روشي براي حل مساله بارگيري پالت توزيع‌كننده با استفاده از برنامه‌ريزي پويا

محمدعلي هاتفي[i]

چكيده

در مساله بارگيري پالت توزيع‌كننده، زيرمجموعه‌اي از مستطيل‌هاي مختلف (جعبه‌ها) با ارزش‌هاي وزني متفاوت كه روي يك فضاي مستطيل‌شكل (پالت) چيده شوند مدنظراست، به‌طوري كه مجموع ارزش وزني جعبه‌هاي چيده شده، بيشينه شود. هم‌چنين براي كاربردي‌تر شدن طرح چيدمان به‌دست‌آمده، در قالب تابع هدف دوم مساله، مدنظر است كه تا جاي ممكن جعبه‌هاي هم‌نوع در كنار يكديگر چيده شوند. مقاله حاضر روشي را براي حل اين مساله ارائه مي‌دهد كه ايده‌اي جديد در به‌كارگيري برنامه‌ريزي پويا است. اين روش شامل كالبدي حلقوي است به‌طوري كه در هر دور از فرايند الگوريتم، بخشي از پالت، چيده مي‌شود. تحليل مقايسه‌اي انجام‌شده نشان مي‌دهد كه روش پيشنهادي، در شرايطي كه زمان حل، مهم‌تر از ارزش وزني چيدمان باشد، در موقعيت بهتري نسبت به‌روش‌هاي موجود قرار دارد. هم‌چنين مثال‌هاي حل شده نشان مي‌دهند كه از نظر چيدمان جعبه‌هاي هم‌نوع در كنار يكديگر، روش پيشنهادي نسبت به‌روش‌هاي موجود، بهتر است.

كلمات كليدي : مسائل برش و چيدمان، مساله بارگيري پالت توزيع‌كننده، برنامه‌ريزي پويا

A Technique for Solving Distributor's Pallet Loading Problem (DPLP), Using Dynamic Programming

M.A. Hatefi

ABSTRACT

The Distributor's Pallet Loading Problem consists of packing a fixed rectangular space (so-called pallet) with a subset of smaller rectangular shapes (so-called pieces) of different dimensions, which have different utility values, in such a way as to maximize the sum of the utility values of the packed pieces. Moreover, as the further objective function; it requires to as possible pack identical pieces as side by side, by means of applicability of the packing patterns. The present paper introduces a technique to solve the problem, in the way that includes a new idea to apply the dynamic programming and, as a matter of the second objective function. In each round of the proposed packing procedure loop, a part of pallet space is packed. The experimental results show that the proposed technique is better than the present methods in the state-of-the art, one the one hand, if solving time were better than packing value, on the other hand, as for packing identical pieces as side by side.

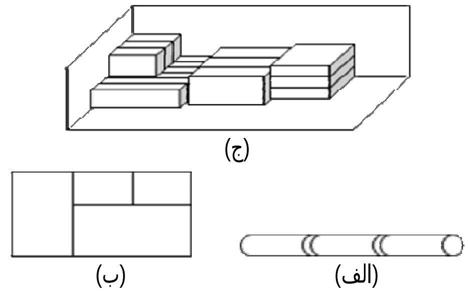
KEY WORDS : Cutting & Packing (C&P) problems, Distributor's Pallet Loading Problem (DPLP), Dynamic programming

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸۸/۱/۲۶
تاريخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۱۲/۲۳

[i] دكتري مهندسي صنايع؛ دانشگاه علم و صنعت، عضو هيئت علمي پژوهشگاه صنعت نفت: Hatefima@yahoo.com.

۱- مقدمه

مسائل برش و چيدمان (C&P)[1] [۷] عبارتند از چيدمان مجموعه‌اي از قطعات در فضاهاي چيدمان با هدف كمينه‌سازي فضاي استفاده‌نشده. به چيدمان به‌دست‌آمده، طرح چيدمان مي‌گويند كه طبق شكل (۱) مي‌تواند مانند برش ميله، يك‌بعدي باشد [۲]، مانند برش تخته شيشه، دوبعدي باشد [۱۷] و يا مانند بارگيري كانتينر، سه‌بعدي باشد [۱۲].

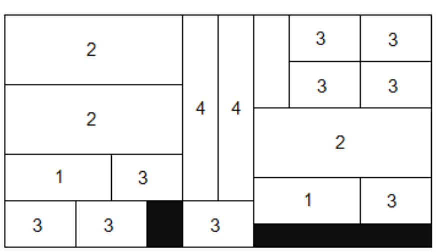


شكل (۱): طرح چيدمان (الف) يك‌بعدي، (ب) دوبعدي و (۳) سه‌بعدي

مقاله حاضر به مسائل بارگيري پالت توزيع‌كننده (DPLP)[2] [۱۰] مربوط است كه در آن مجموعه‌اي از جعبه‌هاي مستطيل‌شكل هم‌ارتفاع و با طول، عرض و ارزش وزني مختلف، روي يك پالت چيده مي‌شود[۵]. از آنجا كه چيدمان جعبه‌ها روي پالت، به‌صورت لايه‌هاي مشابه (هم‌طرح) انجام مي‌شود، بنابراين در عمل اين مساله دوبعدي بوده و شامل چيدمان مجموعه‌اي از قطعات مختلف مستطيل‌شكل در يك فضاي مستطيل‌شكل است؛ به همين علت گاهي به آن، مساله چيدمان مستطيل (RPP)[3] [۱۹] نيز گفته مي‌شود. مشابه اغلب مسائل C&P، DPLP نيز در عمل از نوع مسائل NP و با زمان حل نمايي است [۱۳]. در مبحث الگوسازي DPLP با استفاده مطلق از برنامه‌ريزي رياضي، كارهاي معدودي در ادبيات موضوع وجود دارند كه اغلب متعلق به دهه ۹۰ ميلادي هستند. روش مرجع [۱] در فضاي دكارتي شامل مجموعه‌اي از محدوديت‌هاي جلوگيري از هم‌پوشاني قطعات است. در مرجع [۶]، مولفين، روش مرجع [۱] را مدنظر قرارداده و عيوب آن را مرتفع ساختند. روش مرجع [۱۵] نيز مانند روش مرجع [۱]، بوده و از تعداد كمتري محدوديت استفاده مي‌نمايد. روش مرجع [۱۶] مبني بر مجموعه تركيبات خطي ارائه شده توسط مرجع [٤] بوده كه شامل چيدن مجموعه‌اي از رشته‌هاي هم‌عرض، در كنار هم است. براي الگوسازي و حل DPLP، روش‌هاي ابتكاري مختلفي در سال‌هاي اخير ارائه شده است. در روش مرجع [۱۳]، طرح چيدمان بلوكي متشكل از چهار قطعه به‌عنوان كليد اصلي چيدمان فضا مدنظر قرار گرفته است. در اين روش پس از تعريف بلوك‌هاي چهارتايي، از برنامه‌ريزي رياضي براي توليد طرح نهايي چيدمان، استفاده مي‌شود و بنابراين كيفيت نتايج حل، قابل توجه است. در مرجع [۱۱]، روشي مبني بر الگوريتم ژنتيك براي حل مساله مطرح شده است. همچنين در مرجع [۱۴] نيز از الگوريتم جستجوي تبو براي حل مساله استفاده شده است.

