يافتن بدترين پاسخ فركانسي سيستم ديسک پره‌دار تحت تاثير ناميزاني به‌کمک الگوريتم ژنتيک

احسان رئيسي استبرق[i]؛ سعيد ضيايي راد[ii] *

چكيده

در اين مقاله پاسخ ارتعاشي سيستم ديسک پره‌دار تحت تاثير ناميزاني مورد بررسي قرار گرفته‌است. به منظور بررسی اثر وجود ناميزاني در ضرايب سختي و استهلاک هر پره بر دامنه پاسخ پره‌ها، ابتدا طرحي ساده براي محاسبه پاسخ سيستم ديسک پره‌دار تحت ناميزاني معرفي و روابط آن ارائه شد. براي به دست‌آوردن بيش‌ترين پاسخ سيستم و يافتن بدترين الگوي ناميزاني، از روش بهينه‌سازي الگوريتم ژنتيک استفاده شد. سپس پاسخ سيستم در دو حالت ميزان و ناميزان با يکديگر مقايسه شد. در ادامه بدترين پره يعني پره‌اي که داراي بيش‌ترين دامنه ارتعاش است، معرفي خواهدشد. در پايان، پاسخ سيستم براي ناميزاني در سختي پره‌ها، ناميزاني در ضريب استهلاک پره‌ها و ناميزاني همزمان در سختي و استهلاک بررسي و مشخص شده‌است. ناميزاني همزمان، مي‌تواند منجر به افزايش قابل توجهي در بيش‌ترين دامنه ارتعاش در سيستم شود.

كلمات كليدي : سيستم ديسک پره‌دار، سيستم ناميزان، بدترين پاسخ فرکانسي، الگوريتم ژنتيک

The Worst Response of Mistuned Bladed Disk System Using Genetic Algorithm

Ehsan Raeisi and Saeed Ziaei-Rad

ABSTRACT

The objective of this paper is to develop a technique using genetic algorithms (GA) for predicting the worst response of mistuned bladed disk. A simple but representative model for the bladed disk system is presented. The response of the system under harmonic excitation was obtained. The worst response of the mistuned system was then formulated as an optimization problem. Next, mistuning in blades stiffness, blades damping and blades stiffness and damping was studied and the results were compared. The results indicate that the system mistuned with both stiffness and damping has higher response amplitude in comparison with other mistuned system.

KEYWORDS : Bladed disk system, Mistuned System, Worst frequency response, Genetic algorithm

۱- مقدمه

مجموعه تحقيقات انجام شده در سه دهه گذشته، نشان مي‌دهد که پاسخ اجباري سيستم ديسک پره‌دار، نسبت به وجود ناميزاني در خواص يک يا چند پره، بسيار حساس است. براي مثال، افزايش مقداري ناميزاني در سيستم ديسک پره‌دار، ممکن است در قياس با حالت ميزان، منجر به افزايشي قابل توجه در مقدار دامنه شود [۱].

طراحان توربين براي طراحي قطعات و اجزاي مختلف سيستم‌هاي دوار نياز به دانستن بيشينه دامنه ارتعاش سيستم دارند. از روزهاي اول طراحي و ساخت اين وسايل متوجه شدند که طراحي بر اساس دامنه ارتعاش سيستم ميزان معمولا صحيح نبوده و نتايج قابل قبولي را ارائه نمي‌نمايد. استفاده از

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸۹/۱۰/۲۰
تاريخ اصلاحات مقاله: ۱۳۹۰/۷/۳

[i] عضو هيات علمي؛ دانشگاه جيرفت: ehsan1194@yahoo.com
[ii] * نويسنده مسئول و عضو هيات علمي؛ دانشکده مهندسي مکانيک؛ دانشگاه صنعتي اصفهان: szrad@cc.iut.ac.ir

نتايج سيستم ميزان سبب طراحي‌هايي با عمر كمتر و در مواردي شكست در شروع راه‌اندازي مي‌شد. علت اصلي آن بود كه به دلايل عملي، امكان ساخت پره‌هايي با اندازه و مشخصات كاملا يكسان وجود نداشت. براي استفاده از نتايج حاصل از سيستم ميزان در طراحي بايد تلرانس‌هاي ابعادي و ساخت بسيار محدود شوند و اين به معناي افزايش زياد هزينه‌هاي توليد است. از طرف ديگر استفاده از ضرايب اطمينان بزرگ نيز سبب مي‌شد كه رتور، قطعات گردنده و ديگر اجزا با اندازه‌ها و ابعاد بزرگتري ساخته شوند و اين خود مصرف انرژي سيستم و هزينه‌هاي ساخت را بالا مي‌برد. به همين دليل يافتن بدترين پاسخ از ابتدا مورد توجه محققين بوده‌است. حتي اگر درصد وقوع حالت بدترين پاسخ زياد نباشد بايد سيستم دوار را بر اساس آن طراحي نمود.

در عمل ابتدا بايد فرايند ساخت و تلرانس‌هاي ساخت مشخص شوند. سپس بدترين دامنه ارتعاش سيستم ناميزان، محاسبه و در ادامه طراحي‌ها بر اساس آن انجام شوند.

در سال ۱۹۶۶ وايتهد[۱] [۲] در مقاله خود، به مطالعه در زمينه بيشينه پاسخ ارتعاشات سيستم ديسک پره‌دار، با وجود ناميزاني پرداخت. نتايج تحقيق وي نشان داد كه بيشينه پاسخ يک سيستم ناميزان ديسک پره‌دار، مي‌تواند به‌مراتب بيش‌تر از پاسخ همان سيستم، در حالت ايده‌آل يا ميزان باشد. از آن پس، مطالعات زيادي توسط محققان (به‌ويژه در شركت‌هاي توليدكننده موتور جت، مانند رولز رويز[۲] و ناسا[۳]) در اين زمينه، انجام شد. اين مطالعات، در طي ۴۰ سال گذشته، نتايج فراواني در پي داشته است.

در سال ۱۹۶۶ وايتهد [۲] در اولين مطالعه خود، يک تحليل رياضي را براي يافتن بدترين پره، در سيستم ديسک پره‌دار، با فرض وجود ناميزاني‌هاي كوچک ناشي از نيروهاي آيروديناميكي، به كار بست. وي، ضريب $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{N}\right)$ را براي يک سيستم با N پره معرفي‌نمود. اين ضريب، در واقع، نسبت پاسخ بدترين پره، به پاسخ همان پره در شرايط ميزان و در حالت رزونانس است. وی هم‌چنين اثر استهلاک مكانيكي را بر اين پديده بررسي‌نمود. پس از گذشت يک دهه، در سال ۱۹۷۶ [۳] وايتهد، ضريب بدترين پاسخ را به شكل $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{N}{2}}\right)$ تصحيح نمود.

داي و هآنري[۴] در سال ۱۹۶۹ [۴] يک طرح متمركز جرم و فنر را تحت ناميزاني تک پره[۵]، ناميزاني متناوب[۶] و ناميزاني اتفاقي[۷] و بي‌نظم، به صورت عددي و نيز آزمايشگاهي مورد بررسي قرار دادند. آن‌ها، در طرح ۴۳ پره‌اي خود، ضريب ۲/۸۷ را براي ناميزاني تک‌پره پيشنهاد نمودند. به‌علاوه، مطالعات آن‌ها براي يک طرح آماري خاص، ضريب ۲/۴۴ را معرفي نمود.

پس از آن، وگنر[۸] [۵] در سال ۱۹۷۶، از يک سيستم جرم و فنر براي شبيه‌سازي پره‌هاي توربين استفاده نمود؛ كه از راه يک ديسک انعطاف‌پذير، با هم متصل شده بودند. وي فركانس‌هاي طبيعي، حالت شيپ‌ها و پاسخ اجباري سيستم را محاسبه نمود. نتايج تحقيق وي، با مطالعات وايتهد، تا حدي برابري داشت.

