http://mechanics.journals.modares.ac.ir
مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۱ شماره ۴ زمستان ۱۳۹۰ ص ص ۶۵-۷۳
تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۴/۹
پذیرش ۹۰/۹/۶
ارائه در سایت ۹۰/۱۰/۳۰

تعیین فرکانس‌های طبیعی ورق‌های نسبتا ضخیم اورتوتروپیک با وصله های پیزوالکتریک با استفاده از روش ریتز

شاهرخ حسینی هاشمی[1*]، سمیرا فاضلی[2]، محمد فدایی[3]

۱- استاد دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۳- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
* تهران، صندوق پستی: ۱۶۸۴۶، shh@iust.ac.ir

چکیده- در این پژوهش، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مستطیلی اورتوتروپیک با وصله‌های پیزوالکتریک به‌دست آمده است. شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای سازه فرض شده و برای دستیابی به پارامترهای فرکانسی سازه از روش ریتز بر مبنای روش انرژی پتانسیل کمینه استفاده شده است. توابع جابه‌جایی و تابع پتانسیل الکتریکی با استفاده از سری‌های مثلثاتی تخمین زده شده‌اند. به منظور بررسی دقت روش به‌کار رفته، نتایج عددی مربوط به ورق‌های مستطیلی ایزوتروپیک و پیزوالکتریک به طور جداگانه با نتایج دقیق موجود در مراجع مقایسه شده است. مقایسه‌های مذکور نشان می‌دهد که انطباق خوبی میان نتایج حاصل از مطالعه حاضر با نتایج حل دقیق موجود در منابع وجود دارد. در انتها، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های مستطیلی اورتوتروپیک با دو وصله پیزوالکتریک در بالا و پایین ارائه شده است.

کلیدواژگان: فرکانس طبیعی، ورق اورتوتروپیک، روش ریتز، پیزوالکتریک

Obtaining the natural frequencies of moderately thick orthotropic plates with piezoelectric patches using the Ritz method

Sh. Hosseini-Hashemi[1*], S. Fazeli[2], M. Fadaee[3]

1- Prof. of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
2- MSc student of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
3- PhD student of Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran
*P.O.B. 16846, Tehran, Iran, shh@iust.ac.ir

Abstract- In this study, natural frequencies of rectangular orthotropic plates with piezoelectric patches are obtained. Simply supported boundary conditions are assumed at the plate edges. Ritz approach based on the principle of minimum potential energy is applied to obtain the frequency parameters of rectangular plate. Since displacement fields of the plate are postulated by trigonometric series function, solution is a semi analytical one. For verifying the accuracy of this method, results are for the isotropic and piezoelectric plates are compared with those reported in the literature. As we see a good conformance is derived from the obtained results and the exact solution. Finally, natural frequencies of a rectangular Mindlin plate with surface bounded piezoelectric patches are obtained.

Keywords: Natural Frequency, Mindlin Plate, Ritz Method, Piezoelectric

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از مواد مرکب، به دلیل نیاز صنعت به تولید موادی با ویژگی‌های متنوع که از استحکام بالا، وزن کم، قابلیت انعطاف‌پذیری، عایق‌بودن حرارتی و صوتی و عمر طولانی‌تری نسبت به مواد موجود برخوردار باشند، رشد روزافزونی داشته است. در این میان مواد پیزوالکتریک به عنوان یک نمونه از مواد مرکب در طراحی و ساخت سازه‌های هوشمند مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

قابلیت تبدیل انرژی‌های مکانیکی و الکتریکی به هم یا به عبارتی کوپلینگ الکترومکانیکی، واکنش سریع، دقت بالا، پهنای باند وسیع و پاسخ خوب به هر دو تغییر شکل عمودی و برشی مواد پیزوالکتریک پتانسیل زیادی را در طراحی و ساخت سازه‌های هوشمند موجب شده است[۱و۲]. سازه‌های هوشمند توانایی ذاتی یا اکتسابی برای پاسخگویی به محرک‌های خارجی دارند. در گذشته برای مهار ارتعاشات تنها از سیستم‌های انفعالی مانند سیستم جرم‌ـفنرـدمپر استفاده می‌شد. اما به دلیل دامنه فرکانسی کم، استهلاک ارتعاشات و صدا به صورت انرژی گرمایی و وزن بالای آن‌ها دانشمندان به فکر استفاده از روش‌های دیگری برای کنترل ارتعاشات افتادند.

در روش‌های جدید برای کاهش ارتعاشات و صدا از کنترل فعال ارتعاشات و مواد هوشمند استفاده می‌شود. یک دسته از سازه‌های هوشمند از محرک‌هایی تشکیل شده‌اند که تحت تأثیر میدان الکتریکی از خود جابه‌جایی مکانیکی نشان داده، ایجاد نیرو یا گشتاور می‌کنند. دسته‌ای دیگر از این مجموعه سازه‌ها شامل حسگرهایی‌اند که جابه‌جایی و در نتیجه کرنش و یا دیگر حالات مکانیکی سازه را کشف می‌کنند. نوع سوم که کارایی بیشتری به‌ویژه در کاهش دامنه ارتعاشات دارد هم شامل عملگر[1] و هم شامل حسگرند و به سازه‌های کنترلی[2] معروف‌اند. وقتی لایه‌های مواد پیزوالکتریک به سطح بالایی یا پایینی سازه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با الیاف متصل می‌شوند و یا داخل آن‌ها قرار می‌گیرند، کارایی‌شان می‌تواند به طور مؤثری بهبود یابد. علاوه بر این ترکیب لایه‌های پیزوالکتریک با سازه‌های کامپوزیتی امکان تغییر (تصحیح) پاسخ سازه را از طریق حسگری و عملگری لایه‌های مذکور فراهم می‌آورد[۳و۴].

