مقطع مستطیلی با دو سلول



شکل (۱۰): توزیع تنش متوسط در جداره مقطع مستطیلی با سه سلول

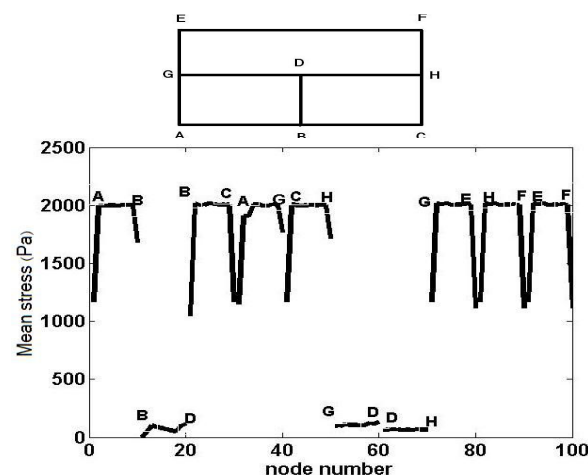
تفاوت‌هایی که در نمودار دیده می‌شود به این دلیل است که در [۴] از المان‌های مثلثی و در مطالعه حاضر از المان‌های چهار ضلعی که مرتبه بالاتری دارند برای مدل سازی مقطع استفاده شده است. برابری و همسویی خوب هر دو بررسی در نقاط ماکزیمم تنش، بر لزوم بازنگری و ارزیابی دوباره روابط

موجود در [۱۵] اشاره می‌نماید. برای محاسبه تنش ماکزیمم و ارزیابی دقت آن‌ها برای مقاطع دایره‌ای چند سلولی دیگر که در بررسی حاضر مطالعه شده‌اند منبع دیگری دیده نشد.



شکل (۱۱): توزیع تنش متوسط در جداره مقطع مستطیلی با چهار

سلول



شکل (۱۲): توزیع تنش متوسط در جداره مقطع مستطیلی با سه

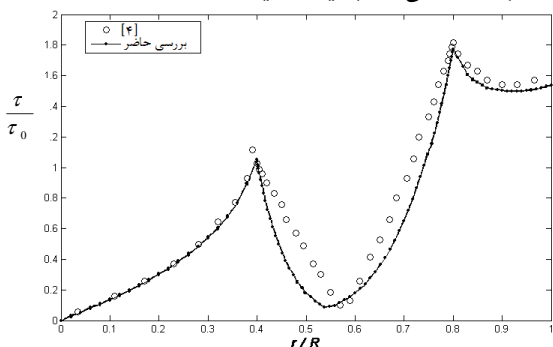
سلول متفاوت

شکل‌های ۲- و ۳- ب به کمک دو پارامتر  $l$  و  $m$  به جای سه پارامتر  $a/R$ ،  $e/R$  و  $N$  تعداد سلول‌ها، رسم شده‌اند. این کار میان‌یابی تنش ماکزیمم را در مقاطعی با تعداد حفره‌ها و نسبت‌های هندسی  $a/R$  و  $e/R$  متفاوت ولی با  $l$  و  $m$  های یکسان، ساده‌تر می‌کند.

## ۲-۵- مقاطع مستطیلی چند سلولی

شکل ۵ نشان می‌دهد که تنش برشی در امتداد جداره‌های داخلی و خارجی مقطع جدار نازک یک سلولی در فواصل دور از گوشه‌ها ثابت‌اند، اگر چه تنش در جداره بیرونی بیشتر از تنش در جداره داخلی است. این موضوع با نتایج حاصل از تشابه غشایی برای مقاطع جدار نازک بسته همخوانی دارد.

همچنین کاهش تنش در گوشه بیرونی تا مقدار ناچیز، با شرط مرزی سطح جانبی بدون تنش، سازگار است. در نزدیکی گوشه‌ها تغییرات شدید در نمودارها ظاهر شده که نشانه تمرکز تنش در آن محل است به طوری که نسبت تنش در جدار داخلی گوشه به مقدار آن در فاصله دور از گوشه برابر ۱/۷۷ است. با استفاده از تئوری پیچش مقاطع جدار نازک بسته، تنش متوسط در امتداد دیواره‌های مقطع شکل ۴- الف قابل محاسبه است. اگر این تنش بر  $\tau$  که پیشتر به آن اشاره شد، تقسیم شود مقدار ۱/۴۴ به دست می‌آید که با مقدار متوسط تنش در امتداد جداره های داخلی و بیرونی حاصل از نمودار شکل ۵ که مقدار تقریبی ۱/۴۲ را به دست می‌دهد بسیار نزدیک است.