اوينز[۹] مجموعه‌اي از مطالعات را در زمينه اثر ناميزاني اتفاقي و عمدي، بر سيستم ديسک پره‌دار، انجام داد. در طرح وي، اتصال بين پره‌ها و ديسک، انعطاف‌پذير در نظر گرفته شد. وی در اولين مقاله خود در سال ۱۹۶۹، به بررسي مقادير ويژه و حالت شيپ‌هاي سيستم ناميزان پرداخت و اثر ناميزاني اتفاقي را بر پاسخ اجباري يک سيستم ۲۴تايي ديسک پره‌دار، تحت تحريک‌هاي معمول و هارمونيک بررسي‌نمود [۶] و [۷]. افزون بر آن، وي در يک طرح ۳۴ تايي، به ضريب افزايشي ۲۰% رسيد. اوينز در ادامه مطالعات خود، در سال ۱۹۸۴، همراه با هان[۱۰]، در مقاله‌اي نشان داد مجموعه‌اي از پره‌ها با مقدار انحراف ثابت، تحت تركيب‌بندي‌هاي مختلف، مي‌توانند پاسخ‌هاي كاملا متفاوتي داشته باشند. آن‌ها بيش‌ترين پاسخ را در پره‌اي برآورد نمودند كه بيش‌ترين انحراف را دارد. اين نتيجه‌گيري، با يافته‌هاي حاصل از تحقيقات آفولابي[۱۱] [۸]، [۹] برابري نمود. پس از آن، در سال ۱۹۹۳، يو در پايان‌نامه دكتري خود، نشان داد كه بدترين پره، لزوما داراي بيش‌ترين پاسخ نيست.

لين[۱۲] و ميگنولت[۱۳] اثر تفاوت در ميان ضريب استهلاک پره‌ها را بر روي پاسخ فركانسي سيستم، بررسي نمودند. آنها دريافتند كه ناميزاني موجود در پره‌ها، مي‌تواند منجر به افزايش دامنه پاسخ پره‌ها، نسبت به حالت ميزان شود. آن‌ها هم‌چنين اثر عوامل ساختاري را بر پراكندگي دامنه پره‌ها ارزيابي نمودند [۱۰].

چيو[۱۴] و هيانگ[۱۵] در سال ۲۰۰۷، با روش تحليلي، ارتعاشات يک شافت را، همراه با پره‌هايي كه از نظر طول، نسبت به يكديگر ناميزان شده بودند، مورد مطالعه قرار دادند [۱۱]. يان[۱۶] و همكاران، در سال ۲۰۰۸، بر روي يک سيستم ديسک پره‌دار، بررسي تحليلي انجام دادند و اثر ناميزاني را در سختي پره‌ها در نظر گرفتند. آنها نتايج تحليل خود را با يافته‌هاي حاصل از آزمايش مقايسه‌نمودند [۱۲].

چان[۱۷] و اوينز در سال ۲۰۱۰ از روش مونته‌كارلو و گراديان مزدوج، براي تحليل ناميزاني در سيستم ديسک پره‌دار

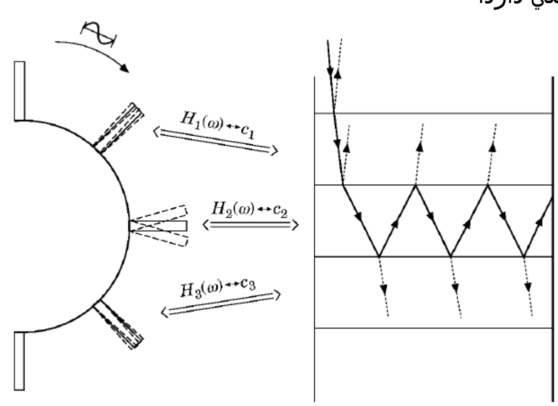
استفاده نمودند [۱۳].

۲- معرفي طرح

پاسخ اجباري يک پره، مي‌تواند از جمع پاسخ‌هاي امواج منتشرشده در پره، در سرعت‌هاي مختلف به دست‌آيد. به‌علاوه، از آنجا که در مطالعه حاضر سيستم، خطي در نظر گرفته مي‌شود، اصل جمع اثرها برقرار است. از اين رو، کافي است که پاسخ سيستم، فقط با در نظرگرفتن يک موج به عنوان نمونه محاسبه شود.

انتشار چنين موجي در سيستم، از يک پره به پره ديگر، به صورت لايه به لايه انجام مي‌شود؛ مانند آنچه در شکل (۱) نشان داده شده است. براي اين منظور، بايد ارتباط بين سرعت موج c در يک لايه، با پارامتر مشخصه پره، تعيين شود. از آنجاکه امواج در اطراف ديسک، داراي فرکانس يکسان ω هستند، اثر پره بر موج، توسط تابع انتقال پره که خود تابعي از فرکانس است، به خوبي معرفي مي‌شود (يعني به کمک تابع $H(\omega)$).

اگر سيستم، ميزان باشد همه پره‌ها و به تبع آن همه لايه‌ها مشابه هستند؛ و چگونگي انتشار امواج، بدون وابستگي به ارتباط بين لايه‌ها، مشخص مي‌شود. در نتيجه، پاسخ تمام پره‌ها با هم برابر است. به‌عکس، اگر سيستم ناميزان باشد، پره‌ها و لايه‌هاي آن‌ها يکسان نيستند و قسمتي از موج، منتقل شده و قسمتي، منعکس مي‌شود. سهم بخش انعکاس‌يافته، با افزايش ناميزاني در خواص دو لايه پره، افزايش مي‌يابد (اين مقدار، از تابع پاسخ فرکانسي دو پره تعيين مي‌شود) اگر موج با يک سطح با انعکاس بالاتر، برخوردنمايد مي‌تواند در چند لايه به دام بيفتد. انرژي چنين موجي، به وسعت پاسخ دامنه پره‌ها بستگي دارد.



ب) لايه‌بندي مياني پره   الف) ديسک پره‌دار

شکل(۱): موج بررسي شده براي پديده محلي‌سازي

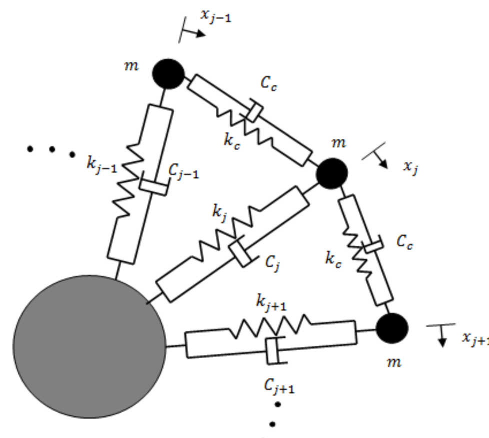
ـــــ: قسمت قوي، .... : قسمت ضعيف [۱۰]

