بررسي تأثير شكل سطح مقطع فيبر و فاصله‌ي بين آنها بر توزيع تنش در مواد مركب فيبرى در حضور يک ترک

محمد شيشه ساز[i] *؛ مهدي ملكي[ii]

چكيده

در اين تحقيق تأثير شكل سطح مقطع الياف و فاصله‌ي بين آنها بر توزيع تنش در يک تک لايهي مركب بررسي شده است. تك لايهي ياد شده تحت بارگذاري كششي P در راستاي الياف قرار داشته و حاوي تركي متقارن است. دو تک لايهي مركب كه در يكي الياف داراي مقطع مثلثي شكل و ديگري داراي مقطع مستطيلي شكل، در نظر گرفته شده است. با استفاده از مدل اصلاح شده كه در آن ماتريس علاوه بر بار برشي، نيروي كششي را نيز تحمل مي‌كند معادلات ديفرانسيلي- تفاضلي تعادل استخراج شده و ميدان‌هاي تغيير مكان و نيرو در تك لايه تعيين شده‌اند. مقايسه‌ي نتايج حاصل از مدل شيرلگ با نتايج حاصل از مدل اصلاح شده، ضعف مدل شيرلگ را در بررسي صحيح توزيع تنش نشان مي‌دهد. در مدل اصلاح شده، با افزايش فاصله فيبرها، تمركز تنش در الياف و ماكزيمم تنش برشي در ماتريس كاهش مي‌يابد. همچنين، فيبرهاي مثلثي شكل تنش برشي در ماتريس را بيش از الياف دايره‌اي شكل كاهش مي‌دهند. با كاهش زاويه θ مربوط به شكل، سطح مقطع الياف مثلثي شكل، تنش برشي بدست آمده بيش از پيش كاهش يافته در حالي كه ماكزيمم تنش كششي در الياف ماكزيمم ثابت باقي مي‌ماند. در صد كاهش در تنش برشي بين الياف دايره‌اي و مثلثي شكل (θ برابر ۳۰ درجه) ، به ازاء كسري حجمي يك برابر ۳۲ درصد است.

كلمات كليدي : مواد مركب، الياف مثلثي شكل، تمركز تنش، تنش برشي.

The Effect of Fiber Shape and Spacing on Stress Distribution in a Composite Monolayer with an Internal Crack

M. Shishesaz; M. Maleki

ABSTRACT

The effect of inter-fiber spacing and shape on stress distribution is studied in a composite monolayer. The lamina is subjected to an internal crack while loaded by a force P along the fibers at infinity. Two models are postulated. In the first, fibers have circular cross section while in the second, a triangular shape is considered. By direct application of modified shear – lag model, the differential equations of equilibrium are derived and solved for displacements and stress fields. The results show that the ordinary shear – lag model can not well predict the stress distribution within the lamina. The modified model shows a noticeable decrease in both types of stresses once fiber spacing and shape are changed. This reduction is more pronounced for triangular fibers where a decrease in θ causes more reduction in maximum shear stresses and no change in fiber normal stresses. The reduction in peak shear stress appears to be 32 percent for volume fraction of one at $\theta = 30^\circ$.

KEYWORDS : Composite materials, triangular fibers, stress concentration, shear stress.

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸٦/۱۱/۳۰
تاريخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۸/۲/۹

[i] * نويسنده مسئول و استاد گروه مهندسي مكانيک – دانشكده‌ي مهندسي – دانشگاه شهيد چمران. Email: mshishehsaz@scu.ac.ir
[ii] كارشناس ارشد مهندسي مكانيک– دانشكده‌ی مهندسی – دانشگاه شهيد چمران. Email: mehdimaleki77@yahoo.com

۱- مقدمه

به منظور بررسي صحيح توزيع تنش در مواد مركب فيبري، به ويژه در حضور هر گونه حفره يا ترك داخلي، از روش ريز ساختار مكانيكي استفاده مي‌شود كه در آن ناهمگن بودن مواد مركب همراه با روابط الاستيسيته در نظر گرفته مي شوند.

هجپس [۱]، از اولين كساني بود كه در اين زمينه به تحقيق پرداخته و مدل شيرلگ را در تحليل مواد مركب ارائه نمود. در اين مدل فرض مي‌شود كه كل بار كششي توسط الياف تحمل شده و ماتريس فقط بار برشي را متحمل مي‌شود. در مدل وي، بار در امتداد الياف بر تك لايه اعمال مي‌شد. او نشان داد كه ضريب تمركز تنش در اولين فيبر سالم (در حضور يك ترك) از رابطه (۱-۱) بدست مي‌آيد.

$$K_r = \frac{(۴)\times(۶)\times(۸)\times......\times(۲r+۲)}{(۳)\times(۵)\times(۷)\times......\times(۲r+۱)} \qquad (۱-۱)$$

رزتوس و شيشه ساز [۲] با استفاده از تئوري پيچيده‌تر مدل اصلاح شده، توزيع تنش در مجاورت فيبرهاي شكسته شده را با مقطع دايره‌اي شكل محاسبه نمودند. در اين تئوري فرض مي‌شود كه ماتريس علاوه بر بار برشي بار كششي را نيز تحمل مي‌كند.

باند و همكارانش [۳] رفتار مكانيكي مواد مركبي را كه شامل فيبرهاي شيشه با سطح مقطع دايره‌اي و مثلثي بود بطور آزمايشگاهي بررسي نمودند. نتايج آزمايشات عملي آنها نشان داد كه استفاده از پلاستيك‌هاي تقويت شده با فيبرهاي شيشه‌اي مثلثي شكل، در مقايسه با پلاستیک‌هاي تقويت شده با فيبرهاي دايره‌اي، مقاومت كششي را ۲۰ درصد، مقاومت فشاري را ۴۰ درصد و مقاومت برشي بين لايه‌اي را به ميزان ۵ درصد بهبود مي‌بخشد.

پارک و همكارانش [۴]، تأثير سطح مقطع فيبرهاي C شكل، دايره‌اي تو پر و توخالي را بطور آزمايشگاهي بر مقاومت برشي بين لايه‌اي مواد مركب بررسي نمودند.