1. Actuator
2. Controlled Structures

۲- شرح مسئله

با توجه به مطالعات و بررسی‌های انجام‌شده بر روی منابع مختلف توسط نویسندگان، خلاء مراجع مطالعاتی در زمینه ارتعاشات آزاد ورق‌های کامپوزیتی با وصله‌های پیزوالکتریک یا لایه‌های PFRC احساس می‌شود. با توجه به اهمیت مواد پیزوالکتریک به عنوان یک نمونه در حال رشد مواد هوشمند، در این تحقیق ارتعاشات آزاد ورق میندلین با وصله‌های پیزوالکتریک مورد بررسی قرار خواهد گرفت. تاثیر تغییر اندازه وصله‌های پیزوالکتریک به عنوان متغیرهای ورودی مسئله بر روی ارتعاشات آزاد سازه مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

۳- روش حل

۳-۱- تئوری میندلین برای صفحات نیمه‌ضخیم

تئوری کلاسیک ورق‌ها برای ورق‌های نازک دارای دقت کافی است، اما با افزایش ضخامت آنها از دقت نتایج حاصله کاسته می‌شود. میزان خطای ناشی از استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها برای ورق‌های نیمه‌ضخیم از مرتبه توان دوم ضخامت صفحه است. این محدودیت تئوری کلاسیک لزوم ایجاد تئوری دقیق‌تری برای ورق‌ها به منظور دستیابی به رفتار قابل اطمینان‌تر را نشان می‌دهد.

آزمایش‌ها نشان می‌دهد که تئوری کلاسیک کیرشهف[3] میزان جابه‌جایی[4] ورق‌های ضخیم را کمتر و فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش آن‌ها را بیشتر از میزان واقعی تخمین می‌زند. این اختلاف ناشی از درنظر نگرفتن تأثیر کرنش‌های برشی عرضی است. همچنین، در این تئوری فرض می‌شود مقاطع مسطح که قبل از بارگذاری عمود بر صفحه میانی بوده‌اند، پس از بارگذاری و تغییرشکل سازه نیز مسطح و عمود بر این صفحه باقی بمانند که این امر مغایر با واقعیت است.

یکی از معتبرترین تئوری‌ها برای تحلیل ورق‌های نیمه‌ضخیم که بر مبنای جابه‌جایی‌هاست، توسط میندلین مطرح شده است. این تئوری بر اساس تغییر شکل‌های مرتبه اول با استفاده از فرض‌های زیر استوار است [۵]:

$$u_1(x,y,z,t) = z\psi_x(x,y,t)$$
$$u_2(x,y,z,t) = z\psi_y(x,y,t)$$
$$u_3(x,y,z,t) = w(x,y,t) \quad (۱)$$

3. Kirchhoff's Classical Plate Theory
4. Deflection

که ψ_x و ψ_y توابع دوران صفحات میانی‌اند. حال با درنظر گرفتن روابط کرنش–جابه‌جایی به شکل زیر:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad (۲)$$

و استفاده از روابط (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}=-z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\\
\varepsilon_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial z}=-z\frac{\partial \psi_y}{\partial y}\\
\varepsilon_{zz}&=\frac{\partial \omega}{\partial z}=0\\
\varepsilon_{xy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{-1}{2}z\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)\\
\varepsilon_{xz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{-1}{2}\left(\psi_x-\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\\
\varepsilon_{yz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{-1}{2}\left(\psi_y-\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)
\end{aligned} \quad (۳)$$

رابطه تنش و کرنش برای ماده ایزوتروپیک با فرض شرط صفربودن تنش در راستای z به شرح زیر است:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & 0 & 0 & 0\\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & 0 & 0 & 0\\ \bar{C}_{14} & \bar{C}_{24} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{56}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_{11}\\ S_{22}\\ S_{12}\\ S_{13}\\ S_{23}\end{bmatrix} \quad (۴)$$

در وصله‌های پیزوالکتریک عبارت شامل میدان الکتریکی و ماتریس دی‌الکتریک نیز در رابطه تنش و کرنش وارد می‌شود و ماتریس تنش به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{C}}_{11} & \bar{\bar{C}}_{12} & 0 & 0 & 0\\ \bar{\bar{C}}_{12} & \bar{\bar{C}}_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar{\bar{C}}_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{C}}_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\bar{C}}_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}S_{11}\\ S_{22}\\ S_{12}\\ S_{13}\\ S_{23}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{e}_{31}\\ 0 & 0 & \bar{e}_{32}\\ 0 & \bar{e}_{24} & 0\\ \bar{e}_{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{Bmatrix} \quad (۵)$$

که در روابط بالا، $\bar{\bar{C}}_{ij}$ و $\bar{e}_{ij}$ مولفه‌های کاهش یافته ماتریس‌های سختی و دی‌الکتریک‌اند.