پديده گفته‌شده، نشان مي‌دهد که ناميزاني در هر يک از خواص پره (جرم، ضريب استهلاک، سختي) بر توزيع دامنه پره در فرکانس تحريک، اثر خواهد داشت. با اين حال، اهميت اين اثر (بيشينه دامنه، پراکندگي دامنه) به دو عامل ناميزاني و فرکانس تحريک بستگي دارد. در واقع، براي سيستم يک درجه آزادي، به آساني ديده مي‌شود که اثر ناميزاني، زماني زيادتر است که فرکانس طبيعي با فرکانس تحريک برابر شود. علاوه بر اين، تغيير در جرم و سختي هر پره، سبب به وجود آمدن دامنه پاسخي بسيار بزرگتر، در قياس با تغييرات در ضريب استهلاک پره شود. براي مثال، اگر m=۰/۰۱۱۴kg، k=۴۳۰۰۰۰ N/m و c= ۱/۴۴۳ Ns/m فقط ۳% تغيير در مقدار سختي پره، دامنه پاسخ را در حالت رزونانس تا ۴۳/۳% تغيير مي‌دهد. اين، در حالي است که تغيير مشابه در ضريب استهلاک پره، منجر به تنها ۲/۹% تغيير در دامنه پره مي‌شود. اين موارد، بدون شک، علت برانگيختگي محققان قبلي را براي در نظر گرفتن وجود ناميزاني در سختي هر پره، نشان مي‌دهد. مطالعات کمي وجود دارند که در آن‌ها، ناميزاني در ضريب استهلاک پره، در نظر گرفته شده است. به‌طور خاص، در مرجع [۱۴] اثر تغييرات نيرو، روي استهلاک اصطکاکي خشک، براي به‌دست آوردن پاسخ اجباري سيستم ديسک پره‌دار در نظرگرفته شده است. هم‌چنين در اين مطالعه، به بررسي اثر وجود ناميزاني در سختي هر پره پرداخته شده است.

گفتني است که روش‌های مختلف براي به‌دست آوردن اتلاف انرژي، براي تخمين مقدار واقعي و منحصر به‌فرد ضريب استهلاک، در برخي موارد، بيش از حد نامطمئن و غير قابل کنترل هستند (به طور مثال در مراجع [۱۵] و [۱۶]). در اين شرايط، انتظار مي‌رود مقدار عامل ضريب استهلاک، از يک پره به پره ديگر، بسيار متفاوت باشد. براي مثال در بازه ۰/۵% تا ۱% ضريب استهلاک بحراني براي هر پره تغييرنمايد. اين تغييرات زياد (حدود ۱۰۰%) در مقدار ضريب استهلاک باعث مي‌شود که در دامنه پاسخ پره‌ها تغييراتي به‌وجود بيايد. هدف تحقيق حاضر، بررسي اثر تغييرات حاصل از وجود ناميزاني‌هاي مختلف در سيستم، بر دامنه پاسخ پره‌ها است.

براي تحليل وجود ناميزاني در ضريب استهلاک و سختي پره‌ها و نيز بررسي اثر آن بر روي پاسخ هر پره، يک طرح ساده مانند آنچه که در شکل (۲) نشان داده شده، در نظر گرفته شده است. در اين طرح، هر کدام از n پره تشکيل‌دهنده طرح، توسط يک فنر و دمپر يک درجه آزادي، شبيه‌سازي شده‌اند. هر دو پره مجاور، توسط يک فنر و یک مستهلک‌کننده به يکديگر متصل مي‌شوند (اين عوامل دربرگيرنده اثرات آيروالاستيسيته

و انعطاف‌پذيري هر پره هستند) كه براي تمام پره‌ها يكسان هستند (k_c و c_c). به علاوه، فرض مي‌شود كه جرم تمام پره‌ها با هم برابر است و ناميزاني فقط در ضريب استهلاک c_j و سختي هر پره k_j در نظر گرفته مي‌شود. در پايان براي به دست‌آوردن بدترين الگو براي r امين فركانس سيستم ميزان، با اعمال نيرو بر روي سيستم ديسک پره‌دار، از الگوريتم ژنتيک استفاده مي‌شود. منظور از بدترين الگو، چينشي از پره‌هاست كه يک يا چند پره از آنها داراي بيش‌ترين دامنه ارتعاش هستند. اگرچه سيستم n درجه آزادي، يک طرح ساده از سيستمي واقعي است؛ اما در مطالعه حاضر، چنين سيستمي، فقط به‌عنوان نمونه، براي بررسي اثر ناميزاني در آن بررسي مي-شود [۱۷]، [۱۸].



شكل (۲): طرح ساده سيستم ديسک پره‌دار

در اين مطالعه، در ادامه بررسي‌هاي انجام شده بر روي سيستم ديسک پره‌دار ناميزان، ابتدا يک طرح معرفي مي‌شود و فرمولاسيون به‌دست‌آوردن پاسخ براي آن استخراج مي‌شود. پس از آن، براي بررسي اثرات استهلاک داخلي پره‌ها بر روي پاسخ سيستم، ناميزاني سيستم، در دو عامل ضريب استهلاک و سختي هر پره درنظر گرفته مي‌شود. سپس، براي به‌دست-آوردن بيش‌ترين پاسخ، از روش بهينه‌سازي به كمک الگوريتم ژنتيک استفاده مي‌شود تا بدترين الگو به‌دست آيد. سپس، پاسخ سيستم در حالت ميزان و ناميزان با يكديگر مقايسه شده و بدترين پره، معرفي مي‌شود. تمام مراحل گفته‌شده در بالا براي چندين سيستم با تعداد پره‌هاي متفاوت (ده، شانزده، بيست‌و-چهار، سي‌وشش) انجام شده است. البته، براي رعايت اختصار، فقط نتايج مربوط به سيستم سي‌وشش درجه آزادي، به طور كامل ارائه مي‌شود و با نتايج سيستم‌ها با تعداد پره‌هاي متفاوت مقايسه مي‌شود. استفاده از طرح متمركز، داراي دقت كافي نبوده و استفاده از مدل‌هاي المان محدود با جزئيات بيشتر مي‌تواند به نتايج واقعي‌تر منجر شود. با اين حال بايد توجه نمود كه اين مقاله ناميزاني را در استهلاک پره موردنظر قرار داده است. از آن جايي كه اعمال استهلاک در مدل‌هاي المان محدود مشكل و نادقيق هستند بنابراين استفاده از طرح متمركز قابل توجيه است.

۳- فرمولاسيون مسئله

با ناديده‌گرفتن اثرات غيرخطي حاصل از ساختار، اثرات سيال و اثر متقابل بين قسمت‌هاي مختلف، سيستم ديسک پره‌دار به‌صورت يک سيستم خطي چند درجه آزادي در نظر گرفته مي‌شود؛ معادله حركت چنين سيستمي، طبق رابطه (۱) است:

$$M\ddot{\mathbf{X}}+C\dot{\mathbf{X}}+K\mathbf{X}=\mathbf{F} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱) $\mathbf{X}$ نشان‌دهنده بردار جابه‌جايي براي سيستم n درجه آزادي است؛ M، C و K نشان‌دهنده ماتريس‌هاي $n\times n$ جرم، ضريب استهلاک و سختي هستند؛ هم‌چنين بردار $\mathbf{F}$ نشان‌دهنده نيروهاي خارجي اعمالي به سيستم ديسک پره‌دار است.