۲- تعريف مساله

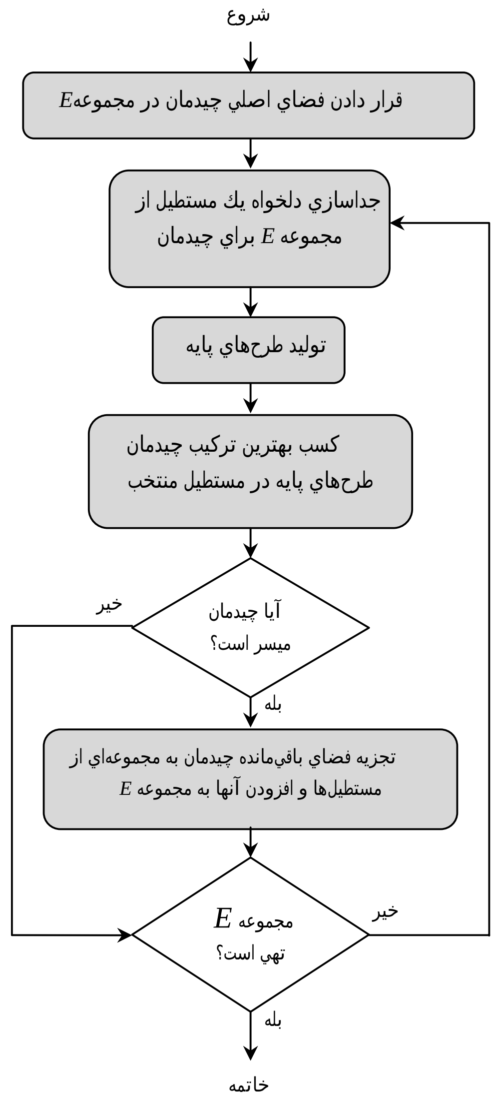
يك فضاي چيدمان مستطيل‌شكل (كه از اين پس آن را پالت مي‌ناميم) به‌طول L و عرض W را درنظر گرفته به‌طوري كه $L \geq W$ باشد. هم‌چنين مجموعه‌اي از انواع قطعات مختلف مستطيل‌شكل (كه از اين پس آنها را جعبه مي‌ناميم) را درنظر گرفته به‌طوري كه جعبه نوع i $(i=1,\dots,m)$ داراي طول l_i، عرض w_i و ارزش وزني v_i است كه در آن $l_i \geq w_i$ است. گفتني است كه ارتفاع جعبه‌ها با هم برابر بوده و اثري در الگوسازي و حل مساله ندارد. هدف اصلي مساله عبارتست از؛ چيدمان هر تعداد از هر نوع جعبه‌اي روي پالت، به‌طوري كه مجموع ارزش وزني جعبه‌هاي چيده‌شده، بيشينه شود. اين مساله دوبعدي است. هم‌چنين، در طرح چيدمان نهايي، ممكن است از يك نوع جعبه چيده نشده يا از يك نوع به‌دفعات چيده شده باشد، به همين دليل مساله از نوع نامحدود[4] است. اين مساله از نوع وزين[5] است يعني هر قطعه يك ارزش وزني دارد كه اين ارزش وزني ممكن است مساحت آن باشد. مساله حاضر، طبق نوع‌شناسي ديكهاف [۷]، با كد $2/B/O/R$ شناخته مي‌شود. هم‌چنين اين مساله بر طبق نوع‌شناسي واشر و همكاران [۱۸]، به‌عنوان يك مساله دوبعدي از نوع قرارگيري در فضاي چيدمان بزرگ (SLOPP)[6] شناخته مي‌شود. يكي از موضوعاتي كه به كاربردي‌تر شدن طرح چيدمان كمك مي‌نمايد، پراكنده نبودن طرح چيدمان است، به اين مفهوم كه بهتر است جعبه‌هاي هم‌نوع در كنار يكديگر چيده شوند. اين موضوع تابع هدف دوم مساله است. در شكل (۲) نمونه‌اي از طرح چيدمان تقريباً غيرپراكنده نشان داده شده است كه در آن قطعات يك، دو و سه به‌طور پراكنده چيده شده‌اند.



شكل (۲): طرح چيدمان تقريباً غيرپراكنده

۳- الگوسازي و حل مساله

مجموعه E، شامل تعدادي فضاي مستطيل‌شكل با ابعاد مختلف را درنظر گرفته به‌طوري كه در مورد هر مستطيل مفروض به‌طول L' و عرض W'، رابطه $L' \geq W'$ برقرار باشد. حل مساله بارگيري پالت توزيع كننده، طي فرايند نشان‌داده‌شده در شكل (۳) انجام مي‌شود.



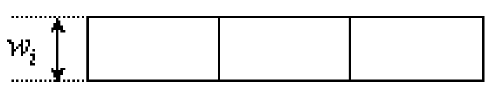
شكل (۳): الگوريتم حل مساله در يك نگاه

بدنه اصلي فرايند حل، شامل سه فاز است: (I) توليد طرح‌هاي چيدمان پايه كه به‌اختصار آنها را طرح پايه مي‌ناميم، (II) چيدن طرح‌هاي پايه در فضايي مستطيل‌شكل و (III) تجزيه فضاي باقي‌مانده چيدمان فاز (II) به مجموعه‌اي از فضاهاي مستطيل‌شكل جديد. همان‌طور كه از شكل (۳) برمي‌آيد، حل مساله شامل فرايندي حلقوي است كه در آن سه فاز گفته‌شده مدام تا توقف فرايند، تكرار مي‌شوند. فرايند حلقوي تا زماني كه هيچ مستطيلي براي چيدمان موجود نباشد تكرار مي‌شود. در فازهاي (I) و (II) از مساله كوله‌پشتي يك‌بعدي و در فاز (III) از برنامه‌ريزي پويا استفاده مي‌شود. در حل مساله كوله‌پشتي، استفاده از اعداد مفيد [۹]، در قالب معادله برنامه‌ريزي پوياي بدون مرحله، پيشنهاد مي‌شود. با درنظرگرفتن رويكرد فوق در الگوسازي مساله، روش حل پيشنهادي، در گروه روش‌هاي تركيبي ابتكاري و برنامه‌ريزي رياضي دسته‌بندي مي‌شود.