كيم و پارک [۵]، نيز در تحقيقي مشابه با مرجع [۴]، با انجام آزمايشاتي بر فيبرهاي كربني نشان دادند كه مقاومت خمشي و كششي مواد مركبي با الياف C شكل، نسبت به اليافي با مقطع دايره‌اي شكل، نزديك به ۴۰ درصد افزايش مي‌يابد.

آناگنوستوپولس و همكارانش [۶]، توزيع تنش برشي در ماتريس و تنش عمودي در امتداد الياف را از طريق انجام آزمايشات روش طيف نمائي بررسي نموده و نتايج را با نتايج حاصل از شيرلگ مقايسه نمودند.

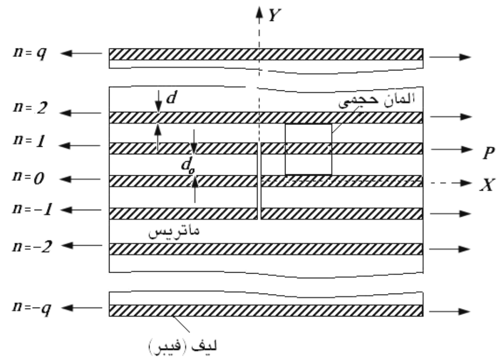
هيول و همكارانش [۷]، براي تک لايه‌ي مركبي كه فيبر وسط آن پاره شده بود، با استفاده از روش طيف نمايي رامان[۱]، تأثير تنش تسليم برشي ماتريس و همچنين فاصله‌ي بين فيبرها را بر ماكزيمم تمركز تنش بررسي كردند. آنها نشان دادند كه با افزايش فاصله‌ي بين فيبرها، تمركز تنش به صورت نمائي كاهش مي‌يابد.

بر خلاف آنكه تأثير فاصله‌ي بين الياف در مواد مركبي با الياف دايره‌اي شكل در تحقيقات زيادي بطور مستقيم يا غير مستقيم بررسي شده است [۷ - ۱۳] اما در هر يك، روش گرفته شده يا مدل ارائه شده به گونه‌اي با مدل‌هاي ديگر متفاوت است. در مرجع [۸]، تمركز تنش در الياف كربني (همراه با الياف كولار به صورت ماده‌ي مركب هيبريد) مورد بررسي قرار گرفته است. مرجع [۹]، توزيع تنش در تك لايه‌ي ساده‌اي را به كمك مدل اوليه‌ي شيرلگ بررسي مي‌نمايد. در مرجع [۱۰]، تمركز تنش در اولين فيبر سالم مجاور با فيبر پاره شده‌اي كه تماس آن در محدوده‌ي مشخصي با ماتريس اطراف آن قطع شده بررسي شده است. همچنين، در مرجع [۱۱] عبارتي براي محاسبه‌ي تمركز تنش بر حسب جنس و خصوصيات ماده‌ي مركب مورد نظر استخراج شده است. مراجع [۱۲] و [۱۳]، ضمن بررسي مدل اوليه‌ي شيرلگ، توزيع تنش را در اطراف يك ترك از طريق انجام آزمايشات و به صورت تئوري بررسي نموده‌اند.

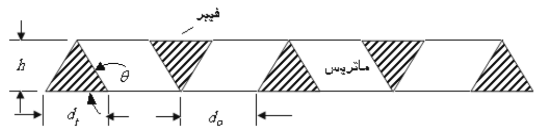
در هيچ يك از تحقيقات ياد شده، مدل رياضي قابل ذكري كه بتوان بر اساس آن تأثير تغيير شكل سطح مقطع الياف را بر توزيع تنش‌هاي ايجاد شده در ماده‌ي مركب بررسي نمود ارائه نشده است. با توجه به كاربرد و كارآئي الياف مثلثي شكل، و نيز خلاء موجود در مدل‌هاي رياضي معتبر در اين خصوص، تحقيقات انجام شده در اين گزارش صورت گرفته است.

۲- روش تحليل

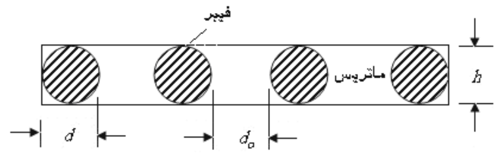
تك لايه‌ي ماده مركبي را كه شامل فيبرهايي با مقطع مثلثي شكل بوده و در بينهايت تحت بار كششي P در راستاي فيبرها قرار دارد در نظر گرفته (شكل ۱) و فرض مي‌شود سطح مقطع فيبرها در تك لايه مانند يكي از شكل‌هاي ۲ و ۳ باشد. در اين تحقيق، با استفاده از مدل اصلاح شده كه در آن ماتريس علاوه بر نيروي برشي، بار كششي را نيز تحمل مي‌كند [۲]، توزيع تنش در تك لايه‌هايي كه داراي الياف مثلثي يا دايره‌اي شكلند، در حضور يك ترك بررسي مي‌شود.



شکل ۱: تك لايه‌ي مركب با يك ترك متقارن



شکل ۲: مقطع تک لایه ماده مرکبي با فيبرهاي مثلثي شکل



شکل۳: مقطع تک لایه‌ي ماده‌ي مرکبي با فيبرهاي دايره‌اي شکل

به منظور محاسبه‌ي تنش در تک لایه‌ي مرکبي که در آن الياف به صورت دايره‌اي يا مثلثي شکلند، ضخامت تك لايه برابر قطر الياف منظور شده است. به علاوه، سطح مقطع فيبرهاي مثلثي و دايره‌اي شکل برابر هم فرض شده و از تغيير شکل برشي در الياف چشم پوشي شده است. پيوند بين الياف و ماتريس کامل در نظر گرفته شده و شکاف موجود در تك لايه همانند حفره‌ي دراز و باريکي عمود بر جهت الياف منظور شده است [۱۴].