۳-۲- روش مینیمم انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل کلی سیستم با Π نشان داده می‌شود. مطابق با اصل همیلتون برای تشخیص مسیر واقعی حرکت یک ذره باید مقدار انرژی پتانسیل کلی سیستم کمینه شود. در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\delta\,\Pi=0 \quad (۶)$$

انرژی پتانسیل کلی با جابه‌جایی واقعی u_1 به پایداری دست پیدا می‌کند. به این ترتیب به ازای جابه‌جایی غیرواقعی u_2 خواهیم داشت: $\delta\,\Pi\neq ۰$.

بنابراین حل دقیق تابع جابه‌جایی با استفاده از یافتن میزان پایداری برای انرژی پتانسیل کلی سیستم به دست خواهد آمد. انرژی پتانسیل ناشی از بار وارده به سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta\Pi=\delta u+\delta v \quad (۷)$$

با درنظر گرفتن اینکه انرژی پتانسیل کلی سیستم تابعی از جابه‌جایی u خواهد بود، داریم

$$\delta\Pi=\frac{d\Pi(u)}{du}\,\delta u=0 \quad (۸)$$

بنابراین به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{\delta\Pi}{du}=0 \quad (۹)$$

از آنجایی که مسیر واقعی حرکت ذره مستلزم پایداری انرژی پتانسیل کلی سیستم است، این اصل به نام اصل پایداری انرژی پتانسیل خوانده می‌شود.

۳-۳- روش ریتز

در کاربردهای مهندسی از اصل مینیمم انرژی پتانسیل به منظور بدست آوردن حل تقریبی مسائلی که حل دقیق آن‌ها مشکل و یا غیرممکن باشد استفاده می‌شود. اما در روش ریتز مسئله اصلی حدس صحیح برای انتخاب تابع صحیح جابه‌جایی است، زیرا این امر می‌تواند منجر به عدم همگرایی یا خطا در جواب‌ها شود.

برای استفاده از روش ریتز، ابتدا باید توابع انرژی پتانسیل و جنبشی را به صورت توابعی از جابه‌جایی در راستای x، y و z به دست آوریم و سپس از تفاضل آن‌ها تابع لاگرانژین را تشکیل دهیم. توابع حدسی باید در شرایط مرزی صدق کنند.

رابطه انرژی کرنشی کل ورق به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$u_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13}\sigma_{13} + 2\sigma_{23}\varepsilon_{23})\, dv \qquad (۱۰)$$

انرژی پتانسیل برابر مجموع انرژی پتانسیل ورق ارتوتروپیک زمینه و وصله‌های پیزوالکتریک بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_S} S^T \sigma dV_S + \frac{1}{2}\int_{V_P} S^T \sigma dV_P - \int_{V_P} E^T D dV_P \qquad (۱۱)$$

که در آن V_s بیانگر حجم ورق ارتوتروپیک بوده و V_P بیانگر حجم وصله‌های پیزوالکتریک است.

با جایگزینی روابط معادل تنش برای ورق ارتوتروپیک و وصله‌های پیزوالکتریک رابطه (۱۱) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}\left[\int_{V_S} S^T C_S S dV_S + \int_{V_P} S^T C^E{}_S S dV_P - \int_{V_P} S^T e^T E dV_P - \int_{V_P} E^T e\, S dV_P - \int_{V_P} E^T \varepsilon^S E dV_P\right] \qquad (۱۲)$$

با قرار دادن مولفه‌های ماتریس C و روابط معادل کرنش در رابطه بالا و پس از تفکیک عناصر مربوط به کرنش ورق ارتوتروپیک و وصله‌های پیزوالکتریک، رابطه مربوط به کرنش ورق ارتوتروپیک به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$U_{\text{structure}} = \frac{1}{2}\int_{V_S} \begin{bmatrix} -z\frac{\partial\psi_x}{\partial x} \\ -z\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \\ -\frac{z}{2}(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{14} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{24} & 0 & 0 \\ \bar{C}_{14} & \bar{C}_{24} & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{56} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{56} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -z\frac{\partial\psi_x}{\partial x} \\ -z\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \\ -\frac{z}{2}(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}) \end{Bmatrix} dV_S \qquad (۱۳)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U_{\text{structure}} = \frac{1}{2}\int_{V_S} \Bigg\{ z^2 \Bigg[& (\frac{\partial\psi_x}{\partial x})^2 \bar{C}_{11} + 2(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\frac{\partial\psi_X}{\partial x})\bar{C}_{12} \\ & + (\frac{\partial\psi_Y}{\partial y})^2 \bar{C}_{22} + \frac{1}{4}(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x})^2 \bar{C}_{44} \\ & + (\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x})(\frac{\partial\psi_x}{\partial x})\bar{C}_{14} \\ & + (\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x})(\frac{\partial\psi_y}{\partial y})\bar{C}_{24} \\ & + \frac{1}{4}(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x})^2 \bar{C}_{55} \Bigg] \\ & + \frac{1}{2}(-\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x})(-\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y})\bar{C}_{56} \\ & + \frac{1}{4}(-\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y})^2 \bar{C}_{66} \Bigg\} dV_s \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با تبدیلات زیر بی بعدسازی انجام می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \qquad (۱۵)$$