۳-۱- فاز (I): توليد طرح‌هاي پايه

در اينجا مجموعه‌اي از طرح‌هاي پايه هم‌جنس[۷]، با طول، عرض و ارزش وزني مشخص، توليد مي‌شوند. منظور از هم‌جنس بودن، اين است كه هر طرح پايه، فقط شامل يك نوع جعبه باشد. در كل، به‌ازاي هر يك از m جعبه، سه نوع طرح پايه توليد مي‌شود. اكنون فرض نماييد قرار است براي چيدمان در فضاي مستطيل‌شكل مفروضي به‌طول L' و عرض W'، يك طرح پايه از جنس قطعه شماره i توليد شود. توضيحات لازم درباره خصوصيات و چگونگي توليد هر يك سه نوع طرح پايه، در ادامه ارائه شده است.

طرح پايه تك‌جهت: در اين طرح پايه، تمام قطعات به‌صورت فقط عمودي و يا فقط افقي در كنار هم چيده مي‌شوند. در شكل (۴)، نمونه‌اي از طرح پايه افقي ديده مي‌شود. طرح پايه عمودي نيز مشابه اين شكل است با اين تفاوت كه در آن، قطعات به‌طور عمودي در كنار هم چيده مي‌شوند.



شكل (۴): طرح پايه تك‌جهت افقي

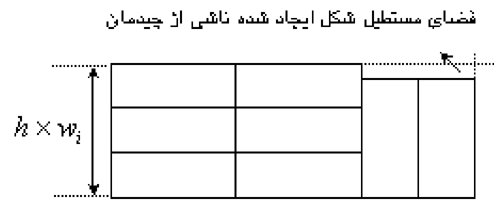
روابط (۱) تا (۳)، طرح پايه تك‌جهت افقي از جنس قطعه i را توليد مي‌نمايند. در اين روابط، y_i عبارتست از تعداد قطعه نوع i كه در طرح پايه، چيده مي‌شود. حل بهينه عبارتست از: $y_i = [L'/l_i]$. بنابراين مي‌توان گفت؛ عرض طرح پايه برابر w_i، طول آن برابر $l_i \times [L'/l_i]$ و ارزش وزني آن، برابر با $v_i \times [L'/l_i]$ خواهد شد. روابط توليد طرح پايه تك‌جهت عمودي نيز مشابه روابط (۱) تا (۳) است با اين تفاوت كه محدوديت (۲) به‌صورت $w_i \times y_i \leq W'$ تغيير مي‌نمايد.

$$Max \quad v_i \times y_i \tag{1}$$

$$St \quad l_i \times y_i \leq L' \tag{2}$$

$$y_i \in Integer \tag{3}$$

طرح پايه دوجهت: در اين نوع، قطعات با دو جهت در كنار هم چيده مي‌شوند كه نمونه آن در شكل (۵) ديده مي‌شود.



شكل (۵): طرح پايه دوجهت

طرح پايه دوجهت، به اين صورت تشكيل مي‌شود كه چند قطعه به‌طور عمودي و چند ستون شامل h قطعه افقي روي هم، به‌طوري چيده مي‌شوند كه عرض فضاي تهي مستطيل‌شكل ايجادشده، طبق شكل (۵)، از عرض قطعه، كمتر شود يعني $h \times w_i - l_i < w_i$. همچنين ارتفاع چيدمان قطعات افقي روي هم نبايد از طول قطعه، كمتر شود يعني $h \times w_i \ge l_i$. در اينجا h متغير تصميم است. در شرايطي كه نسبت l_i / w_i عدد صحيحي نباشد، فضاي تهي مستطيل‌شكل گفته‌شده، پديد مي‌آيد (فضاي خط‌چين در شكل (۵)) كه طبق الگوريتم نهايي پيشنهادي، اين فضا به مجموعه E افزوده مي‌شود. با حل مساله (۴) تا (۸) طرح پايه دوجهت از جنس قطعه i ايجاد مي‌شود. در اين روابط، x_i و y_i عبارتند از تعداد قطعه نوع i كه به‌ترتيب به‌صورت عمودي و افقي در طرح پايه، چيده مي‌شوند. در حل نهايي مساله، عرض طرح پايه، برابر با $h \times w_i$، طول آن برابر با $w_i \times x_i + (l_i / h) \times y_i$ و ارزش وزني آن، معادل $v_i \times (x_i + y_i)$ خواهد شد.

$$Max \quad v_i \times (x_i + y_i) \qquad (٤)$$

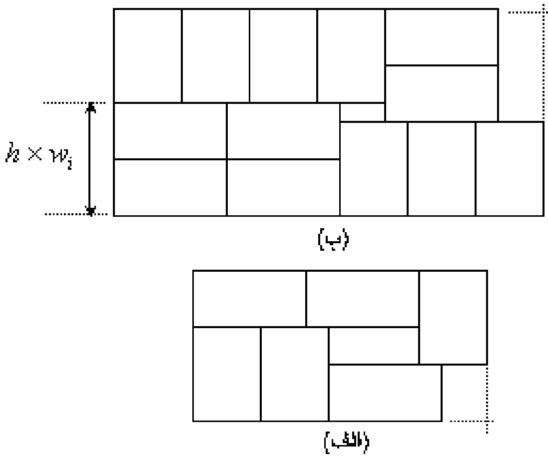
$$St \quad w_i \times x_i + (l_i/h) \times y_i \le L' \qquad (۵)$$

$$(l_i/w_i) \le h \qquad (٦)$$

$$(l_i/w_i) > h - 1 \qquad (۷)$$

$$h,\ x_i,\ y_i \in Integer \qquad (۸)$$

طرح پايه بلوكي: اين نوع طرح پايه برگرفته از رويكرد مرجع [۱۳] است و طبق نمونه‌هاي شكل (٦)، دو نوع دارد. در اين نوع طرح پايه، قطعات به‌شكل بلوك‌هايي يكديگر را پوشش مي‌دهند. عرض اين طرح پايه برابر است با $l_i + h \times w_i$ كه در آن، h مقداري ثابت بوده و عبارتست از تعداد قطعاتي كه در هر ستون، به‌صورت افقي روي هم انباشته مي‌شوند. در طرح پايه بلوكي نوع يك، همواره h برابر با يك است. طرح پايه بلوكي نوع دو به شرطي استفاده مي‌شود كه عبارت l_i / w_i عدد صحيحي نباشد و با اين شرايط، $h = [l_i / w_i] + 1$ خواهد بود. همان‌طور كه در قسمت (ب) از شكل (٦) مشخص است، طرح پايه بلوكي نوع دو، از روي هم قرار گرفتن دو طرح پايه دوجهت به‌دست مي‌آيد.