شکل (۱۳): مقایسه نتایج حاصل برای مقطع چهار سلولی دایره ای

در بررسی حاضر با نتایج [۴]

شکل ۶- الف نشان می‌دهد که برای هر ضخامت جداره، تنش متوسط در فاصله دور از گوشه مقداری ثابت است و تنش در امتداد عمود بر جداره ناچیز است. با نزدیک شدن به گوشه در هر دو مولفه تنش، تغییرات شدید که نشانه تمرکز تنش است دیده می‌شود. این تمرکز تنش بستگی به نسبت ضخامت‌های جداره‌های مجاور دارد. شکل ۶- ب تغییرات جریان برش را در امتداد جداره و در گوشه‌ها نشان می‌دهد و بیانگر فرض ثابت ماندن جریان برش در جداره‌ها با ضخامت متغیر است. با مراجعه به نمودار شکل ۶- ب جریان برش  $q$  در جداره‌های مقطع شکل ۴- ب وقتی که گشتاور پیچشی ۲۵۰۰ نیوتن-متر به آن وارد می‌شود برابر  $10^{-5} \times 2/93$  به دست می‌آید که با مقدار  $10^{-5} \times 2/92$  که از تئوری پیچش مقاطع جدار نازک بسته محاسبه می‌شود بسیار نزدیک است.

شکل ۸ تغییرات تنش را در جداره داخلی و گوشه‌های مقطعی نشان می‌دهد که ضخامت جداره‌های آن متفاوت است. در اینجا نیز تا فواصل بسیار نزدیک به گوشه می‌توان افزایش تنش را برآورد کرد در حالی که به کمک روابط و منحنی‌های موجود در [۳] نمی‌توان برآوردی از تمرکز تنش در این فواصل به دست آورد.

برای سایر مقاطع چند سلولی مستطیلی، شکل‌های ۹ تا ۱۲، نمودارهای تنش متوسط در امتداد خط میانی دیواره‌های بیرونی و داخلی ترسیم شده است. از این نمودارها نتیجه می‌شود که متوسط تنش در امتداد دیواره‌ها ثابت می‌ماند هر چند که مقدار آن برای دیواره‌های داخلی در مقایسه با دیواره‌های بیرونی در مقاطع دو، سه و چهار سلولی کمتر است. این مطلب نیز با نتایج حاصل از تشابه غشایی همخوانی دارد. با محاسبه این تنش‌ها به کمک روابطی که در [۳] موجود است، مقادیر ۲۶۴۷ و صفر پاسکال به ترتیب برای دیواره‌های بیرونی و داخلی به دست می‌آیند. مقادیر تقریبی متناظر که از نمودار شکل ۹ به دست می‌آیند به ترتیب ۲۱۰۰ و صفر هستند. مقایسه نتایج حاصل از بررسی حاضر با آن چه که از تئوری غشایی مقاطع جدار نازک به دست می‌آید نشان می‌دهد که اختلاف نزدیک به ۲۰٪ است. این اختلاف ناشی از تأثیر تنش گوشه‌ها در نتایج حاصل از FE است.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، توزیع تنش در دو دسته از مقاطع توخالی چند سلولی تحت گشتاور پیچشی، با استفاده از یکی از نرم افزارهای اجزای محدود به صورت پارامتری بررسی شد. دسته اول مقاطع دایره‌ای هستند که در آن‌ها حفره‌های توخالی دایره ای با تعداد و شعاع‌های متفاوت به گونه‌ای در مقطع قرار گرفته‌اند که فاصله مراکز آن‌ها تا مرکز مقطع یکسان است. این