براساس شکل۴، معادله‌ي تعادل نيرو در لايه‌ي ماتريس زير فيبر n ام به صورت معادله (۲-۱) است:

$$\frac{dP^m_{n,n-۱}}{dx}+\frac{۱}{Sin\theta}h(\Delta\tau_{xy})_{n,n-۱}=۰ \qquad (۱-۲)$$

کميت $(\Delta\tau_{xy})_{n,n-۱}$ برابر است با:

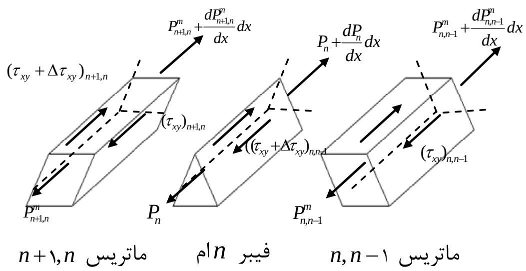
$$(\Delta\tau_{xy})_{n,n-۱}=\int_{-d_\circ/۲}^{d_\circ/۲}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)_{n,n-۱}dy=\frac{۴G}{d_\circ}(e_{n,n-۱}) \qquad (۲-۲)$$

همچنين؛

$$e_{n,n-۱}=u_n+u_{n-۱}-۲u^m_{n,n-۱} \qquad (۳-۲)$$

به منظور تشريح نيروي $P^m_{n,n-1}$ بر حسب تغيير مکان‌هاي فيبر و ماتريس $n,n-۱$ مي توان تغيير مکان در اين لايه از ماتريس را به شرح رابطه (۲-۴) نوشت؛

$$u_{n,n-1}=u^m_{n,n-1}+B_{n,n-1}y'+D_{n,n-1}y'^2 \qquad (۴-۲)$$



شکل ۴: تعادل نيروها در المان حجمي مندرج در شکل ۱

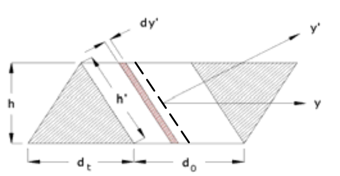
در معادله (۲-۴)، $u^m_{n,n-1}$ تغيير مکان مرکز لايه‌ي ماتريسي است که بين فيبر n ام و $(n-۱)$ ام قرار دارد.

با استفاده از مختصات تعريف شده در شکل ۵، ثابت‌هاي $B_{n,n-1}$ و $D_{n,n-1}$ بر حسب تغيير مکان فيبرها و وسط لايه‌ي ماتريس به شرح روابط (۲-۵) تا (۲-۷) محاسبه مي‌شوند.

$$u_{n,n-۱}=u^m_{n,n-۱} \qquad y'=۰ \qquad (۵-۲)$$

$$u_{n,n-۱}=u_n \qquad y'=\frac{Sin\theta}{۲}d_\circ \qquad (۶-۲)$$

$$u_{n,n-۱}=u_{n-۱} \qquad y'=-\frac{Sin\theta}{۲}d_\circ \qquad (۷-۲)$$



شکل ۵: مختصات تعريف شده جهت محاسبه نيروي ماتريس

بر اساس مقادير بدست آمده براي ثابت‌هاي اشاره شده، عبارت تغيير مکان در ماتريس به صورت رابطه (۲-۸) است.

$$u_{n,n-۱}=u^m_{n,n-۱}+\left[\frac{u_n-u_{n-۱}}{d_\circ Sin\theta}\right]y'+\frac{۲}{(d_\circ Sin\theta)^۲}\times(u_n+u_{n-۱}-۲u^m_{n,n-۱})y'^۲ \qquad (۸-۲)$$

با استفاده از معادلات الاستيك خطي، نيروي کششي در لايه‌ي ماتريس $n,n-۱$ به صورت رابطه (۲-۹) است:

$$P^m_{n.n-۱}=E_mA_m\left[\frac{du^m_{n,n-۱}}{dx}+\frac{۱}{۶}\left(\frac{de_{n,n-۱}}{dx}\right)\right] \qquad (۹-۲)$$

در رابطه ياد شده E_m مدول الاستيسيته‌ي ماتريس و $A_m=hd_\circ$ است.

به منظور استخراج معادله‌ي تعادل در فيبر n، فرض مي‌شود تغيير مکان عرضي در امتداد فيبر يکنواخت است. بنابراين با استفاده از معادلات (۲-۳) و (۲-۸)، عبارت تنش

برشي در لايه‌ي ماتريس محصور شده بين فيبرهاي n و (n-1) برابر است با:

$$(\tau_{xy})_{n,n-1}=G\left\{\left(\frac{u_n-u_{n-1}}{d_0}\right)+\frac{4}{d_0^2}(e_{n,n-1})y\right\} \qquad (۲-۱۰)$$

به طريقي مشابه، در لايه‌ي ماتريسي كه بالاي فيبر n قرار دارد بدست مي‌آيد:

$$(\tau_{xy})_{n+1,n}=G\left\{\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{d_0}\right)+\frac{4}{d_0^2}(e_{n+1,n})y\right\} \qquad (۲-۱۱)$$

در اين لايه، به ازاء $y=-\frac{d_0}{2}$ (مجاور با فيبر n)، معادله‌ي (۲-۱۱) را مي توان به صورت رابطه (۲-۱۲) نوشت.

$$(\tau_{xy})_{n+1,n|y=-d_0/2}=\frac{G}{d_0}\left(u_{n+1}-u_n-2e_{n+1,n}\right) \qquad (۲-۱۲)$$

در لايه‌ي ماتريسي كه زير فيبر n قرار دارد به ازاء $y=\frac{d_0}{2}$ (مجاور با فيبر n)، معادله‌ي (۲-۱۰) را مي توان به صورت رابطه (۲-۱۳) نوشت؛

$$(\tau_{xy})_{n,n-1|y=d_0/2}=\frac{G}{d_0}\left(u_n-u_{n-1}-2e_{n,n-1}\right) \qquad (۲-۱۳)$$