شكل (٦): طرح پايه بلوكي (الف) نوع يك و (ب) نوع دو

روابط (۹) تا (۱۴)، طرح پايه بلوكي نوع دو از جنس قطعه i را توليد مي‌نمايد. مساله توليدكننده طرح پايه بلوكي نوع يك نيز مشابه همين روابط است با اين تفاوت كه جهت محدوديت‌هاي (۱۲) و (۱۳) معكوس شده، h برابر با يك مي‌شود. در روابط (۹) تا (۱۴)، x_i و y_i به‌ترتيب، تعداد قطعات عمودي و افقي قسمت پاييني طرح پايه و z_i و t_i به‌ترتيب تعداد قطعات عمودي و افقي قسمت بالايي آن هستند. براي مثال، در طرح پايه قسمت (ب) از شكل (٦)، x_i، y_i، z_i و t_i به‌ترتيب برابرند با ۳، ٤، ٤ و ۲. توجه نماييد كه h يك مقدار ثابت است كه براي طرح پايه بلوكي نوع يك برابر با يك و براي طرح پايه بلوكي نوع دو، برابر با $[l_i/w_i]+1$ است. همان‌طور كه در شكل (٦) مشخص است، در ساختار چيدمان طرح پايه بلوكي، دو نوع فضاي تهي مستطيل‌شكل يكي در مركز ساختار و يكي در گوشه آن، ممكن است پديد آيد كه اين موارد به مجموعه E افزوده مي‌شوند.

$$Max \quad v_i \times (x_i + y_i + z_i + t_i) \qquad (۹)$$

$$St \quad w_i \times x_i + (l_i/h) \times y_i \le L' \qquad (۱۰)$$

$$w_i \times z_i + (l_i/h) \times t_i \le L' \qquad (۱۱)$$

$$w_i \times z_i \ge (l_i/h) \times y_i \qquad (۱۲)$$

$$w_i \times x_i \ge (l_i/h) \times t_i \qquad (۱۳)$$

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ t_i \in Integer \qquad (۱٤)$$

۳-۲- فاز (II): چيدمان طرح‌هاي پايه

با داشتن طرح‌هاي پايه توليدشده در فاز (I)، مي‌توان بهترين تركيب چيدمان آنها را در فضاي چيدمان منتخب، به‌دست آورد. اين موضوع به كمك مساله كوله‌پشتي (۱۵) تا (۱۷) امكان‌پذير است كه هدف آن عبارت است از رسيدن به بيش‌ترين ارزش مجموع طرح‌هاي پايه چيده‌شده در فضاي چيدمان منتخب. در مساله كوله‌پشتي، j برابر با ۱، ۲، ۳، ٤ و ٥ به‌ترتيب به طرح‌هاي پايه تك‌جهت عمودي، طرح پايه تك‌جهت افقي، طرح پايه دوجهت، طرح پايه بلوكي نوع يك و طرح پايه بلوكي نوع دو اشاره دارد. در اين روابط، α_{ij} عبارتست از تعداد طرح پايه نوع j از جنس قطعه i كه بايد در فضاي چيدمان منتخب به ابعاد $L'\times W'$، چيده شود و U_{ij} عبارتست از مجموع ارزش وزني قطعات در طرح پايه نوع j از جنس قطعه i. λ_{ij} نيز نشان‌دهنده عرض طرح پايه نوع j از جنس قطعه i است.

$$Max \quad \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\times U_{ij} \qquad (۱۵)$$

$$St \quad \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\times \lambda_{ij} \le W' \qquad (۱٦)$$

$$\forall \alpha_{ij} \ge 0 \quad \& \in \ Integer \qquad (۱۷)$$

پس از تعيين طرح‌هاي پايه برنده در مساله كوله‌پشتي، ترتيب چيدن طرح‌هاي پايه روي هم بايد طوري باشد كه طول طرح‌هاي پايه از پايين به بالا افزايشي نباشد، تا بدين ترتيب يك فضاي خالي پله‌اي در انتهاي فضاي چيدمان به‌وجود آيد.

۳-۳- فاز (III): تجزيه فضاي باقي‌مانده

در اين فاز، فضاهاي خالي ايجادشده ناشي از چيدمان فاز (II)، به مجموعه E افزوده مي‌شوند. در صورتي كه جزو طرح‌هاي پايه برنده در چيدمان فاز (II)، طرح پايه دوجهت يا بلوكي وجود داشته‌باشد، به‌سادگي، فضاهاي تهي مستطيل‌شكل داخل آنها به مجموعه E افزوده مي‌شود.

همان‌طور كه در قسمت قبل، گفته شد، در انتهاي فاز (II)، بعد از چيدن طرح‌هاي پايه روي هم، در انتهاي چيدمان، فضاي پله‌اي‌شكلي ايجاد مي‌شود (طبق شكل (۷)). براي تجزيه اين فضا به مجموعه‌اي از مستطيل‌ها و افزودن به مجموعه E، در اينجا يك الگوريتم برنامه‌ريزي پويا ارائه مي‌شود. شكل (۷) را درنظر بگيريد. فضا پله‌اي روي مرز خطچين‌ها، به مجموعه‌اي از مستطيل‌ها تجزيه مي‌شود. عمل تجزيه، به‌كمك ستون‌ها (C) و سطرهايي (R) است كه تعداد آنها با هم برابر و مساوي با T است. براي مثال در شكل (۷)، T برابر با ٤ است.