در نتیجه روابط بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} U_{\text{structure}} = \frac{1}{2}ab\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} & \Bigg\{ \frac{h^3}{12}\Bigg[\frac{1}{a^2}(\frac{\partial\psi_x}{\partial\xi})^2 \bar{C}_{11} + \frac{2}{ab}\frac{\partial\psi_y}{\partial\eta}\frac{\partial\psi_X}{\partial\xi}\bar{C}_{12} \\ & + \frac{1}{b^2}(\frac{\partial\psi_Y}{\partial\eta})^2 \bar{C}_{22} + \frac{1}{4}(\frac{1}{b}\frac{\partial\psi_x}{\partial\eta} + \frac{1}{a}\frac{\partial\psi_y}{\partial\xi})^2 \bar{C}_{44} \Bigg] \\ & + h\Bigg[\frac{1}{4}(-\psi_x + \frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\xi})^2 \bar{C}_{55} \\ & + \frac{1}{4}(-\psi_y + \frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial\eta})^2 \bar{C}_{66} \Bigg] \Bigg\} d\eta\, d\xi \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

رابطه (۱۶) بیانگر انرژی کرنشی برای ورق ارتوتروپیک است. به این ترتیب با استفاده از روش مشابه برای وصله‌های پیزوالکتریک خواهیم داشت:

$$U_{\text{piezoelectric}} = \frac{1}{2}\left[\int_{V_P} S^T \sigma\, dV_P - \int_{V_P} E^T D\, dV_P\right] \qquad (۱۷)$$

و بنابراین:

$$U_{\text{piezoelectric}} = \frac{1}{2}\left[\int_{V_P} S^T C^E{}_S S dV_P - \int_{V_P} S^T e^T E dV_P - \int_{V_P} E^T e\, S dV_P - \int_{V_P} E^T \varepsilon^S E dV_P\right] \qquad (۱۸)$$

معادله (۱۸) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
U_{\text{piezoelectric}} = \frac{1}{2}\Bigg\{ & \int_{V_p}\Bigg\{ z^2\Bigg[(\frac{\partial\psi_x}{\partial x})^2\bar{\bar{C}}_{11} + 2\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\frac{\partial\psi_X}{\partial x}\bar{\bar{C}}_{12} \\
& +(\frac{\partial\psi_Y}{\partial y})^2\bar{\bar{C}}_{22} + \frac{1}{4}(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x})^2\bar{\bar{C}}_{44}\Bigg] \\
& +\frac{1}{4}(-\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x})^2\bar{\bar{C}}_{55} + \frac{1}{4}(-\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y})^2\bar{\bar{C}}_{66}\Bigg\} dV_p \\
& -\int_{V_p}\begin{bmatrix} -z\frac{\partial\psi_x}{\partial x} \\ -z\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \\ -\frac{z}{2}(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{Bmatrix} dV_P \\
& -\int_{Vp}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & \bar{e}_{24} & 0 \\ \bar{e}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -z\frac{\partial\psi_x}{\partial x} \\ -z\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \\ -\frac{z}{2}(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(-\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}) \end{bmatrix} dV_S \\
& -\int_{V_S}\int_{Vp}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_3 \end{bmatrix} dV_p\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (۱۹)
$$

با تبدیلات زیر بی‌بعدسازی انجام می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad E = \frac{-\varphi}{\bar{h}} \qquad (۲۰)$$

بنابراین انرژی کرنشی وصله‌های پیزوالکتریک به صورت رابطه (۲۱) به‌دست می‌آید. رابطه (۲۱) بیانگر انرژی کرنشی وصله‌های پیزوالکتریک بوده و زیرنویس‌های ۱ و ۲ بیانگر جملات مربوط به وصله‌های پیزوالکتریک واقع در بالا و پایین ورق هستند.

به منظور ادامه روند حل مسئله، لازم است که انرژی جنبشی نیز محاسبه شود. با فرض اینکه u، v و w جابه‌جایی در راستای x، y و z باشد، برای انرژی جنبشی ورق ارتوتروپیک رابطه (۲۲) را داریم.