با استفاده از معادله‌ي تعادل نيرو در فيبر بدست مي‌آيد:

$$E_fA_f\frac{d^2u_n}{dx^2}+\frac{Gh}{d_0Sin\theta}\left(u_{n+1}-2u_n+{}_{n-1}\right)-\frac{2Gh}{d_0Sin\theta}\left(e_{n+1,n}+e_{n,n-1}\right)=0$$
$$-q+1\le n\le q-1 \qquad (۲-۱۴)$$

با استفاده از معادلات (۲-۲) و (۲-۹)، معادله‌ي تعادل (۲-۱) برابر است با:

$$E_mA_m\left(\frac{d^2u^m_{n,n-1}}{dx^2}+\frac{1}{6}\frac{d^2e_{n,n-1}}{dx^2}\right)+\frac{4Gh}{d_0Sin\theta}(e_{n,n-1})=0 \qquad (۲-۱۵)$$

با توجه به معادله‌ي (۲-۳)، رابطه‌ي (۲-۱۵) به صورت رابطه (۲-۱۶) خلاصه مي‌شود.

$$\frac{E_mA_m}{2}\left(\frac{d^2u_n}{dx^2}+\frac{d^2u_{n-1}}{dx^2}-\frac{2}{3}\frac{d^2e_{n,n-1}}{dx^2}\right)+\frac{4Gh}{d_0Sin\theta}(e_{n,n-1})=0 \qquad (۲-۱۶)$$
$$-q+1\le n\le q+1$$

همچنين، براي دو فيبر $+q$ و $-q$ كه در لبه‌ها قرار دارند، معادلات تعادل به صورت (۲-۱۷) است؛

$$E_fA_f\frac{d^2u_n}{dx^2}+\frac{Gh}{d_0Sin\theta}(u_{n-1}-u_n)-\frac{2Gh}{d_0Sin\theta}(e_{n,n-1})=0$$
$$n=q \qquad (۲-۱۷)$$

$$E_fA_f\frac{d^2Un}{dx^2}+\frac{Gh}{d_0Sin\theta}(u_{n+1}-u_n)-\frac{2Gh}{d_0Sin\theta}(e_{n+1,n})=0$$
$$n=-q \qquad (۲-۱۸)$$

معادلات (۲-۱۴) الي (۲-۱۸) معرف تغيير مكان فيبرها و ماتريس در يك تك لايه‌ي مركبي است كه الياف آن به صورت مثلثي شكلند. تعداد كل فيبرها يعني N، برابر $2q+1$ منظور شده است.

۳- بي بعد سازي معادلات

به منظور سهولت در حل معادلات بدست آمده، مي‌توان ضمن معرفي روابط (۳-۱) تا (۳-۳)

$$K_r=(P_n)_{max}=\frac{(p_n)_{max}}{p} \qquad (۳-۱)$$

$$\frac{1}{\eta}=\frac{V_m}{V_f}=\frac{d_0}{d} \qquad (۳-۲)$$

$$\psi=\frac{1}{2}\left(\frac{A_mE_m}{A_fE_f}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{d_0E_m}{d\,E_f}\right)=\frac{1}{2\eta}\frac{E_m}{E_f} \qquad (۳-۳)$$

و روابط مشابه ديگر، معادلات (۲-۱۴) الي (۲-۱۸) را به صورت بدون بعد تبديل نمود:

$$\frac{d^2U_n}{d\xi^2}+\frac{1}{Sin\theta}\eta\left(-U_{n+1}-6U_n-U_{n-1}\right)+\frac{4}{Sin\theta}\eta U^m_{n+1,n}+\frac{4}{Sin\theta}\eta U^m_{n,n-1}=0$$
$$-q+1\le n\le q-1 \qquad (۳-۴)$$

$$\frac{\psi}{3}\left(\frac{d^2U_n}{d\xi^2}+\frac{d^2U_{n-1}}{d\xi^2}+\frac{4d^2U^m_{n,n-1}}{d\xi^2}\right)+\frac{4}{Sin\theta}\eta\left(U_n+U_{n-1}-2U^m_{n,n-1}\right)=0$$
$$-q+1\le n\le q-1 \qquad (۳-۵)$$

$$\frac{d^2U_n}{d\xi^2}+\frac{1}{Sin\theta}\eta\left(-3U_n-U_{n-1}\right)+\frac{4}{Sin\theta}\eta U^m_{n,n-1}=0$$
$$n=q \qquad (۳-۶)$$

$$\frac{d^2U_n}{d\xi^2}+\frac{1}{Sin\theta}\eta\left(-3U_n-U_{n-1}\right)+\frac{4}{Sin\theta}\eta U^m_{n,n-1}=0$$
$$n=-q \qquad (۳-۷)$$

در معادله‌ي (۳-۲)، V_f و V_m به ترتيب كسرهاي حجمي فيبر و ماتريس مي‌باشند. معادلات بدون بعد (۳-۴) الي (۳-۷) شامل $4q+1$ معادله و $4q+1$ مجهولند كه پس از اعمال شرايط مرزي حل خواهند شد.

در تک لايه‌ي مركبي با N فيبر كه تعداد الياف شكسته شده‌ي آن برابر r است، شرايط مرزي در آن به ازاي $\xi=0$، به صورت رابطه (۳-۸) است.

$U_n(0)=0$ فيبرهاي سالم

$P_n(0)=0$ فيبرهاي شكسته شده

$U^m_{n,n-1}(0)=0$ ماتريس‌هاي سالم (۳-۸)

$P^m_{n,n-1}(0)=0$ ماتريس‌هاي بريده شده

۴- ميدان هاي نيرو و تغيير مكان

شكل ماتريسي معادلات بدون بعد (۳-۱۱) الي (۳-۱۴) به صورت رابطه (۴-۱) است.