اكنون، باتوجه به شكل (۷)، تعاريف زير را درنظر بگيريد:

مرحله: مرحله k عبارتست از برنامه‌ريزي چيدمان براي فضاي شامل ستون ۱ تا ستون k $(k=1,\dots,T)$، بنابراين تعداد مراحل با تعداد ستون‌ها برابر است.

وضعيت: هر وضعيت در مرحله k به‌كمك يك كد رشته‌اي عددي شامل k كاراكتر، مشخص مي‌شود. عدد كاراكتر اول، مشخص مي‌نمايد كه در ستون اول، چيدمان تا چه سطري مدنظر است و عدد كاراكتر دوم مشخص مي‌نمايد كه در ستون دوم، چيدمان تا چه سطري مدنظر است و همين‌طور تا آخر. براي مثال، در مرحله دوم (k برابر با ۲) از شكل (۷)، برنامه‌ريزي براي فضايي با گوشه‌هاي ۱-٦-۲-۱۲-۱۵-۱۸-۱۹-٥-۱، كد "٤۳" را دارد. اگر اجزاي كد رشته‌اي گفته‌شده براي مرحله k را به‌ترتيب با a_1 تا a_k نمايش دهيم، آنگاه روابط (۱۸) و (۱۹) همواره برقرار خواهند بود. به اين ترتيب، در مرحله k، تعداد $T!/(k!\times(T-k)!)$ وضعيت مطرح مي‌شود. وضعيت‌ها را با s نمايش داده و خواهيم داشت: $s=1,\dots,T!/(k!\times(T-k)!)$.

$$\forall a_j \ge k \qquad j=1,\dots,k \qquad (۱۸)$$

$$\forall a_j \ge a_{j+1} \qquad j=1,\dots,k-1 \qquad (۱۹)$$

تصميم: در مرحله k، تصميم‌ها نيز به‌كمك يك كد رشته‌اي عددي شامل k كاراكتر، مشخص مي‌شوند كه از نظر تعريف، به‌طور دقيق مشابه كد رشته‌اي وضعيت‌ها است. تنها تفاوت اين است كه اگر اجزاي كد رشته‌اي تصميم براي مرحله k را به‌ترتيب با b_1 تا b_k نمايش دهيم، آنگاه روابط (۲۰) و(۲۱) همواره برقرار هستند. تعداد تصميم در مرحله k، با عبارت $(T-k+1)\times k$ مشخص مي‌شود. تصميم‌ها را با d نمايش مي‌دهيم. در مرحله k، خواهيم داشت: $d=1,\dots,(T-k+1)\times k$. گفتني است كه در كل مراحل، تعداد $(T/6)\times(T^2+3\times T+2)$ فضاي مستطيل‌شكل، برنامه‌ريزي مي‌شوند.

$$b_j \ge k \quad \text{يا} \quad b_j = 0 \qquad j=1,\dots,k \qquad (۲۰)$$

$$\begin{matrix} b_1=\dots=b_{j-1}=0 & b_j=0 \\ b_{j+1}=\dots=b_k & b_j \ne 0 \end{matrix} \qquad j=1,\dots,k \qquad (۲۱)$$

عايدي: مقدار عايدي در تصميم d در وضعيت s در مرحله k، عبارتست از مجموع ارزش حاصل از چيدمان طرح‌هاي پايه در مستطيل ايجادشده مشترك با ستون شماره d. در اينجا،

مقدار عايدي را با $R(k,s,d)$ نمايش مي‌دهيم.

تابع انتقال وضعيت: در تصميم d در وضعيت s در مرحله k، تابع انتقال وضعيت كه آن را با M نمايش مي‌دهيم به‌صورت رابطه (۲۲) تعريف مي‌شود كه در اينجا كد رشته‌اي مربوط به وضعيت‌هاي مرحله k-1 با كاراكترهاي c_1 تا c_{k-1} نشان داده شده است.

$$\begin{cases} c_j = a_j & b_j = 0 \\ c_j = k-1 & b_j \neq 0 \end{cases} \qquad j = 1,\ldots,k-1 \qquad (۲۲)$$

ارزش وضعيت (تابع هدف): طبق رابطه (۲۳)، به‌ازاي مرحله k و وضعيت s، مقدار تابع هدف عبارتست از بيشينه مجموع عايدي تصميم‌ها به‌علاوه تابع هدف بهينه مرحله قبل به‌ازاي تابع انتقال.

$$F(k,s) = \max\{F(k-1,M) + R(k,s,d)\} \qquad (۲۳)$$

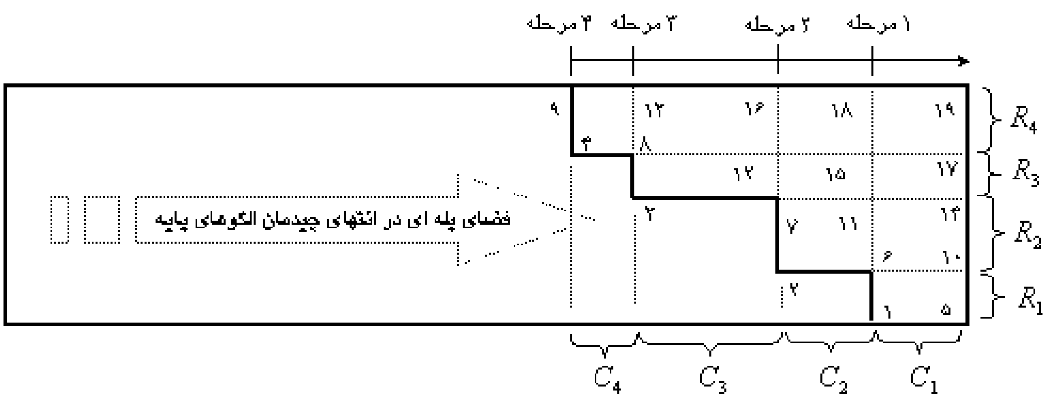
اكنون فرايند برنامه‌ريزي پويا، براي مثال شكل (۷) را درنظر بگيريد. در اين مثال، طبق

جدول (۱)، تعداد مستطيل‌هاي برنامه‌ريزي‌شده، ۲۰ عدد است كه مقادير بهينه ناشي از چيدمان در آنها با U1 تا U20 نشان داده شده است. فرايند برنامه‌ريزي پويا را در

جدول (۲) تا جدول (۵) پي‌گيري نماييد كه در آنها ستون‌ها مبين تصميم و سطرها نشانگر وضعيت هستند. براي نمونه، اگر در جدول (۵) بين چهار تصميم موجود، تصميم سوم بهترين گزينه باشد، در جدول (٤) بين دو تصميم اول و سوم، تصميم اول برتر باشد، در

جدول (۲) تصميم دوم و در

جدول (۱) نيز تصميم چهارم انتخاب خواهند شد. نتيجه اين كه فضاي پله‌اي ايجاد شده در انتهاي شكل (۷)، به مستطيل هاي U4، U7، U11 و U19 تجزيه مي‌شود.