بردار نيرويي، مطابق با رابطه (۲) فرض مي‌شود.

$$\mathbf{F}(t)=\mathbf{F}_0^{(c)}\cos\omega t+\mathbf{F}_0^{(s)}\sin\omega t \qquad (۲)$$

پاسخ حالت دائم سيستم ديسک پره‌دار را براي بردار نيروي رابطه (۲)، مي‌توان به صورت رابطه (۳) نوشت:

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{U}\cos\omega t+\mathbf{V}\sin\omega t \qquad (۳)$$

با جاي‌گذاري روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱)، نتيجه مي‌شود كه U_i و V_i، اجزاء تشكيل‌دهنده بردارهاي $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$، معادلات جبري سيستم خطي را به صورت رابطه (۴) ارضا مي‌نمايند:

$$H\,\mathbf{Z}=\tilde{\mathbf{F}} \qquad (٤)$$

هم‌چنين:

$$\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=[U_1\quad V_1\quad U_2\quad V_2\quad \ldots\quad U_n\quad V_n] \qquad (۵)$$

و:

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}=[F_{01}^{(c)}\quad F_{01}^{(s)}\quad F_{02}^{(c)}\quad F_{02}^{(s)}\quad \ldots\quad F_{0n}^{(c)}\quad F_{0n}^{(s)}] \qquad (٦)$$

در روابط (۵) و (۶) بالانويس T به معني ترانهاده ماتريس است و ماتريس H كه داراي بعد $۲n\times ۲n$ است، ماتريسي است كه عناصر تشكيل‌دهنده آن $K_{il}-\omega^2 M_{il}$ و ωC_{il} هستند ($i,l=1,\ldots,n$).

دامنه پاسخ iامين درجه آزادي سيستم، از بردار $\mathbf{Z}$ و از

رابطه (۷) به‌دست مي‌آيد:

$$A_i = \sqrt{U_i^2 + V_i^2} \qquad (۷)$$

وقتي كه همه يا تعدادي از عوامل سيستم، شامل K_{il}، C_{il} و M_{il} تغييرنمايند، پاسخ هر پره نيز تغيير خواهدنمود.

مقدار دامنه، A_i، براي هر پره از رابطه (۸) به‌دست مي‌آيد:

$$A_i = \sqrt{U_i^{\,2} + V_i^{\,2}} = [\mathbf{e}_{2i-1}^T H^{-1}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} H^{-\mathrm{T}} e_{2i-1} + \mathbf{e}_{2i}^T H^{-1}\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}} H^{-\mathrm{T}} e_{2i}]^{1/2} \qquad (۸)$$

كه در رابطه بالا $\mathbf{e}_i$ نشان‌دهنده برداري است كه 2n آرايه دارد و همه عناصر آن صفر هستند، به جز عنصر سطر iام كه برابر با یک است.

براي بررسي اثر نامیزاني در ضريب استهلاک و سختي سيستم، ضريب سختي پره زام، k_j و ضريب استهلاک آن، برابر با c_j در نظر گرفته مي‌شود (شكل (۲)). مقدار اين عوامل، با پارامترهاي اسمي سيستم، يعني k_t و c_t، اندكي متفاوت است. براي اعمال نامیزاني در سيستم، m متغير $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ درنظر گرفته‌شده و به كمک آن‌ها، نامیزاني در سيستم، طبق روابط (۹) و (۱۰) اعمال مي‌شود:

$$k_j = k_t + \lambda_{n+j} \qquad j = ۱,...,n \qquad (۹)$$

و:

$$c_j = c_t + \lambda_j \qquad j = ۱,...,n \qquad (۱۰)$$

تعداد عواملي كه به صورت تصادفي براي نامیزان نمودن سيستم استفاده مي‌شوند با دو برابر درجه آزادي سيستم برابر است، يعني:

$$m = ۲n \qquad (۱۱)$$

براي به دست‌آوردن ماتريس H معادله حركت سيستم شكل (۲) به شكل معادله (۱) نوشته مي‌شود [۱۹] و [۲۰]:

$$H = \begin{bmatrix} h_1+\lambda_{n+1} & h_3-\lambda_1\omega & -h_2 & h_4 & 0 & 0 & \ldots & -h_2 & h_4 \\ -h_3+\lambda_1\omega & h_1+\lambda_{n+1} & -h_4 & -h_2 & 0 & 0 & \ldots & -h_4 & -h_2 \\ -h_2 & h_4 & h_1+\lambda_{n+2} & h_3-\lambda_2\omega & -h_2 & h_4 & \ldots & 0 & 0 \\ -h_4 & -h_2 & -h_3+\lambda_2\omega & h_1+\lambda_{n+2} & -h_4 & -h_2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \ldots & . & . \\ -h_2 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & h_1+\lambda_{2n} & h_3-\lambda_n\omega \\ -h_4 & -h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -h_3+\lambda_n\omega & h_1+\lambda_{2n} \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲) عوامل h_1، h_2، h_3 و h_4 طبق روابط (۱۳) تا (۱۶) تعريف مي‌شوند:

$$h_1 = k_t - m\omega^2 + 2k_c \qquad (۱۳)$$

$$h_2 = k_c \quad n > 2, \qquad h_2 = 2k_c \quad n = 2, \qquad (۱٤)$$

$$h_3 = -(c_t + 2c_c)\omega \qquad (۱۵)$$

$$h_4 = c_c\omega \quad n > 2, \qquad h_4 = 2c_c\omega \quad n = 2, \qquad (۱٦)$$

٤- روش بهينه‌سازي

الگوريتم ژنتيك كه از تكامل در طبيعت الهام گرفته‌است، يكي از روش‌هاي متداول براي بهينه‌سازي مسائل اساسي به شمار مي‌آيد. اين الگوريتم، با توليد مجموعه‌اي از جواب‌ها، كه به‌طور معمول به‌صورت تصادفي ايجاد مي‌شوند، آغاز مي‌شود. اين جواب‌ها با توجه به شرايط مسئله در محدوده‌هاي مجاز، توسط یک الگوريتم تصادفي ايجاد مي‌شوند. هر یک از جواب‌هاي ايجادشده، يك كروموزوم ناميده مي‌شود. مجموعه كروموزوم‌ها، يك نسل يا جمعيت را تشكيل مي‌دهند. پس از ايجاد نسل اول، با به‌كاربردن عملگرهای ژنتيكي (انتخاب، تركيب و جهش) روي كروموزوم‌هاي نسل فعلي، نسل‌هاي بعد ايجاد‌شده و جايگزين نسل قبلي مي‌شوند. كروموزم‌هاي توليد شده در اثر اعمال عملگرهاي ژنتيكي، به شرطي در نسل جديد نگه داشته مي‌شوند كه داراي برازندگي مناسب باشند. به عبارت ديگر، در هر مرحله از توليد نسل، نسل جديد داراي برازندگي بالاتري نسبت به نسل قبلي است. به همين ترتيب نسل‌هاي متوالي ايجاد مي‌شوند تا وقتي كه شرط پايان الگوريتم (كه معمولاً بيشينه شدن مقدار تابع برازندگي و يا تعداد نسل‌هاست) برقرار شود.

در اين مقاله، براي يافتن بدترين پاسخ و الگوي متناسب با

آن، با وجود ناميزاني در ضريب استهلاک پره‌ها و هم‌چنين در ضريب سختي پره‌ها، مسئله، در يک شکل بهينه‌سازي، صورت‌بندي شده و الگوريتم ژنتيک، به عنوان روشي کارامد براي حل، مورد استفاده قرار گرفته‌است.

تابع هدف براي حل مسئله، دامنه ارتعاش سيستم يعني همان معادله (۸) است. متغيرهاي مسئله ضرايب سختي و استهلاک پره‌ها هستند. از آن‌جايي که سيستم داراي n پره است تعداد کل عوامل يا کروموزوم‌ها برابر ۲n خواهد بود.

با توجه به اين‌که هدف اصلي مقاله الگوريتم ژنتيک نيست بنابراين از الگوريتم ژنتيک استاندارد باينري براي اين منظور استفاده شده است. خواننده براي اطلاعات بيشتر به [۲۱] و [۲۲] ارجاع داده مي‌شود. مشخصه‌هاي استفاده شده در الگوريتم ژنتيک، طبق جدول (۱) است.