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{U}''-\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{U}=0 \qquad (۴-۱)$$

در جائي که:

$$[\boldsymbol{U}'']^T = [U''_q, U''^m_{q,q-1}, U''_{q-1}, U''^m_{q-1,q-2}, \ldots, U''^m_{-q+2,-q+1}, U''_{-q+1}, U''^m_{-q+1,-q}, U''_{-q}] \quad (۴-۲)$$

$$[\boldsymbol{U}]^T = [U_q, U^m_{q,q-1}, U_{q-1}, U^m_{q-1,q-2}, \ldots, U^m_{-q+2,-q+1}, U_{-q+1}, U^m_{-q+1,-q}, U''_{-q}] \quad (۴-۳)$$

ماتريس‌هاي $\boldsymbol{L}_1$ و $\boldsymbol{L}_2$، ماتريس‌هاي ضرايب مي‌باشند. جواب معادله‌ي (۴-۱) به صورت رابطه (۴-۴) در نظر گرفته مي‌شود؛

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}e^{\lambda\zeta} \quad (۴-۴)$$

در جايي که $\boldsymbol{U}$ و $\boldsymbol{R}$ بردارهايي از درجه‌ي $4q+1$ هستند. از جايگزيني معادله‌ي (۴-۴) در معادله‌ي (۴-۱) رابطه‌ي (۴-۵) حاصل مي‌شود.

$$(\boldsymbol{L}_2 - \lambda^2 \boldsymbol{L}_1)\boldsymbol{R} = 0 \quad (۴-۵)$$

جواب قابل قبول معادله‌ي (۴-۵) به ازاء مقادير معيني از λ است که باعث از بين رفتن دترمينان $(\boldsymbol{L}_2 - \lambda^2 \boldsymbol{L}_1)$ مي‌شود. ريشه‌هاي معادله‌ي ياد شده به صورت رابطه (۴-۶) بيان مي‌شوند:

$$\lambda_1 = \pm b_1, \lambda_2 = \pm b_2, \ldots, \lambda_{4q+1} = \pm b_{4q+1} \quad (۴-۶)$$

در رابطه‌ي (۴-۶) کليه‌ي b_iها حقيقي هستند.

از آنجا که بايد:

$$P_n\big|_{\xi\to\infty} \to 1 \quad (۴-۷)$$

لذا، به منظور برآوردن معادله‌ي ياد شده، مقادير مثبت λ_i قابل قبول نخواهند بود. عبارت $\boldsymbol{U}$ در اين حالت به صورت رابطه (۴-۸) نوشته مي‌شود؛

$$\boldsymbol{U} = C_1\boldsymbol{R}^{(1)}e^{\lambda_1\xi} + C_2\boldsymbol{R}^{(2)}e^{\lambda_2\xi} + \ldots\ldots + C_{(4q+1)}\boldsymbol{R}^{(4q+1)}e^{\lambda(4q+1)\xi} \quad (۴-۸)$$

در رابطه‌ي اشاره شده، $\boldsymbol{U}$ شامل جابجائي‌هاي فيبر و ماتريس است. به علاوه، کليه‌ي مقادير λ_iها منفي بوده و $\boldsymbol{R}$ بردار مشخصه‌ي متناظر با ريشه‌ي λ_i است. با توجه به روابط ياد شده، جابجايي در هر فيبر به صورت رابطه (۴-۹) نوشته مي‌شود.

$$U_n = \xi + \sum_{i-1}^{4q+1} C_i R^{(i)}_{2(q-n)+1}\, e^{\lambda i\xi} \quad (۴-۹)$$

$$n = q, q-1, \ldots, 0, -1, \ldots, -q$$

به طريقي مشابه، جابجايي هر لايه از ماتريس برابر است با:

$$U^m_{n,n-1} = \xi + \sum^{4q+1} C_i R^{(i)}_{2(q+1-n)}\, e^{\lambda_i\zeta} \quad (۴-۱۰)$$

$$n = q, q-1, \ldots, 0, -1, \ldots, -q+1$$

از مشتق گيري معادله‌ي (۴-۹) نيروي عمودي در هر فيبر (ضريب تمرکز تنش) به صورت رابطه (۴-۱۱) بدست مي‌آيد.

$$P_n = 1 + \sum_{i=1}^{4q+1} C_i \lambda_i R^{(i)}_{2(q-n)+1}\, e^{\lambda i\xi} \quad (۴-۱۱)$$

$$n = q, q-1, \ldots, 0, -1, \ldots, -q$$

همچنين نيروي عمودي در ماتريس $(n, n-1)$ به صورت رابطه (۴-۱۲) است:

$$P^m_{n,n-1} = 2\psi\left\{1 + \sum_{i=1}^{4q+1}\left[\frac{2}{3}R^{(i)}_{2(q+1-n)} + \frac{1}{6}\left(R^{(i)}_{2(q-n)+1} + R^{(i)}_{2(q-n+1)+1}\right)\right]C_i\lambda_i e^{\lambda i\xi}\right\}$$

$$-q+1 \le n \le q \quad (۴-۱۲)$$

بر اساس شرايط مرزي (۳-۸)، $4q+1$ معادله براي تعيين $4q+1$ ثابت مجهول (يعني C_i) بدست مي‌آيد. به علاوه، عبارت تنش برشي بدون بعد S_{xy} در ماتريس به صورت رابطه (۴-۱۳) خواهد بود؛

$$S_{xy} = \eta\{\ (U_n - U_{n-1}) + 2\mu(U_n +_{n-1} - 2U^m_{n,n-1})\ \} \quad (۴-۱۳)$$

در معادله (۴-۱۴) پارامتر μ برابر است با:

$$\mu = \frac{2y}{d_0} \qquad -1 \le \mu \le 1 \quad (۴-۱۴)$$

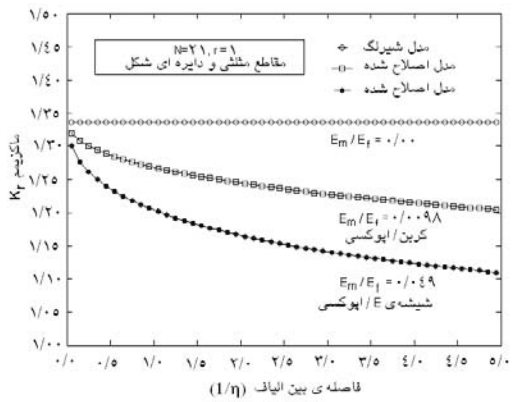
۵- نتايج و بحث

مواد مرکب مورد نظر در اين تحقيق از جنس شيشه/ اپوکسي و کربن/ اپوکسي در نظر گرفته شده‌اند. مدول الاستيسيته‌ي اپوکسي برابر ۳/۴۵ مگاپاسکال و براي شيشه و کربن بترتيب مدول‌هاي الاستيسيته‌اي برابر با ۷۰ مگاپاسکال و ۳۴۵ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. پارامتر K_r در نمودارهاي مربوطه معرف بيشترين تمرکز تنش در تک لايه است که در اولين فيبر سالم نزديک به نوک ترک رخ مي‌دهد. بيشترين تنش برشي S_{xy}، در لايه‌اي از ماتريس حاصل مي‌شود که مابين آخرين فيبر بريده شده و اولين فيبر سالم قرار دارد.