شكل (۷): فضاي پله‌اي ايجادشده پس از چيدمان طرح‌هاي پايه

جدول (۱): مستطيل‌هاي مورد برنامه‌ريزي مثال شكل (۷)

كد تصميم	آدرس گوشه‌هاي مستطيل	مقدار عايدي		كد تصميم	آدرس گوشه‌هاي مستطيل	مقدار عايدي
۱	۱-۵-۱۰-۶-۱	U1		۰۰۳	۳-۷-۱۲-۸-۳	U11
۲	۱-۵-۱۴-۱۱-۱	U2		۰۳۳	۳-۱۱-۱۵-۸-۳	U12
۳	۱-۵-۱۷-۱۵-۱	U3		۳۳۳	۳-۱۴-۱۷-۸-۳	U13
۴	۱-۵-۱۹-۱۸-۱	U4		۰۰۴	۳-۷-۱۶-۱۳-۳	U14
۰۲	۲-۶-۱۱-۷-۲	U5		۰۴۴	۳-۱۱-۱۸-۱۳-۳	U15
۲۲	۲-۱۰-۱۴-۷-۲	U6		۴۴۴	۳-۱۴-۱۹-۱۳-۳	U16
۰۳	۲-۶-۱۵-۱۲-۲	U7		۰۰۰۴	۴-۸-۱۳-۹-۴	U17
۳۳	۲-۱۰-۱۷-۱۲-۲	U8		۰۰۴۴	۴-۱۲-۱۶-۹-۴	U18
۰۴	۲-۶-۱۸-۱۶-۲	U9		۰۴۴۴	۴-۱۵-۱۸-۹-۴	U19
۴۴	۲-۱۰-۱۹-۱۶-۲	U10		۴۴۴۴	۴-۱۷-۱۹-۹-۴	U20

جدول (۲): مرحله ۱ برنامه‌ريزي مثال شكل (۷) (ستون‌ها تصميم و سطرها نشان‌دهنده وضعيت هستند)

ارزش/ وضعيت	۴ / ۴	۳ / ۳	۲ / ۲	۱ / ۱	→ / كد	شماره / ↓
$F(1,1)$	-	-	-	$U1$	۱	۱
$F(1,2)$	-	-	$U2$	-	۲	۲
$F(1,3)$	-	$U3$	-	-	۳	۳
$F(1,4)$	$U4$	-	-	-	۴	۴

جدول (۳): مرحله ۲ برنامه‌ريزي مثال شكل (۷) (ستون‌ها تصميم و سطرها نشان‌دهنده وضعيت هستند)

ارزش/ وضعيت	۶ / ۴۴	۵ / ۳۳	۴ / ۲۲	۳ / ۰۴	۲ / ۰۳	۱ / ۰۲	→ / كد	شماره / ↓
$F(2,1)$	-	-	$U6+F(1,1)$	-	-	$U5+F(1,2)$	۲۲	۱
$F(2,2)$	-	-	-	-	-	$U5+F(1,3)$	۳۲	۲
$F(2,3)$	-	-	-	-	-	$U5+F(1,4)$	۴۲	۳
$F(2,4)$	-	$U8+F(1,1)$	-	-	$U7+F(1,3)$	-	۳۳	۴
$F(2,5)$	-	-	-	-	$U7+F(1,4)$	-	۴۳	۵
$F(2,6)$	$U10+F(1,1)$	-	-	$U9+F(1,4)$	-	-	۴۴	۶

جدول (۴): مرحله ۳ برنامه‌ريزي مثال شكل (۷) (ستون‌ها تصميم و سطرها نشان‌دهنده وضعيت هستند)

ارزش/ وضعيت	۶ / ۴۴۴	۵ / ۳۳۳	۴ / ۰۴۴	۳ / ۰۳۳	۲ / ۰۰۴	۱ / ۰۰۳	→ / كد	شماره / ↓
$F(3,1)$	-	$U13+F(2,1)$	-	$U12+F(2,2)$	-	$U11+F(2,4)$	۳۳۳	۱
$F(3,2)$	-	-	-	$U12+F(2,3)$	-	$U11+F(2,5)$	۴۳۳	۲
$F(3,3)$	-	-	-	-	-	$U11+F(2,6)$	۴۴۳	۳
$F(3,4)$	$U16+F(2,1)$	-	$U15+F(2,3)$	-	$U14+F(2,6)$	-	۴۴۴	۴

جدول (۵): مرحله ۴ برنامه‌ريزي مثال شكل (۷) (ستون‌ها تصميم و سطرها نشان‌دهنده وضعيت هستند)

ارزش/ وضعيت	۴ / ۴۴۴۴	۳ / ۰۴۴۴	۲ / ۰۰۴۴	۱ / ۰۰۰۴	→ / كد	شماره / ↓
$F(4,1)$	$U20+F(3,1)$	$U19+F(3,2)$	$U18+F(3,3)$	$U17+F(3,4)$	۴۴۴۴	۱

۳-٤- روند نهايي حل DPLP

الگوريتم فرايند پيشنهادي شكل (۳)، عبارتست از:

الف) مجموعه E را به‌صورت $E=\{L\times W\}$ تشكيل دهيد.

ب) به‌دلخواه يك مستطيل از مجموعه E انتخاب نموده، L' را برابر طول آن و W' را برابر عرض آن قرار دهيد. اين مستطيل را از مجموعه E حذف نماييد.

ج) در فضاي چيدمان $L'\times W'$، به‌ازاي هر يك از m قطعه، به‌كمك روابط (۱) تا (۱۴)، طرح‌هاي پايه را توليد نماييد.

ه) به‌كمك مساله (۱۵) تا (۱۷)، بهترين تركيب چيدمان طرح‌هاي پايه را به‌دست آوريد.

و) در صورتي كه جزو طرح‌هاي پايه منتخب، طرح پايه دوجهت يا بلوكي وجود دارد، فضاهاي تهي مستطيل‌شكل داخل آنها را به مجموعه E بيافزاييد. هم‌چنين فضاي پله‌اي انتهاي چيدمان را به فضاهاي مستطيل‌شكل تجزيه نماييد و آنها را به مجموعه E بيافزاييد.