جدول (۱): عوامل استفاده‌شده در الگوريتم ژنتيک

ترکيب	ادغام چند نقطه‌اي[۱۸]	۹۰%
جهش	تصادفي[۱۹]	۲%
تعداد نسل	-	۱۰۰

۵- نتايج عددي

در اين بخش، نتايج عددي مربوط به ديسک با سي‌وشش پره به تفصيل بيان مي‌شود. نتايج عددي هم‌چنين براي ديسک با تعداد ده، شانزده و بيست‌وچهار پره نيز محاسبه شده و براي مقايسه، در جدول (۲) آورده شده است.

براي ديسک با سي‌وشش درجه آزادي ابتدا، ناميزاني فقط در ضريب سختي هر پره، و در مرحله بعد، ناميزاني، فقط در ضريب استهلاک هر پره در نظر گرفته شده است. در پايان، ناميزاني در ضرايب سختي و استهلاک هر پره، به‌طور هم‌زمان، درنظر گرفته‌شده است. براي هر قسمت، نتايج، به‌دست آمده و مقايسه ميان نتايج صورت گرفته است.

پارامترهاي استفاده شده براي يافتن پاسخ سيستم ميزان، برابر با m=۰/۰۱۱۴kg، k_c=۴۵۴۳۰۰ N/m، k_t=۴۳۰۰۰۰ N/m، c_c= ۰/۱۴۴۳ Ns/m و c_t= ۱/۴۴۳ Ns/m هستند [۱۰]. علاوه بر اين، پاسخ سيستم براي مرتبه تحريک rام، محاسبه شده است، يعني:

$$F_i\,(t) = F_0 \cos(\omega_r t - \phi_i) \qquad (۱۷)$$

در رابطه (۱۷) [۱۰]:

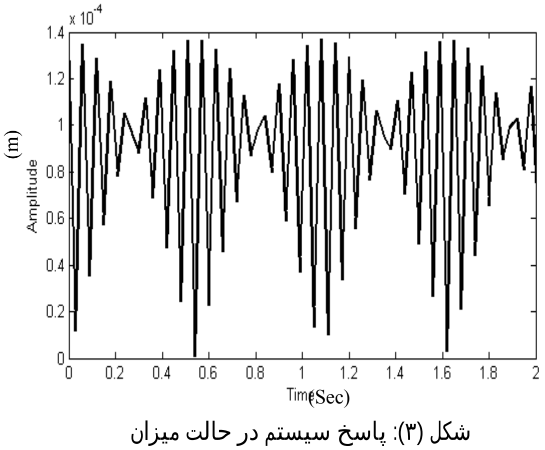
$$\omega_r^2 = \frac{k_t}{m} + 4\frac{k_c}{m}\sin^2\frac{\pi r}{N} \qquad (۱۸)$$

$$\phi_i = \frac{2\pi}{N} r(i-1) \qquad (۱۹)$$

ω_r نشان‌دهنده فرکانس تحريک rام سيستم است و برابر با ۳ در نظر گرفته مي‌شود. مقدار ضريب سختي هر پره، به‌طور تصادفي، از بازه [۴۲۸۶۰۰،۴۳۱۴۰۰] N/m انتخاب مي‌شود. با توجه به اين بازه، تغيير در سختي هر پره، که همان ناميزاني است، کمتر از ۰/۲درصد مقدار ميزان آن (k_t) است. هم‌چنين مقدار ضريب استهلاک براي هر پره نيز به‌طور تصادفي از بازه [۰/۳۹، ۲/۴۹] Ns/m انتخاب مي‌شود. اين مقادير به‌ترتيب حدود ۷۵% کمتر و بيشتر از مقدار ميزان آن، يعني $c_c = ۱/۴۴۳\ Ns/m$ است. انتخاب بازه‌اي بسيار کوچک براي ناميزاني در سختي به دليل وجود تلرانس بسيار محدود و جزئي در هنگام ساخت پره‌ها است. اين در حالي است که عوامل مختلف و غير قابل کنترلي در اتلاف انرژي در پره‌ها مشارکت دارند و در عمل کنترل ضريب استهلاک را مشکل مي‌نمايند؛ به‌طوري که مقدار ضريب استهلاک از يک پره به پره ديگر، ممکن است بسيار متفاوت باشد.

۵-۱- ديسک پره‌دار با سي‌وشش پره (ناميزاني در ضريب سختي هر پره)

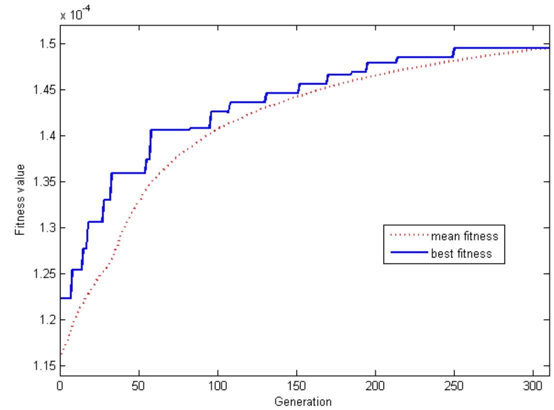
پاسخ حالت ميزان اين سيستم براي يکي از پره‌ها در شکل (۳) رسم شده‌است (در تمام نمودارها واحد زمان، ثانيه و واحد دامنه، متر است). مشخص است که پاسخ همه پره‌ها، از نظر دامنه يکسان، ولي از نظر فاز، داراي اختلاف φ_i، با يکديگر است. همان‌طور که از شکل (۳) قابل ديدن است، بيش‌ترين پاسخ سيستم ميزان برابر با $۱/۳۶۸۵\times۱۰^{-۴}$ است.



شکل (۳): پاسخ سيستم در حالت ميزان

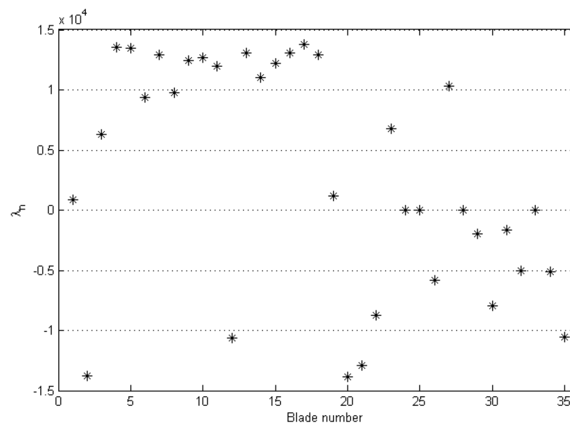
هم‌گرايي حل، در الگوريتم ژنتيک براي رسيدن به نقطه بيشينه با استفاده از نمودار شکل (۴) نشان داده شده است. همان‌طورکه قابل ديدن است، مقدار تابع هدف پس از حدود ۳۰۰ نسل، يکنواخت مي‌شود، از اين رو، در نسل ۳۱۰ الگوريتم،

متوقف مي‌شود. با توجه به شكل (۴)، بيشينه پاسخ به‌دست‌آمده از الگوريتم ژنتيک، براي سيستم ناميزان، براي بدترين پره برابر با $۱/۴۹۴۲\times ۱۰^{-۴}$ است.



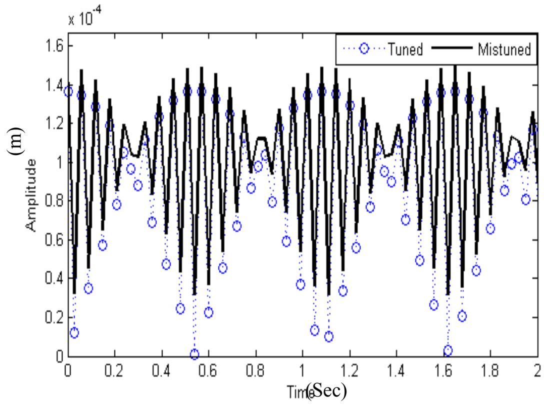
شكل (۴): نمودار سازگاري در الگوريتم ژنتيک براي نشان‌دادن هم‌گرايي

بدترين الگوي به‌دست‌آمده از الگوريتم ژنتيک پس از حدود ۳۰۰ نسل براي وجود ناميزاني در ضريب سختي پره‌ها، در شكل (۵) آورده شده‌است.