$$
\begin{aligned}
U_{\text{piezo}} = & \frac{1}{6}ab[h_1^3-(h/2)^3]\times \\
& \int_{-\frac{b_1}{2b}}^{\frac{b_1}{2b}}\int_{\frac{1}{2}-\frac{a_1}{2a}}^{\frac{1}{2}+\frac{a_1}{2a}}\Bigg(\frac{1}{a^2}(\frac{\partial\psi_x}{\partial\xi})^2\bar{\bar{C}}_{11} + \frac{2}{ab}\frac{\partial\psi_y}{\partial\eta}\frac{\partial\psi_X}{\partial\xi}\bar{\bar{C}}_{12} \\
& +\frac{1}{b^2}(\frac{\partial\psi_Y}{\partial\eta})^2\bar{\bar{C}}_{22} + \frac{1}{4}(\frac{1}{b}\frac{\partial\psi_x}{\partial\eta}+\frac{1}{a}\frac{\partial\psi_y}{\partial\xi})^2\bar{\bar{C}}_{44}\Bigg)d\eta d\xi \\
& +\frac{1}{6}ab[h_2^3+(h/2)^3]\times \\
& \int_1^{\frac{b_2}{b}}\int_1^{\frac{a_2}{a}}\Bigg(\frac{1}{a^2}(\frac{\partial\psi_x}{\partial\xi})^2\bar{\bar{C}}_{11} + \frac{2}{ab}\frac{\partial\psi_y}{\partial\eta}\frac{\partial\psi_X}{\partial\xi}\bar{\bar{C}}_{12} \\
& +\frac{1}{b^2}(\frac{\partial\psi_Y}{\partial\eta})^2\bar{\bar{C}}_{22} + \frac{1}{4}(\frac{1}{b}\frac{\partial\psi_x}{\partial\eta}+\frac{1}{a}\frac{\partial\psi_y}{\partial\xi})^2\bar{\bar{C}}_{44}\Bigg)d\eta d\xi \\
& +\frac{1}{8}ab(h_1-h/2)\times \\
& \int_1^{\frac{b_1}{b}}\int_1^{\frac{a_1}{a}}\Bigg((-\psi_x+\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\xi})^2\bar{\bar{C}}_{55} + (-\psi_y+\frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial\eta})^2\bar{\bar{C}}_{66}\Bigg)d\eta d\xi \\
& +\frac{1}{4}ab(h_2+h/2)\times \\
& \int_1^{\frac{b_2}{b}}\int_1^{\frac{a_2}{a}}\Bigg((-\psi_x+\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\xi})^2\bar{\bar{C}}_{55} + (-\psi_y+\frac{1}{b}\frac{\partial w}{\partial\eta})^2\bar{\bar{C}}_{66}\Bigg)d\eta d\xi \\
& -\frac{1}{2}ab(h_1-h/2)\times \\
& \int_{\frac{b_1}{b}}^{\frac{b}{b}}\int_{\frac{a_1}{a}}^{\frac{a}{a}}\Bigg((h_1+h/2)(\frac{1}{a}\frac{\partial\psi_x}{\partial\xi}\bar{e}_{31} + \frac{1}{b}\frac{\partial\psi_y}{\partial\eta}\bar{e}_{32})\frac{\varphi}{\bar{h}} + \bar{\varepsilon}_{33}\frac{\varphi^2}{\bar{h}^2}\Bigg)d\eta d\xi \\
& -\frac{1}{2}ab(h_2+h/2)\times \\
& \int_{\frac{b_2}{b}}^{\frac{b}{b}}\int_{\frac{a_2}{a}}^{\frac{a}{a}}\Bigg((h_2-h/2)(\frac{1}{a}\frac{\partial\psi_x}{\partial\xi}\bar{e}_{31} + \frac{1}{b}\frac{\partial\psi_y}{\partial\eta}\bar{e}_{32})\frac{\varphi}{\bar{h}} + \bar{\varepsilon}_{33}\frac{\varphi^2}{\bar{h}^2}\Bigg)d\eta d\xi
\end{aligned}
\qquad (۲۱)
$$

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_v(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)dv \qquad (۲۲)$$

که $\bar{u}$، $\bar{v}$ و $\bar{w}$ مشتق نسبت به زمان توابع جابه‌جایی‌اند. در صورتی که مولفه‌های بردار جابه‌جایی را برای ارتعاشات به صورت زیر در نظر بگیریم (ترم وابسته به زمان را به صورت یک تابع یکسان برای جابه‌جایی در همه راستاها فرض کنیم)، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
u &= -z\psi_x(x,y)g(t) \\
v &= -z\psi_y(x,y)g(t) \\
w &= w(x,y)g(t)
\end{aligned}
\qquad (۲۳)
$$

انرژی جنبشی کل سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T=\frac{1}{2}\rho_s\int_{v_s}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)dv_s+\frac{1}{2}\rho_p\int_{v_p}(\bar{u}^2+\bar{v}^2+\bar{w}^2)dv_p \tag{۲۴}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به z خواهیم داشت:

$$T=\frac{1}{2}ab\rho\int_0^1\int_0^1\left[w^2+\frac{1}{12}h^2\left(\psi_x^2+\psi_y^2\right)\right]d\xi d\eta \tag{۲۵}$$

با قراردادن تابع زمانی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$g(t)=\sin(\omega t+\psi) \tag{۲۶}$$

و

$$\bar{g}(t)=\frac{dg(t)}{dt}=\omega\cos(\omega t+\psi) \tag{۲۷}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\bar{u}&=-z\psi_x\bar{g}(t)=-z\psi_x\omega\cos(\varpi t+\psi)\\ \bar{v}&=-z\psi_y\bar{g}(t)=-z\psi_y\omega\cos(\varpi t+\psi)\\ \bar{w}&=w\overline{g(t)}=w\omega\cos(\omega t+\psi)\end{aligned} \tag{۲۸}$$