شکل ۶ نمايانگر تغييرات ماکزيمم تمرکز تنش در اولين فيبر مجاور به نوک ترک است. بر اساس نتايج بدست آمده، ملاحظه مي‌شود که مدل شيرلگ نمي‌تواند تغييرات ناشي از فاصله‌ي بين الياف را بر تمرکز تنش پيش بيني نمايد در حالي که مدل اصلاح شده کاهشي را به صورت نمايي به ازاي افزايش فاصله‌ي بين الياف نشان مي‌دهد. به ازاء جميع مقادير η، تمرکز تنش در اولين فيبر سالم (و فيبرهاي ديگر) در مواد مرکبي که داراي الياف مقاوم‌تري هستند بيش از مواد مشابه با الياف ضعيف‌تر است.

بر اساس نتايج بدست آمده، با افزايش فاصله‌ي بين الياف، از ۰/۰۵ به ۵، تمرکز تنش در الياف شيشه و کربن به ترتيب به ميزان ۱۵% و ۹% کاهش مي يابد. ميزان کاهش‌هاي ياد شده در الياف دايره‌اي شکل مشابه الياف مثلثي شکل است. همچنين،

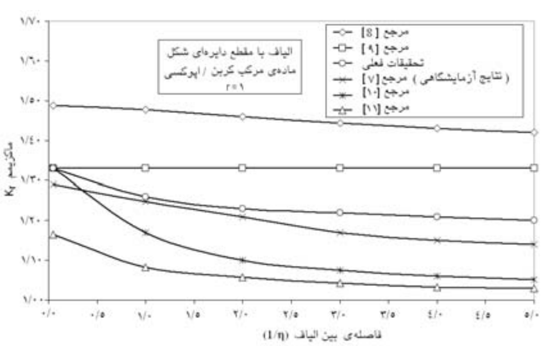
نتايج حاصل در اين نمودار حاكي از آن است كه با كاهش نسبت E_m/E_f نتايج به سمت مدل شيرلگ نزديك‌تر مي‌شوند.



شكل ۶: تغييرات ماكزيمم تمركز تنش برحسب فاصله بين فيبرها براي دو ماده‌ي مركب متفاوت

در شكل ۷ نتايج اين تحقيق با نتايج ديگر محققين، به ازاء فواصل مختلف بين الياف، مقايسه شده‌اند. الياف منظور شده در اين نمودار از جنس كربن و ماتريس از جنس اپوكسي است. نتايج بدست آمده در مرجع [۷]، ناشي از اندازه گيري تمركز تنش در الياف دايره‌اي شكلي است كه بر اساس آزمايشات مبتني بر روش طيف نمائي بدست آمده است. همانطور كه ملاحظه مي‌شود نتايج حاصل از مدل ارائه شده در اين تحقيق (با سطح مقطع دايره‌اي شكل) بسيار نزديك به نتايج آزمايشگاهي مرجع [۷] بوده و در مقايسه با نتايج ديگر محققين، از نزديكي بيشتري به اين نتايج برخوردارند. اين امر دلالت بر كارآئي مدل ارائه شده مي‌نمايد.

درصد اختلاف بين مقادير بدست آمده و نتايج آزمايشگاهي ياد شده، به ازاء فواصل مختلف بين الياف، در جدول ۵-۱ نشان داده شده است.



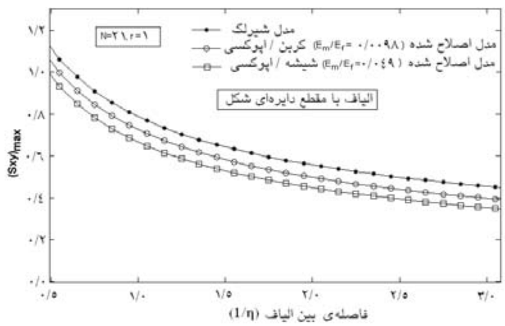
شكل ۷: مقايسه‌ي نتايج حاصل از مدل ارائه شده با نتايج ديگر

شكل ۸ معرف اثر فاصله‌ي بين الياف بر حداكثر تنش برشي در تك لايه است. اين اثر براي دو ماده‌ي مركب مختلف با الياف دايره‌اي شكل ترسيم شده است. همانطور كه ملاحظه مي‌شود، با افزايش فاصله‌ي بين الياف، حداكثر تنش برشي در تك لايه به ميزان قابل توجهي كاهش مي‌يابد به قسمي كه با افزايش $\frac{۱}{\eta}$ از ۰/۵ به ۳، درصد كاهش در هر يك از تك لايه‌هاي شيشه/ اپوكسي و كربن/ اپوكسي، برابر ۷۵% است.

جدول ۵-۱: در صد اختلاف بين نتايج بدست آمده در اين تحقيق با نتايج آزمايشگاهي مرجع [۷]

$۱/\eta$	۰/۰۵	۱	۲	۳	۴	۵
درصد اختلاف	۳	۰/۵	۰/۸	۴/۷	۶/۱	۷/۱

چنانچه اين دو تك لايه بر اساس مدل شيرلگ تحليل شوند، تنش برشي بدست آمده بيش از مقادير مشابهي است كه از مدل اصلاح شده بدست مي‌آيد. اين مسئله، ضعف مدل اوليه‌ي شيرلگ را در بررسي تنش در اين دو ماده (و ماده‌هاي مشابه ديگر) نشان مي‌دهد.