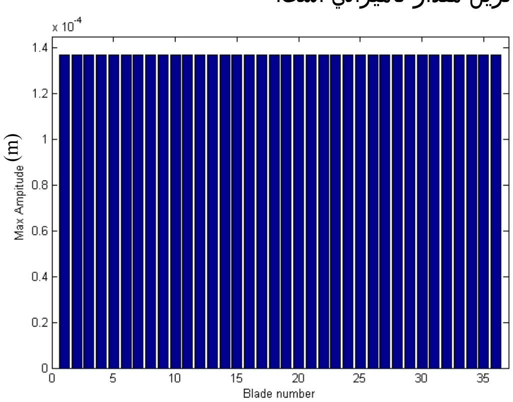
شكل (۵): بدترين الگوي به‌دست آمده براي ضريب سختي پره‌ها

در شكل (۶) پاسخ سيستم براي دو حالت ميزان و ناميزان آورده شده است. پاسخ سيستم در حالت ناميزان براي بدترين الگوي به‌دست‌آمده براي بدترين پره (پره‌اي كه داراي دامنه پاسخ بيشينه است) رسم شده است. فركانس ارتعاش هر دو سيستم تقريبا يكسان است، زيرا ماتريس‌هاي جرم و استهلاک، براي هر دو سيستم يكسان هستند و تنها ماتريس‌هاي سختي، تفاوتي جزيي با يكديگر دارند. با اين حال، دامنه ارتعاش دو سيستم، اختلاف زيادي با يكديگر دارند.

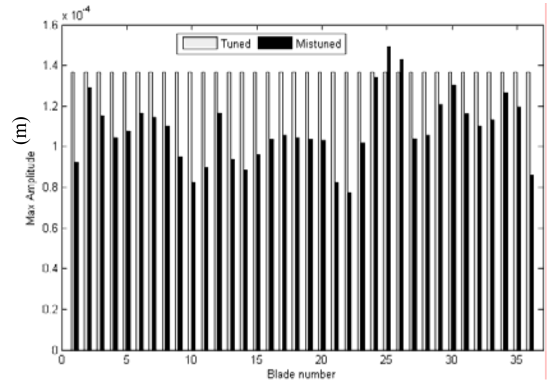


شكل (۶): پاسخ بدترين پره در بدترين الگو در حالت ناميزان

در شكل (۷) بيش‌ترين پاسخ سي‌وشش پره در حالت ميزان رسم شده است. هم‌چنين در شكل (۸) بيشينه دامنه پاسخ براي سيستم سي‌وشش پره در حالت وجود ناميزاني رسم شده - است. مقايسه دو شكل (۷) و (۸)، نشان مي‌دهد وجود ناميزاني در ضريب سختي پره‌هاي سيستم، مي‌تواند پاسخ سيستم را تا ۱/۰۹ برابر افزايش دهد (بيشينه پاسخ سيستم ميزان برابر با $۱/۳۶۸۵\times ۱۰^{-۴}$ و بيشينه پاسخ سيستم ناميزان براي بدترين پره برابر با $۱/۴۹۴۲\times ۱۰^{-۴}$ است). بايد توجه نمود كه افزايش حدود ۰/۲ درصد در سختي پره، باعث شده تا پاسخ حالت ناميزان نسبت به حالت ميزان %۹ درصد افزايش داشته‌باشد. نتايج نشان مي‌دهد كه با تغيير ۱ درصد در سختي پره، پاسخ سيستم ناميزان %۴۵ نسبت به پاسخ حالت ميزان، افزايش خواهد داشت. اين نكته، مويد حساسيت پاسخ سيستم ديسك پره‌دار، نسبت به تغيير در ضريب سختي است. در ضمن، بيشينه دامنه پاسخ، مربوط به پره بيست‌وپنجم است. گفتني است كه پره بيست‌وپنجم كه داراي بزرگترين دامنه ارتعاش است، بالاترين مقدار ناميزاني را ندارد؛ بلكه، پره هفدهم داراي بيش‌ترين مقدار ناميزاني است.



شكل (۷): بيشينه پاسخ سي‌وشش پره در حالت ميزان

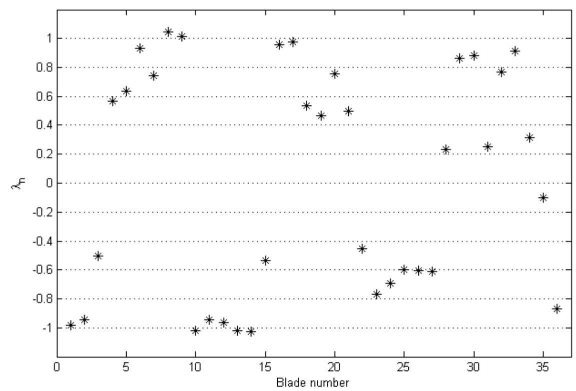


شکل (۸): بیشینه پاسخ سي‌وشش پره در حالت وجود نامیزاني در بدترین الگو

۵-۲- دیسک پره‌دار با سي‌وشش پره (نامیزاني در ضریب استهلاک هر پره)

پاسخ سیستم در حالت میزان مانند شکل (۳) در قسمت قبل است.

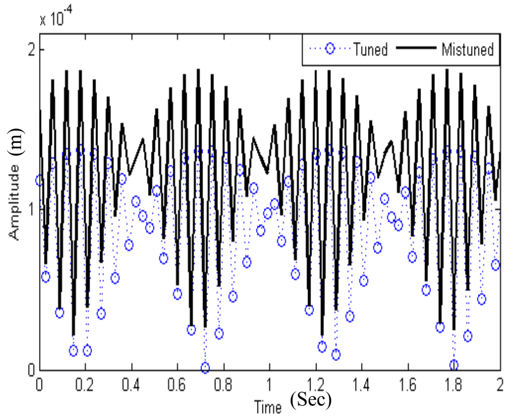
بدترین الگوي به‌دست‌آمده از الگوریتم ژنتیک، براي حالت وجود نامیزاني در ضریب استهلاک پره‌ها، در شکل (۹) آورده شده‌است.



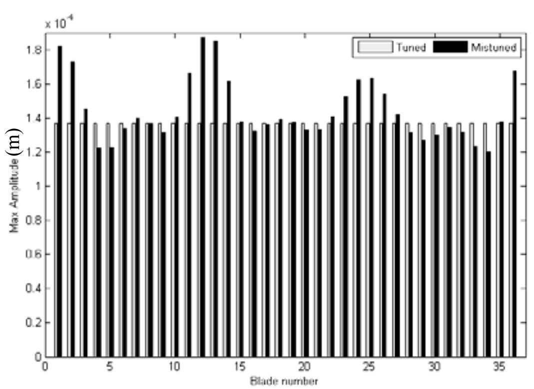
شکل (۹): بدترین الگوي به‌دست آمده براي ضریب استهلاک پره‌ها

در شکل (۱۰) پاسخ سیستم در حالت نامیزان براي بدترین الگوي به‌دست‌آمده براي بدترین پره، یعني پره دوازدهم رسم شده است. همان‌طور که از شکل (۱۰) مشخص است، بیشینه پاسخ سیستم در حالت نامیزان براي بدترین پره برابر با $۱/۸۷۱۲\times۱۰^{-۴}$ است.