برای اینکه عبارت انرژی جنبشی ماکزیمم شود شرط زیر باید برقرار باشد. در نتیجه عبارت انرژی جنبشی ماکزیمم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{T}_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2\{\int_{vs}\rho_s(z^2(\psi_x^2+\psi_y^2)+w^2)dv_s+\sum_{i=1}^{2}\int_{vp}\rho_p(z^2(\psi_x^2+\psi_y^2)+w^2)dv_{pi}\} \tag{۲۹}$$

که ω فرکانس زاویه‌ای ارتعاش و ρ چگالی ماده است. با استفاده از بی‌بعد سازی، رابطه (۲۹) چنین نوشته می‌شود:

$$\mathrm{T}_{\max}=\frac{1}{2}\omega^2ab\left\{\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\rho_s\left[(\psi_x^2+\psi_y^2)(h^3/12)+w^2h\right]d\xi d\eta+\sum_{i=1}^{2}\int_{1}^{\frac{a_i}{a}}\int_{1}^{\frac{b_i}{b}}\rho_p\left[(\psi_x^2+\psi_y^2)(h_i^3-(h/2)^3)/3+w^2(h_i-h/2)\right]d\xi d\eta\right\} \tag{۳۰}$$

که b,a,h به ترتیب ابعاد ورق و b_i,a_i,h_i ابعاد وصله‌های پیزوالکتریک در راستای y, x, z می‌باشند. اکنون باید به منظور استفاده از روش ریتز توابع جابه‌جایی یعنی ψ_y,ψ_x,w را حدس بزنیم و توابع حدسی حاصل را در معادلات انرژی جنبشی و پتانسیل قرار داده از تابع انرژی پتانسیل کلی سیستم نسبت به ثوابت توابع جابه‌جایی مشتق بگیریم. بدیهی است که طبق اصل مینیمم انرژی پتانسیل یا اصل پایداری برای پایداربودن سیستم و دستیابی به تابع جابه‌جایی واقعی باید این مشتقات برابر صفر باشند.

برای شرط مرزی SSSS (چهار طرف تکیه‌گاه ساده)، پاسخ مسئله ارتعاشی فوق به شکل زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned}\psi_x&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}A_{ij}\cos(i\pi\xi)\sin(j\pi\eta)\\ \psi_y&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}B_{ij}\sin(i\pi\xi)\cos(j\pi\eta)\\ W&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}C_{ij}\sin(i\pi\xi)\sin(j\pi\eta)\\ \Phi&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{J=1}^{N}D_{ij}\sin(i\pi\xi)\cos(j\pi\eta)\end{aligned} \tag{۳۱}$$

که A_{ij}، B_{ij}، C_{ij} و D_{ij} ثوابتی‌اند که مقدار آن‌ها با استفاده از روش انرژی ریتز به‌دست می‌آید. برای راحتی کار تبدیل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$m=(i\text{-}1)\,N+j \tag{۳۲}$$

به این ترتیب روابط (۳۱) به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}\psi_x&=\sum_{m=1}^{NN}A_m\bar{\psi}_{xm}\\ \psi_y&=\sum_{m=1}^{NN}B_m\bar{\psi}_{ym}\\ W&=\sum_{i=m}^{NN}C_m\bar{w}_m\\ \Phi&=\sum_{i=m}^{NN}D_{im}\bar{\Phi}_m\end{aligned} \tag{۳۳}$$

با صفر فرض کردن هر مشتق جزئی انرژی پتانسیل کل داریم:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial A_{ij}}=0,\quad\frac{\partial\Pi}{\partial B_{ij}}=0,\quad\frac{\partial\Pi}{\partial C_{ij}}=0,\quad\frac{\partial\Pi}{\partial D_{ij}}=0 \tag{۳۴}$$

با اعمال روابط (۳۴) معادله مقدار مشخصه زیر به‌دست می‌آید.

$$([\mathrm{K}]\text{-}\omega^2[\mathrm{M}])\begin{bmatrix}\{A\}\\\{B\}\\\{C\}\\\{D\}\end{bmatrix}=\{0\} \tag{۳۵}$$

بدین ترتیب از رابطه بالا مقدار ω به‌دست می‌آید [۶]. ماتریس‌های ثوابت A، B، C و D به شرح زیر می‌باشد:

$$\{A\}=\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\A_m\end{Bmatrix},\ \{B\}=\begin{Bmatrix}B_1\\B_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\B_m\end{Bmatrix},\ \{C\}=\begin{Bmatrix}C_1\\C_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\C_m\end{Bmatrix},\ \{D\}=\begin{Bmatrix}D_1\\D_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\D_m\end{Bmatrix} \tag{۳۶}$$

با تعریف ماتریس‌های سختی و جرم به شکل زیر خواهیم داشت:

$$[M]=\begin{bmatrix}[M_{AA}] & [M_{AB}] & [M_{AW}] & [M_{AC}]\\ [M_{BA}] & [M_{BB}] & [M_{BW}] & [M_{BC}]\\ [M_{WA}] & [M_{WB}] & [M_{WW}] & [M_{WC}]\\ [M_{CA}] & [M_{CB}] & [M_{CW}] & [M_{CC}]\end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