ط) اگر مجموعه E تهي است، الگوريتم خاتمه يافته است، در غير اين صورت، به قدم (ب) بازگرديد.

۳-۵- پراكندگي طرح چيدمان

پراكندگي طرح چيدمان به جدا بودن محل چيدمان قطعات مشابه اشاره دارد. ميزان پراكندگي كمتر گوياي كاربردي‌تر بودن طرح چيدمان است. در اينجا به‌سادگي شاخص پراكندگي (DI)[۸] را طبق رابطه (۲۴) تعريف مي‌نماييم.

$$DI=-m+\sum_{i=1}^{m}\theta_i \tag{۲٤}$$

در اين رابطه، θ_i عبارتست از تعداد محل‌هاي تجمع قطعه نوع i در سطح طرح چيدمان. اگر تمام قطعات مشابه در يـك محـل در

کنار هم چیده شده باشند، θ براي آن قطعات برابر با يك خواهد بود و اگر θ براي تمام قطعات برابر با يك باشد، شاخص پراكندگي يعني DI برابر با صفر خواهد شد كه اين بهترين وضعيت است. براي مثال مقدار DI براي طرح چيدمان (الف) شكل (۲)، برابر با ۰ (۴+۴-) و براي براي طرح چيدمان (ب) اين شكل، برابر با ۴ (۱+۳+۲+۲+۴-) است.

در روش پيشنهادي اين مقاله، با توجه به اين كه طرح هاي پايه هم‌جنس توليد و چيده مي‌شوند، انتظار است كه طرح نهايي چيدمان به‌دست‌آمده، داراي مقدار DI ناچيزي باشد.

٤- تجزيه و تحليل

اين قسمت به تجزيه و تحليل روش پيشنهادي مي‌پردازد.

٤-١- مقايسه نتايج

مقاله شامل روشي ابتكاري مبني بر برنامه‌ريزي پويا است، بنابراين انتظار نيست كه جواب بهينه عمومي كسب شود. باتوجه به اين موضوع، در اينجا دو روش ابتكاري با كد 2/B/O/R، از مراجع [۱۳] و [۱۱] براي مقايسه انتخاب شده‌اند. براي مقايسه، دوازده مساله نمونه انتخاب و به‌كمك اين دو روش و روش پيشنهادي اين مقاله، با استفاده از يك كامپيوتر پنتيوم I حل شدند كه نتايج در جدول (۶) آورده شده است. علت انتخاب كامپيوتر سرعت پايين، تفكيك زمان حل مسائل است. همان‌طور كه از نتايج به‌دست‌آمده برمي‌آيد، از لحاظ ارزش چيدمان، روش پيشنهادي نسبت به‌روش مرجع [۱۳] در موارد معدودي، ضعيف‌تر بوده نسبت به‌روش مرجع [۱۱] در اغلب موارد بهتر است. در واقع مي‌توان گفت روش پيشنهادي نسبت به‌روش مرجع [۱۳] كه گرايش بيش‌تري به برنامه‌ريزي رياضي دارد، در ۶۰% موارد (مسائل شماره ۱، ۴، ۶، ۹، ۱۰، ۱۱ و۱۲) به‌طور متوسط داراي ۲۵% كيفيت كم‌تر بوده و در ۲۵% موارد (مسائل شماره ۲، ۵ و۷) به‌طور متوسط داراي ۲۰% كيفيت بهتر است. در مقابل، از نظر زمان حل مساله، روش پيشنهادي در تمام مسائل حل‌شده، زمان حل بسيار كم‌تري نسبت به‌روش مرجع [۱۳] دارد. در مقايسه با روش مرجع [۱۱]، روش پيشنهادي در تمام مسائل، به‌جز مسائل ۵ و ۱۰، ارزش چيدمان بهتري داشته و زمان حل در هر دو روش، بسيار به هم نزديك است. در پايان مي‌توان گفت روش پيشنهادي نسبت به‌روش مرجع [۱۱] داراي برتري نسبي بوده و نسبت به‌روش مرجع [۱۳] نيز در شرايطي كه براي تصميم‌گيرندگان، زمان حل، مهم‌تر از ارزش چيدمان باشد، در موقعيت بهتري قرار دارد.

از سوي ديگر ملاحظه مي‌شود كه در تمام مسائل حل‌شده، طرح‌هاي چيدمان حاصل از روش پيشنهادي شاخص پراكندگي بسيار اندكي دارد، اين در حالي است كه روش‌هاي مراجع [۱۱] و[۱۳] داراي خروجي‌هايي با پراكندگي به‌نسبت بالايي در طرح چيدمان هستند.

٤-٢- پيچيدگي محاسباتي

هسته اصلي روش پيشنهادي، يك الگوريتم برنامه‌ريزي پويا است كه با توجه به تعاريف مراحل، وضعيت‌ها و تصميم‌ها، پيچيدگي زماني محاسبه از درجه $O(n^3)$ است. هم‌چنين، الگوريتم، ماهيتي حلقوي دارد كه در هر تكرار آن به تعداد قطعات ورودي، طرح‌هاي چيدمان پايه توليد مي‌شود، بنابراين پيچيدگي زماني كل الگوريتم در بدترين حالت برابر $O(n^3 \times n)$ يا $O(n^4)$ خواهد شد.

جدول (۶): نتايج حل مسائل نمونه (زمان‌هاي حل، به ثانيه هستند)