در شکل (۱۱) بیشینه پاسخ سي‌وشش پره، در حالت وجود نامیزاني در ضریب استهلاک پره‌ها رسم شده‌است. شکل (۱۱) نشان مي‌دهد وجود نامیزاني در سیستم، مي‌تواند پاسخ سیستم را تا ۱/۳۷ برابر افزایش‌دهد (بیشینه پاسخ سیستم میزان برابر با $۱/۳۶۸۵\times۱۰^{-۴}$ و بیشینه پاسخ سیستم نامیزان براي بدترین پره برابر با $۱/۸۷۱۲\times۱۰^{-۴}$ است). در ضمن، بیشینه دامنه پاسخ مربوط به پره دوازدهم است. این در حالي است که پره هشتم داراي بیش‌ترین مقدار نامیزاني است. نتایج گفته شده، تاکنون موید این نکته‌اند که اولا، دامنه ارتعاش دیسک پره‌دار نامیزان از دیسک پره‌دار میزان بالاتر است؛ و ثانیا، پره‌اي که داراي بالاترین مقدار نامیزاني است، لزوما داراي بیش‌ترین دامنه ارتعاش نیست.



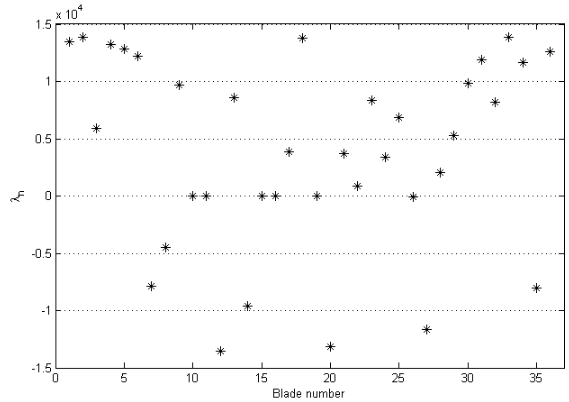
شکل (۱۰): پاسخ بدترین پره در بدترین الگو در حالت نامیزان



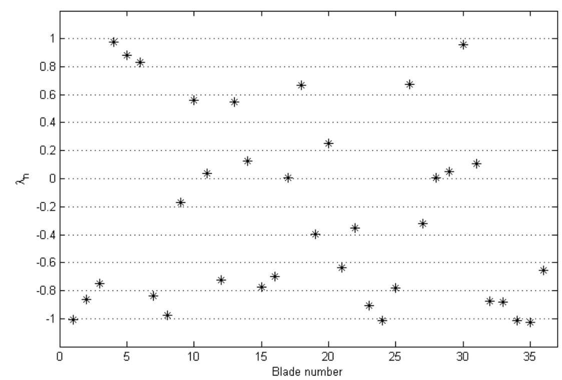
شکل (۱۱): بیشینه پاسخ سي‌وشش پره در حالت وجود نامیزاني در بدترین الگو

۵-۳- دیسک پره‌دار با سي‌وشش پره (نامیزاني هم‌زمان در ضریب سختي و استهلاک هر پره)

پاسخ حالت میزان این سیستم مانند شکل (۳) است. بدترین الگوي به‌دست‌آمده از الگوریتم ژنتیک براي وجود نامیزاني در ضریب سختي، در شکل (۱۲) و هم‌چنین بدترین الگوي به‌دست‌آمده براي وجود نامیزاني در ضریب استهلاک پره‌ها، در شکل (۱۳) آورده شده است.

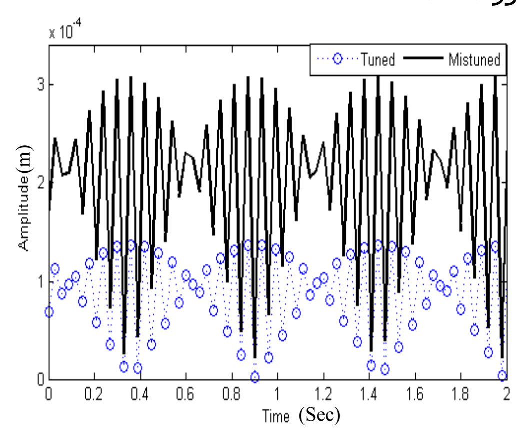


شکل (۱۲): بدترين الگوي به‌دست آمده براي ضريب سختي پره‌ها



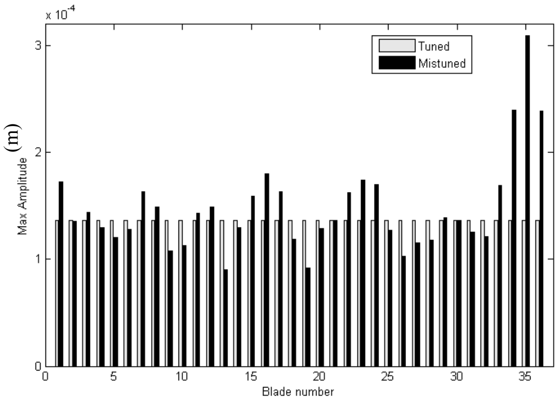
شکل (۱۳): بدترين الگوي به‌دست آمده براي ضريب استهلاک پره‌ها

در شکل (۱۴) پاسخ سيستم در حالت ناميزان براي بدترين الگوي به‌دست‌آمده براي بدترين پره (پره‌اي که داراي دامنه پاسخ بيشينه است، يعني پره سي‌وپنجم) رسم شده‌است. بيشينه پاسخ سيستم ناميزان، براي بدترين پره برابر با $۳/۰۹۲۶\times۱۰^{-۴}$ است. براي مقايسه، پاسخ پره در حالت ميزان نيز آورده شده است.



شکل (۱۴): پاسخ بدترين پره در بدترين الگو در حالت ناميزان

در شکل (۱۵) بيشينه پاسخ سي و شش پره در حالت وجود ناميزاني رسم شده‌است. شکل (۱۵) نشان مي‌دهد وجود ناميزاني در سيستم، مي‌تواند پاسخ را تا ۲/۲۶ برابر افزايش دهد (بيشينه پاسخ سيستم ميزان برابر با $۱/۳۶۸۵\times۱۰^{-۴}$ و بيشينه پاسخ سيستم ناميزان براي بدترين پره برابر با $۳/۰۹۲۶\times۱۰^{-۴}$ است). در ضمن بيشينه دامنه پاسخ، مربوط به پره سي‌وپنجم است.



شکل (۱۵): بيشينه پاسخ سي‌وشش پره در حالت وجود ناميزاني در بدترين الگو

در جدول (۲) جواب‌هاي به‌دست آمده براي هر سيستم و نسبت به‌دست‌آمده براي هر حالت، (که از تقسيم پاسخ سيستم ناميزان به پاسخ سيستم ميزان حاصل‌شده) ارائه شده است. همان‌طور که از نتايج مشخص است، وجود هم‌زمان ناميزاني در سيستم، باعث کاهش اثرات نشده؛ بلکه ناميزاني‌ها، همديگر را تقويت نموده، پاسخ سيستم را افزايش مي‌دهند و منجر به افزايش دامنه پاسخ سيستم مي‌شوند که براي سيستم نامطلوب است.