مولفه‌های ماتریس‌های K و M به شرح زیر است.

$$\begin{aligned}K_{AAij}&=\frac{ab}{2}\{\frac{1}{3}h^3[\int_{\bar{A}}\frac{2\bar{C}_{11}}{a^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_{xj}}{\partial\xi}d\bar{A}\\&+\frac{2\bar{C}_{44}}{4b^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{\psi}_{xj}}{\partial\eta}]+h\frac{2\bar{C}_{55}}{4}[\int_{\bar{A}}\bar{\psi}_{xj}\bar{\psi}_{xi}d\bar{A}]\\&+\frac{1}{3}(h_i^3-h_{i-1}^3)[\int_{\bar{\bar{A}}}\frac{2\bar{\bar{C}}_{11}}{a^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_{xj}}{\partial\xi}d\bar{\bar{A}}\\&+\frac{2\bar{\bar{C}}_{44}}{4b^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{\psi}_{xj}}{\partial\eta}]+h\frac{2\bar{\bar{C}}_{55}}{4}[\int_{\bar{\bar{A}}}\bar{\psi}_{xj}\bar{\psi}_{xi}d\bar{\bar{A}}]\}\end{aligned} \tag{۳۸}$$

$$\begin{aligned}K_{ABij}&=\frac{ab}{2}\frac{h_x^3}{3}\int_{\bar{A}}(\frac{2\bar{C}_{12}}{ab}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_{yj}}{\partial\eta}d\bar{A}\\&+\frac{2\bar{C}_{44}}{4ab}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{\psi}_{xj}}{\partial\xi})dA+\frac{ab}{2}\frac{(h_i^3-h_{i-1}^3)}{3}\\&\int_{\bar{\bar{A}}}(\frac{2\bar{\bar{C}}_{12}}{ab}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_{yj}}{\partial\eta}d\bar{\bar{A}}\frac{\partial\bar{\psi}_{xj}}{\partial\xi})d\bar{\bar{A}}+\frac{2\bar{\bar{C}}_{44}}{4ab}\frac{\partial\bar{\psi}_{xi}}{\partial\eta}\end{aligned} \tag{۳۹}$$

$$\begin{aligned}K_{AWij}&=\frac{ab}{2}h\int_{\bar{A}}(\frac{-2\bar{C}_{55}}{4a}\bar{\psi}_{xi}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\xi}d\bar{A}+\dots\\&\frac{ab}{2}(h_i-h_j)\int_{\bar{\bar{A}}}(\frac{-2\bar{\bar{C}}_{55}}{4a}\bar{\psi}_{xi}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\xi}d\bar{\bar{A}}\end{aligned} \tag{۴۰}$$

$$\begin{aligned}K_{BBij}&=\frac{ab}{2}\{\frac{h_x^3}{3}[\int_{\bar{A}}\frac{2\bar{C}_{22}}{b^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{yi}}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{\psi}_{yj}}{\partial\eta}d\bar{A}\\&+\frac{2\bar{C}_{44}}{4a^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{yi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_{yj}}{\partial\xi}]\\&+h_i\frac{2\bar{C}_{66}}{4}[\int_{\bar{A}}\bar{\psi}_{yj}\bar{\psi}_{yi}d\bar{A}]+\frac{(h_i^3-h_{i-1}^3)}{3}\\&[\int_{\bar{\bar{A}}}\frac{2\bar{\bar{C}}_{22}}{b^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{yi}}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{\psi}_{xj}}{\partial\eta}d\bar{\bar{A}}+\frac{2\bar{\bar{C}}_{44}}{4b^2}\frac{\partial\bar{\psi}_{yi}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{\psi}_{yj}}{\partial\xi}]\\&h_i\frac{2\bar{\bar{C}}_{66}}{4}[\int_{\bar{\bar{A}}}\bar{\psi}_{yj}\bar{\psi}_{yi}d\bar{\bar{A}}]\}\end{aligned} \tag{۴۱}$$

$$\begin{aligned}K_{BWij}&=\frac{ab}{2}h\int_{\bar{A}}(\frac{-2\bar{C}_{66}}{4b}\bar{\psi}_{yi}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\eta}d\bar{A}+\frac{ab}{2}(h_i-h_j)\\&\int_{\bar{\bar{A}}}(\frac{-2\bar{C}_{66}}{4b}\times\bar{\psi}_{yi}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\eta}d\bar{\bar{A}}]\end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$\begin{aligned}K_{WWij}&=\frac{ab}{2}h\,[\int_{\bar{A}}\frac{\bar{C}_{66}}{4b^2}\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\eta}d\bar{A}\\&+\int_{\bar{A}}\frac{\bar{C}_{55}}{4a^2}\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\xi}d\bar{A}]\\&+\frac{ab}{2}(h_i-h_j)\,[\int_{\bar{\bar{A}}}(\frac{\bar{\bar{C}}_{66}}{4b^2}\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial\eta}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\eta}d\bar{\bar{A}}\\&+\int_{\bar{\bar{A}}}\frac{\bar{\bar{C}}_{55}}{4a^2}\frac{\partial\bar{w}_i}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{w}_j}{\partial\xi}d\bar{\bar{A}}]\end{aligned} \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned}M_{AAij}&=ab\int_{\bar{A}}(\frac{\rho_s h^3}{12}\bar{\psi}_{xi}\bar{\psi}_{xj}d\bar{A}+ab\,(h_i^3-h_j^3)\\&\times\int_{\bar{\bar{A}}}(\frac{\rho_p(h_i^3-h^3{}_j)}{3}\bar{\psi}_{xi}\bar{\psi}_{xj}d\bar{\bar{A}}\end{aligned} \tag{۴۴}$$