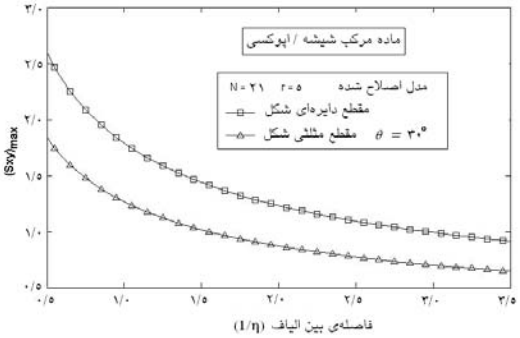


شكل ۸: تغييرات ماكزيمم تنش برشي برحسب فاصله بين فيبرها براي دو ماده‌ي مركب متفاوت

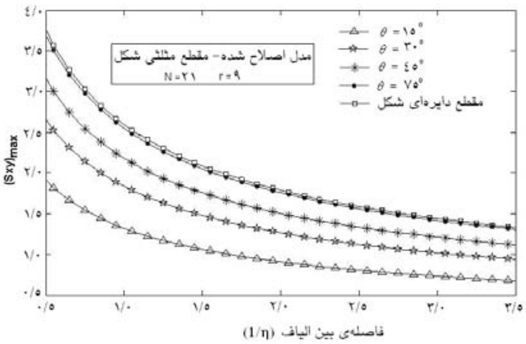
مقادير حداكثر تنش برشي در لايه‌ي محصور كننده‌ي نوك ترك در شكل ۹ نشان داده شده‌اند. بر اساس اين نتايج، تنش برشي در لايه‌ي ماتريسي كه الياف آن مثلثي شكلند كمتر از تنش برشي در الياف دايره‌اي شكل است. تفاوت بين نتايج حاصل از دو سطح مقطع برابر ۳۰% در $\frac{۱}{\eta} = ۰/۵$ و ۲۲% در $\frac{۱}{\eta} = ۳/۵$ است.

اثر زاويه‌ي θ در سطح مقطع الياف مثلثي شكل بر ماكزيمم تنش برشي در ماتريس، در شكل ۱۰ نشان داده شده است. بر اساس نتايج بدست آمده، با افزايش زاويه‌ي θ، ماكزيمم تنش برشي در ماتريس به ميزان قابل توجهي افزايش مي‌يابد. همانطور كه در اين شكل ملاحظه مي‌شود به ازاء مقادير θ نزديك به ۹۰ درجه، نتايج بدست آمده بر نتايج مشابه در مقاطع دايره‌اي شكل منطبق مي‌شوند. به ازاي $\frac{۱}{\eta} = ۰/۵$، درصد كاهش در تمركز تنش برشي در ماتريس، بين الياف دايره‌اي

شكل و مثلثي شكل (با $\theta = ۴۵^\circ$) نزديك به ۱۵% است. با كاهش θ به ۳۰ درجه، اين مقدار به ميزان ۳۰% افزايش مي‌يابد.



شكل ۹: تغييرات ماكزيمم تنش برشي در ماتريس برحسب فاصله بين فيبرها براي اليافي با مقاطع دايره‌اي و مثلثي شكل



شكل ۱۰: تأثير زاويه‌ي θ بر ماكزيمم تنش برشي در تک لايه اي با الياف مثلثي شكل

۶- نتيجه گيري

بر اساس نتايج بدست آمده نتيجه مي‌شود كه:

۱- بر خلاف مدل اصلاح شده، مدل اوليه‌ي شيرلگ نمي‌تواند بطور صحيح فاصله‌ي بين الياف را بر توزيع تنش در مواد مركبي با الياف دايره‌اي يا مثلثي شكل پيش بيني نمايد.

۲- تغيير شكل در سطح مقطع الياف تأثيري بر تنش كششي ايجاد شده در آنها ندارد. اين رفتار به ازاء جميع مقادير كسر حجمي الياف (فاصله‌ي بين فيبرها) درست است.

۳- تمركز تنش در الياف بر اساس مدل اصلاح شده در اين تحقيق برابري بسيار خوبي را با نتايج آزمايشگاهي از خود نشان مي دهد به قسمي كه به ازاء كسر حجمي ۱ ($\eta = ۱$)، تفاوت بين مقادير بدست آمده ۰/۵% است.

۴- تنش برشي بدست آمده از مدل اصلاح شده در ماده‌ي مركبي از جنس شيشه/ اپوكسي يا كربن/ اپوكسي، كمتر از مقادير مشابهي است كه از مدل اوليه‌ي شيرلگ حاصل مي‌شوند.

۵- تنش برشي بوجود آمده در ماتريس به ميزان قابل توجهي با افزايش فاصله‌ي بين فيبرها كاهش مي‌يابد. در الياف مثلثي شكل از جنس شيشه/ اپوكسي، با افزايش $\frac{1}{\eta}$ از ۰/۵ به ۳، اين كاهش نزديك به ۶۸% است.

۶- با تغيير شكل سطح مقطع الياف از دايره‌اي به مثلثي شكل، تنش برشي در ماتريس به ميزان قابل توجهي كاهش مي‌يابد. درصد كاهش به ازاء $\eta = ۱$ و $\theta = ۳۰^\circ$ برابر % ۳۲ است.

۷- با كاهش زاويه‌ي θ در سطح مقطع الياف مثلثي شكل، تنش برشي در ماتريس بيش از پيش كاهش مي‌يابد.