۶- نتيجه‌گيري

در اين مقاله به بررسي اثر وجود ناميزاني ناشي از ضريب استهلاک و سختي در هر پره پرداخته شد. بدترين الگو به کمک الگوريتم ژنتيک به‌دست‌آمد. پاسخ حالت ميزان و ناميزان سيستم سي‌وشش درجه آزادي با يکديگر مقايسه شد. اين مقايسه، نشان داد که وجود هم‌زمان ناميزاني‌هاي ناشي از سختي و استهلاک در سيستم، نسبت به زماني که فقط يکي از آن‌ها وجود دارد، سبب افزايش در پاسخ سيستم خواهد شد. به عبارت ديگر، ناميزاني‌ها باعث کاهش اثر يکديگر نشده، بلکه همديگر را تقويت نموده و پاسخ سيستم را افزايش مي‌دهند. همان‌طور که از نسبت‌هاي به‌دست‌آمده، پيدا است وجود ناميزاني در سيستم باعث افزايش دامنه پاسخ سيستم مي‌شود. هم‌چنين مشخص شد که تغييري در حدود ۰/۲% در ضريب سختي پره‌ها، مي‌تواند افزايش پاسخي معادل تغيير در حدود ۷۵% در ضريب استهلاک پره‌ها را ايجاد کند. چنين موضوعي،

نشان‌دهنده حساسيت زياد پاسخ سيستم به تغيير در ضريب سختي هر پره است. اين يافته، با نتايج به‌دست‌آمده توسط لين [۱۰] برابري دارد. هم‌چنين در نظرگرفتن هم‌زمان ناميزاني در ضريب سختي و ضريب استهلاک براي سيستم بسيار نامطلوب است؛ زيرا سبب افزايش زيادي در دامنه پاسخ مي‌شود.

جدول (۲): مقايسه نتايج بدست‌آمده براي تمام حالت‌ها

تعداد پره	نوع سيستم	بيشينه پاسخ	نسبت پاسخ سيستم ناميزان به پاسخ سيستم ميزان
۱۰	ميزان	$۷/۹۲۰۶\times۱۰^{-۵}$	-
	ناميزاني در ضريب سختي	$۷/۹۸۰۱\times۱۰^{-۵}$	۱/۰۱
	ناميزاني در ضريب استهلاک	$۸/۳۲۸۵\times۱۰^{-۵}$	۱/۰۵
	ناميزاني در هر دو ضريب	$۹/۳۶۶۶\times۱۰^{-۵}$	۱/۱۸
۱۶	ميزان	$۱/۰۶۴۲\times۱۰^{-۴}$	-
	ناميزاني در ضريب سختي	$۱/۱۷۸۹\times۱۰^{-۴}$	۱/۱۱
	ناميزاني در ضريب استهلاک	$۱/۲۰۲۱\times۱۰^{-۴}$	۱/۱۳
	ناميزاني در هر دو ضريب	$۱/۴۵۲۱\times۱۰^{-۴}$	۱/۳۶
۲۴	ميزان	$۱/۲۵۳۳\times۱۰^{-۴}$	-
	ناميزاني در ضريب سختي	$۱/۴۰۵۱\times۱۰^{-۴}$	۱/۱۲
	ناميزاني در ضريب استهلاک	$۱/۴۴۲۲\times۱۰^{-۴}$	۱/۱۵
	ناميزاني در هر دو ضريب	$۲/۱۵۰۹\times۱۰^{-۴}$	۱/۷۲
۳۶	ميزان	$۱/۳۶۸۵\times۱۰^{-۴}$	-
	ناميزاني در ضريب سختي	$۱/۴۹۴۲\times۱۰^{-۴}$	۱/۰۹
	ناميزاني در ضريب استهلاک	$۱/۸۷۱۲\times۱۰^{-۴}$	۱/۳۷
	ناميزاني در هر دو ضريب	$۳/۰۹۲۶\times۱۰^{-۴}$	۲/۲۶

۷- مراجع

[۱] J.H. Griffin, A. Sinha, "The interaction between mistuning and friction in the forced response of bladed disk assemblies", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 107, pp. 205–211, 1985.

[۲] D.S. Whitehead, "Effects of mistuning on the vibration of turbomachinary blades induced by wakes", J. Mechanical Engineering Science, Vol.8, No. 1, pp. 15–21, 1966.

[۳] D.S. Whitehead, "Effects of Mistuning on Forced Vibration of Blades with Mechanical Coupling", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.18, No. 6, pp. 306-307, 1976.

[۴] R.C.F. Dye, T.A. Henry, "Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies", ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 91, No. 3, pp. 182-188, 1969.

[۵] Wagner, J.T., "Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor", ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 89, No. 4, pp. 502–512, 1967.

[۶] D.J. Ewins, "The effect of detuning upon the forced vibration of bladed disks", J. Sound and Vibration, Vol.9, pp. 65–79, 1969.

[۷] L.E. EL-Bayoumy, A.E. Srinivasan, "Influence of mistuning on rotor blade vibration, AIAA Journal, Vol. 13, No. 4, pp. 460–464, 1975.

[۸] Afolabi, D.H., Vibration of Mistuned Bladed Disc Assembly, PhD Thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicines, University of London, 1982.

[۹] Afolabi, D.H. "Vibration Amplitudes of Mistuned Blades", ASME, Journal of Turbomachinary, Vol. 110, pp. 251–257, 1988.

[۱۰] Lin C.C., Mignolet M.P., "Effects of Damping and Damping Mistuning on the Forced Vibration Response of Bladed Disks", J. Sound Vib. Vol. 193, pp. 525-543, 1996.

[۱۱] Y.J. Chiu, Sh.Ch. Huang, "The influence on coupling vibration of a rotor system due to a mistuned blade length", Journal of Mechanical Sciences, Vol. 49, pp. 522–532, 2007.

[۱۲] Y.J. Yan, P.L. Cui, H.N. Hao, "Vibration mechanism of a mistuned bladed-disk", Journal of Sound and Vibration, Vol. 317, pp. 294–307, 2008.

[۱۳] Y.-J. Chan , D.J. Ewins, "Management of the variability of vibration response levels in mistuned bladed discs using robust design concepts. Part 1 Parameter design", J. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 24, pp. 2777–2791, 2010.

[۱۴] J.H. Griffin, A. Sinha, "The interaction between mistuning and friction in the forced response of bladed disk assemblies", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 107, pp. 205–211, 1985.

[۱۵] J.H. Griffin, "On predicting the resonant response of bladed disk assemblies", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 110, pp. 45–50, 1988.

[۱۶] R.L. Jay, D.W. Burns, "Characteristics of the diametral resonant response of a shrouded fan under a prescribed distortion", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 125–131, 1986.

[۱۷] A. Sinha, S. Chen, "A higher order technique to compute the statistics of forced response of a mistuned bladed disk", Journal of Sound and Vibration, Vol. 130, pp. 207–221, 1989.

[۱۸] A. Sinha, "Calculating the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 24, pp. 1797–1801, 1986.

[۱۹] M.P. Mignolet, C.C. Lin, "The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks", Journal of Turbomachinery, Vol. 115, pp. 771–780, 1993.

[۲۰] C.C. Lin, The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks, M.S. Thesis, Arizona State University, 1991.

[۲۱] Goldberg, D. E., Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison-Weslcy, Reading, MA, 1989.

[۲۲] Davis (Ed.), L., Handbook of Genetic Algorithms, Van Nostrand Reinhold, 1991.

۸- زیرنویس ها

۱ Whitehead
۲ Rolls Royce
۳ NASA
۴ Dye & Henry
۵ Single Mistuning
۶ Alternative Mistuning
۷ Random Mistuning
۸ Wagner
۹ Ewins
۱۰ Han
۱۱ Afolabi
۱۲ Lin
۱۳ Mignolet
۱۴ Chiu
۱۵ Huang
۱۶ Yan
۱۷ Chun
۱۸ Multipoint
۱۹ Multi-nonuniform