مساله	روش مرجع [۱۳]			روش مرجع [۱۱]			روش پيشنهادي		
	زمان حل	تابع هدف	DI	زمان حل	تابع هدف	DI	زمان حل	تابع هدف	DI
۱	۶.۳	۱۴۵۰	۱	۱.۲	۷۵۰	۲	۱.۳	۹۳۶	۰
۲	۴.۵	۲۲۵۰	۲	۲.۰	۱۶۰۰	۳	۲.۰	۲۸۵۰	۱
۳	۷.۲	۱۳۸۰	۲	۰.۲	۹۶۰	۰	۰.۵	۱۳۸۰	۱
۴	۲.۵	۱۴۵۰	۰	۰.۵	۵۰۰	۰	۱.۸	۹۵۰	۰
۵	۷.۵	۵۵۰	۳	۰.۶	۹۳۰	۱	۲.۰	۸۸۰	۰
۶	۹.۳	۲۳۶۵	۱	۰.۹	۱۳۳۰	۲	۰.۱	۲۱۰۰	۰
۷	۴.۶	۸۵۰	۴	۰.۸	۸۵۰	۳	۱.۰	۸۷۵	۲
۸	۵.۶	۱۰۴۰	۳	۰.۶	۸۳۵	۳	۰.۹	۱۰۴۰	۱
۹	۶.۹	۲۲۰۰	۲	۰.۹	۱۲۲۰	۴	۰.۹	۱۷۶۰	۰
۱۰	۶.۶	۹۸۵	۸	۰.۴	۱۱۰۰	۵	۰.۵	۹۶۰	۰
۱۱	۱۰.۲	۱۴۲۰	۴	۱.۲	۸۵۰	۲	۱.۰	۱۱۳۵	۰
۱۲	۶.۶	۱۵۵۰	۶	۰.۳	۶۶۵	۷	۰.۶	۷۰۰	۱
۱۳	۶.۳	۱۴۵۰	۳	۱.۲	۷۵۰	۰	۱.۳	۹۳۶	۰

۵- نتيجه‌گيري

اين مقاله، روشي را براي حل مساله بارگيري پالت توزيع‌كننده ارائه داد كه ايده‌اي جديد در به‌كارگيري برنامه‌ريزي پويا دارد؛ به‌طوري كه در آن مدنظر بود كه علاوه بر بيشينه‌سازي ارزش وزني چيدمان، شاخص پراكندگي طرح چيدمان نيز كمينه شود يعني تا جاي ممكن، جعبه‌هاي هم‌نوع در كنار يكديگر چيده شوند. روش پيشنهادي با روش‌هاي ابتكاري موجود در ادبيات موضوع، مقايسه شد. اين مقايسه نشان داد كه اين روش از نظر مقدار تابع هدف و مدت زمان حل، در يك نقطه تعادلي بين روش‌هاي موجود قرار دارد، يعني اين كه در شرايطي كه براي تصميم‌گيرندگان، زمان حل، مهم‌تر از ارزش چيدمان باشد، روش پيشنهادي در موقعيت بهتري نسبت به‌روش‌هاي موجود، قرار دارد. هم‌چنين شاخص پراكندگي طرح‌هاي چيدمان توليد شده، نسبت به‌روش‌هاي موجود در ادبيات موضوع كمتر بودند. اميد است كه به‌كارگيري روش پيشنهادي اين مقاله، در راه كاهش زمان و هزينه‌هاي توليد و حمل و نقل، براي متخصصين، مفيد باشد.

۶- مراجع

[۱] Beasley, J.E.; "An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure", Operations Research, vol. 33, p.p. 49-64, 1985.

[۲] Cui, Y.; Yang, Y.; "A heuristic for the one-dimensional cutting stock problem with usable leftover", European Journal of Operational Research, vol. 204(2), p.p. 245-250, 2010.

[۳] Bishoff, E.E.; Dowsland, W.B.; "An application of the micro to product design and distribution", Journal of Operational Research Society, vol. 33, p.p. 271-280, 1982.

[۴] Browne, D.J.; "An improved BL lower bound", Information Process Letters, vol. 11, p.p. 37-39, 1980.

[۵] Caprara, A.; Monaci, M.; "On the two-dimensional knapsack problem", Operations Research Letters, vol. 32, p.p. 5–14, 2004.

[۶] Chen, C.S.; Sarin, S.; Ram, B.; "The pallet packing for un-uniform box sizes", International Journal of Production Research, vol. 29, p.p. 1963-1968, 1991.

[۷] Dychoff, H.; "A typology of cutting and packing problems", European Journal of Operational Research, vol. 44, p.p. 145-159, 1990.

[۸] George, J.A.; Rabinson, D.F.; "A heuristic for packing boxes into a container", Computers & Operation Research, vol. 7, p.p. 147-156, 1980.

[۹] Hertz, J.; "A recursive computing procedure for two-dimensional stock-cutting", IBM Journal of Research, vol. 16, p.p. 462-469, 1972.

[۱۰] Glaydston, M.R.; Luiz, A.N.L.; "Lagrangean relaxation with clusters and column generation for the manufacturer's pallet loading problem Generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns by a recursive partitioning algorithm", Computers and Operations Research, vol. 34(9), p.p. 2695-2708, 2007.

[۱۱] Lipnitskij, A.A.; "Use of genetic algorithms for solution of the rectangle-packing problem", Cybernetics and Systems Analysis, vol. 38(6), p.p. 943–946, 2002.

[۱۲] Dereliand, T.; Sena, D.; "A hybrid bee(s) algorithm for solving container loading problems", Applied Soft Computing, vol. 11(2), p.p. 2854–2862, 2011.

[۱۳] Scheithauer, G.; Sommerweiss, U.; "4-Block heuristic for the rectangle-packing problem", European Journal of Operational Research, vol. 108, p.p. 529–526, 1998.

[۱۴] Shigehiro, Y.; Koshiyama, S.; Masuda, T.; "New approach to rectangle packing problem based on stochastic tabu search", Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers, vol. 40(7), p.p. 747-754, 2004.

[۱۵] Tsai, R.D.; Maelstrom, E.M.; Kuo, W.; "Three-dimensional palletization of mixed box sizes", IIE Transactions, vol. 25(4), p.p. 64-75, 1993.

[۱۶] Tsai, R.D.; Maelstrom, E.M.; & Meeks, H.D.; "A two-dimensional palletizing procedure for warehouse loading operations", IIE Transactions, vol. 20, p.p. 418-425, 1998.

[۱۷] Macedo, R.; Alves, C.; Decarvalho, V.; "Arc-flow model for the two-dimensional guillotine cutting stock problem", Computers and Operations Research, vol. 37(6), p.p. 991–1001, 2010.

[۱۸] Wascher, G.; Haubner, H.; Schumann H. "An improved typology of cutting and packing problems", European Journal of Operational Research, vol. 183, p.p. 1109–1130, 2007.

[۱۹] Chen, M.; Huang, W.; "A two-level search algorithm for 2D rectangular packing problem", Computers and Industrial Engineering, vol. 53, p.p. 123–136, 2007.

۷- زيرنويس‌ها

[۱] Cutting & Packing
[۲] Distributor's Pallet Loading Problem
[۳] Rectangle Packing Problem
[٤] Unconstrained
[٥] Weighted
[٦] Single Large Object Placement Problem
[۷] Homogeneous
[۸] Dispersion Index