#### ۷- مراجع

آرایش حفره‌ها باعث می‌شود که تنش‌های برشی در نقاط بین حفره‌ها در امتداد شعاع و عمود بر آن تغییر کند و حالت تنش نامتقارن محوری شود. دسته دوم مقاطع مستطیلی هستند که در آن‌ها مرز حفره‌های داخلی نیز مستطیل است. این آرایش حفره‌ها باعث می‌شود که ضخامت تمام یا قسمت‌هایی از دیواره‌ها ثابت باشد، که در صورت نازک بودن، بر اساس تئوری پیچش مقاطع جدار نازک بسته، تنش‌های برشی (یا جریان برش) در امتداد خط میانی دیواره‌ها ثابت می‌ماند. مدل های اجزای محدود هر دو دسته مقاطع با پارامترهای هندسی متفاوت تهیه شد. تنش حاصل از تحلیل مدل‌ها با مقادیر حاصل از منابع دیگر مقایسه و برابری یا نابرابری آن‌ها بررسی شد. جز در مورد مقطع دایره‌ای با یک سلول خارج از مرکز، در بقیه موارد نتایج بسیار نزدیک و قابل قبول ارزیابی می‌شود. همچنین ضرایب تمرکز تنش برای هر دو دسته مقاطع بر حسب پارامترهای هندسی مقطع محاسبه و به صورت نمودار یا جدول ارائه شد. بررسی‌ها نشان دادند که محل تنش ماکزیمم در مقاطع دایره‌ای با توجه به پارامترهای هندسی ممکن است در لبه داخلی یا خارجی دیواره باشد، در حالیکه در مقاطع مستطیلی در گوشه داخلی دیواره بیرونی است. پیشنهاد می‌شود ارزیابی دوباره نمودارهای تمرکز تنش که بر اساس تنش متوسط در امتداد خط میانی جدارها تهیه شده‌اند، صورت گیرد.

[۱۰] Saadé, K., Espion, B., Warzée, G., Non-uniform torsional behavior and stability of thin-walled elastic beams with arbitrary cross section, *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, pp. 857-881 (2004).

[۱۱] Sapountzakis, E. J., Non uniform torsion of bars of variable cross section, *Computers and Structures*, Vol. 82, pp. 703-715 (2004).

[۱۲] Kawai, T., The application of finite element methods to ship structures, *Computers & Structures*, Vol. 3, pp. 1175-1194 (1973)

[۱۳] Krenk, S., Gunneskov, O., A triangulation procedure for elastic cross section with moderate wall thickness, *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 1-22 (1986).

[۱۴] Jönsson, J., Determination of shear stress, warping functions and section properties of thin-walled beams using finite elements, *Computers and Structures*, Vol. 68, pp. 393-410 (1998).

[۱۵] Young, C. W., *Roark's Formulas for stress and strain*, McGraw-Hill Book Company (1985).

[۱۶] ANSYS V8. User Manual.

[۱۷] بهرامی قلعه سفیدی، مهدی، "تحلیل تنش در مقاطع چند سلولی تحت پیچش"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران، اردیبهشت ۱۳۸۵.

[۱] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company (1956).

[۲] Fenner, R. T., *Engineering elasticity*, Ellis Horwood Limited (1986).

[۳] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company (1970).

[۴] Fenner, D. N., *Engineering stress analysis a finite element approach*, Ellis Horwood Limited (1987).

[۵] Alfano, G., Marotti de Sciarra, F., Rosati, L., Automatic analysis of multi cell thin-walled sections, *Computers and Structures*, Vol. 59, No. 4, pp. 641-655 (1996).

[۶] Porkić, A., Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section, *Computers and Structures*, Vol. 74, pp. 705-715 (2000).

[۷] Hong Yoo, C., Acra, S.V., Cross-section properties of thin-walled multi-cellular section, *Computer & Structures*, Vol. 22, No. 1, pp. 53-61 (1986).

[۸] Li, Z., Ko, J. M., Ni, Y. Q., Torsional rigidity of reinforced concrete bars with arbitrary sectional shape, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 35, pp. 349-361 (2000).

[۹] Ridley-Ellis, D. J., Owen, J. S., Davies, G., Torsional behavior of rectangular hollow sections, *Computers and Structures*, Vol. 82, pp. 703-715 (2004).