۷- فهرست علائم

سطح مقطع کل یک تک لایه ماده مرکب	A
سطح مقطع فیبر در تک لایه ماده مرکب	A_f
سطح مقطع ماتریس در تک لایه ماده مرکب	A_m
ثابت‌های تعریف شده در معادله‌ی (۲-۴)	$B_{n,n-۱}$، $D_{n,n-۱}$
ضرایب معادله‌ی (۴-۸)	C_i
قطر هر یک از الیاف دایره‌ای شکل	d
فاصله‌ی بین الیاف	$d_۰$
قاعده‌ی فیبر در الیاف مثلثی شکل	d_t
مدول الاستیسیته‌ی فیبر	E_f
مدول الاستیسیته‌ی ماتریس	E_m
پارامتر تعریف شده در معادله (۲-۳)	$e_{n,n-۱}$
مدول برشی ماتریس	G
ضخامت تک لایه	h
ضریب تمرکز تنش در فیبر	K_r
ماتریس ضرایب	$\boldsymbol{L}_۱$
ماتریس ضرایب	$\boldsymbol{L}_۲$
شماره‌ی مشخصه‌ی هر فیبر	n
بار عمودی اعمال شده بر تک لایه	p
نیروی کششی و پارامتر بدون بعد آن در فیبر nام	p_n, P_n
نیروی کششی و پارامتر بدون بعد آن در لایه‌ی ماتریس	$p_{n,n-۱}^m, P_{n,n-۱}^m$
عدد صحیح	q
بردار ویژه	$\boldsymbol{R}$
تعداد فیبرهای شکسته شده	r
تنش برشی بدون بعد در ماتریس	S_{xy}
جابجایی و جابجایی بدون بعد در فیبر	u_n, U_n
جابجایی و جابجایی بدون بعد در ماتریس	$u_{n,n-۱}, U_{n,n-۱}$

$u^{m}_{n,n-1}, U^{m}_{n,n-1}$	جابجایی (و کمیت بدون بعد آن) در مرکز لایه‌ی ماتریس
V_m, V_f	کسرهای حجمی فیبر و ماتریس
x	مختصه‌ی طولی در امتداد جهت فیبرها
y	مختصه‌ی طولی در امتداد عرض تک لایه
y'	مختصه‌ی طولی عمود بر سطح جانبی الیاف
η	پارامتر بدون بعد در معادله‌ی (۳-۲)
λ_i	مقادیر ویژه
μ	مختصه‌ی بدون بعد (معادله‌ی (۴-۱۳))
θ	زاویه بین هر ساق و قاعده در الیاف مثلثی شکل
$(\tau_{xy})_{n,n-1}$	تنش برشی در لایه‌ی ماتریس $n, n-1$
ξ	مختصه‌ی طولی بدون بعد در امتداد الیاف
ψ	پارامتر بدون بعد در معادله‌ی (۳-۳)

۸- مراجع

[۱] Hedgepeth, J. M., "Stress concentration in a filamentary structure", NASA TN D-882, 1961.

[۲] Rossetoss, J. N. and Shishesaz, M., "Stress concentration in fiber composite sheets including matrix extension", Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, p. 723, 1987.

[۳] Bond, I., Hucker, M., Wear, P., Bleay, S. and Haq, S. , "Mechanical behavior of circular and triangular glass fibers and their composites", Composite Science and Technology, Vol. 62, p. 1051, 2002.

[۴] Park, S. J., Seo, M. K. and Shim, H. B., "Effect of Fiber Shapes on Physical Characteristics of Non-Circular Carbon Fibers-Reinforced Composites", Material Science and Engineering, A352, p. 34, 2003.

[۵] Kim, T. J. and Park, C. K., "Flexural and Tensile Strength Developments of Various Shape Carbon Fiber-Reinforced Lightweight Cementitious Composites", Cement and Concrete Research, Vol. 28 No. 7, p. 955, 1998.

[۶] Anagnostopoulos G., Parthenios J., Andreopoulos A.G., Galiotis C., " An Experimental and Theoretical Study of the Stress Transfer Problem in Fibrous Composites", Acta Materialia, Vol. 53, pp. 4173–4183, 2005.

[۷] Heuvel van den, P.W.J. Peijs T., Young R.J., "Failure Phenomena in Two-Dimensional Multi-Fiber Microcomposites. Part 4: a Raman Spectroscopic Study on the Influence of the Matrix Yield Stress on Stress Concentrations", Journal of Composites: Part A, Vol. 31, pp. 165–171, 2000.

[۸] Grubb David T., Li Zong-Fu, and S. Leigh Phoenix, "Measurement of Stress Concentration in a Fiber Adjacent to a Fiber Break in a Model Composite", Composite Science and Technology, Vol.53 , pp. 237-249, 1995.

[۹] Hedgepeth J. H., and Van Dyke P., "Local Stress Concentration in Imperfect Filamentary Composite Materials", Journal of Composite Materials, Vol. 1, P. 294, 1967.

[۱۰] Zhou X.-F., Wagner H.D., "Stress Concentrations Caused by Fiber Failure in Two-Dimensional Composites", Composites Science and Technology, Vol. 59, pp. 1063-1071, 1999.

[۱۱] Wagner H. D. and Eitan A., " Stress Concentration Factors in Two-Dimensional Composites: Effects of Material and Geometrical Parameters", Composite Science and Technology, Vol. 46, pp. 353-362, 1993.

[۱۲] Sirivedin S., Fenner D.N., Nath R.B., Galiot C., "Effects of Inter-Fiber Spacing and Matrix Cracks on Stress Amplification Factors in Carbon-Fiber/Epoxy Matrix Composites. Part I: Planar Array of Fibers", Composites: Part A, Vol. 34, pp. 1227–1234, 2003.

[۱۳] Sirivedin S., Fenner D.N., Nath R.B., Galiot C., " Effects of Inter-Fiber Spacing and Matrix Cracks on Stress Amplification Factors in Carbon-Fiber/Epoxy Matrix Composites. Part II: Hexagonal Array of Fibers", Composites: Part A, Vol. 37, pp. 1936–1943, 2006.

[۱۴] Shishesaz, M., "The Effect of Mechanical and Physical Properties of Polymers on Stress Amplification Factor in Composites with an Internal Damage.", Iranian Journal of Polymers, Vol. 14, No. 5, Issue No. 59, May 2005.

۹- زیرنویس

[1] Laser Raman microscopy