$$\begin{aligned}M_{BBij}&=ab\int_{\bar{A}}(\frac{\rho_s h^3}{12}\bar{\psi}_{xi}\bar{\psi}_{xj}d\bar{A}+ab(h_i^3-h_j^3)\\&\times\int_{\bar{\bar{A}}}(\frac{\rho_p(h_i^3-h^3{}_j)}{3}\bar{\psi}_{xi}\bar{\psi}_{xj}d\bar{\bar{A}}\end{aligned} \tag{۴۵}$$

$$\begin{aligned}M_{WWij}&=ab\int_{\bar{\bar{A}}}(\rho_s h\,\bar{w}_i\bar{w}_j d\bar{A}+\rho_p(h_i-h_j)\\&\times\int_{\bar{\bar{A}}}\rho_p(h_i-h_j)\bar{w}_i\bar{w}_j d\bar{\bar{A}}]\end{aligned} \tag{۴۶}$$

$i,j=1:N^2$

در روابط بالا N تعداد جملات سری است.

بدین ترتیب پس از به‌دست آوردن مقادیر مختلف ω، با حل معادله مقدار مشخصه مقادیر A_1 تا A_m و B_1 تا B_m، C_1 تا C_m و D_1 تا D_m به دست می‌آید.

۴- نتایج عددی

بدین ترتیب پس از به دست آوردن مقادیر مختلف ω، با حل معادله مقدار مشخصه مقادیر A_1 تا A_m و B_1 تا B_m، W_1 تا

W_m و C_1 تا C_m به‌دست می آید. به دلیل اینکه در مراجع حل دقیق مسئله مورد نظر موجود نبوده، به منظور بررسی دقت متدلوژی به‌کار گرفته شده، در ابتدا مسئله را برای ورق مستطیلی ایزوتروپیک و ورق کاملا پیزوالکتریک حل کرده و با نتایج موجود در مراجع مقایسه می‌کنیم.

۴-۱- مقایسه نتایج حاصل از روش ریتز با نتایج موجود در مراجع

ورق ایزوتروپیک با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده:

نتایج زیر برای ورق ایزوتروپیک با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده به‌دست آمده و با نتایج حاصل از حل دقیق موجود در مرجع شماره [۷] مقایسه شده است. در این حالت ω فرکانس طبیعی بدون بعد معادل عبارت زیر است:

$$\beta = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

جدول ۱ فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ورق مستطیلی ایزوتروپیک با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و نسبت ضخامت به طول ۰/۱

روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم
ریتز	۱۹/۶۴۰۷	۳۸/۶۴۸۹	۵۵/۸۶۳۶	۶۶/۴۵۴۹
مرجع [۷]	۱۹/۵۰۵۵	۳۸/۳۸۴۷	۵۵/۵۸۶	۶۵/۷۱۹۳
اختلاف (درصد)	۰/۶۹	۰/۶۸	۰/۵	۱/۱

جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ورق مستطیلی ایزوتروپیک با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱

روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم
روش ریتز	۱۹/۷۹۲۹	۴۹/۳۷۲۳	۷۸/۹۸۷۶	۹۸/۷۶۶۸
مرجع [۷]	۱۹/۷۳۲۲	۴۹/۳۰۴۵	۷۸/۸۴۵۵	۹۸/۵۲۲۲
اختلاف (درصد)	۰/۳	۰/۱۳	۰/۱۸	۰/۲۴

ورق پیزوالکتریک با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده:

در این حالت ω فرکانس طبیعی بدون بعد معادل عبارت زیر است[۸]:

$$\beta = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}}$$

جدول ۳ فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ورق مستطیلی پیزوالکتریک با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و نسبت ضخامت به طول ۰/۱

روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم
روش ریتز	۰/۵۰۷۷	۱/۳۱۹۹	۱/۸۳۷	۲/۲۲۲۲
مرجع [۸]	۰/۴۹۶۹	۱/۲۸۶	۱/۸۲۱	۲/۲۲۱۱
اختلاف (درصد)	۲/۱	۲/۶۳	۰/۹۳	۰/۰۵

جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی بدون بعد ورق مستطیلی پیزوالکتریک با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده و نسبت ضخامت به طول ۰/۰۱

روش	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم
روش ریتز	۰/۰۶۱۳	۰/۱۲۹۳	۰/۲۰۹۶	۰/۲۶۱۴
مرجع [۸]	۰/۰۶۱۴	۰/۱۲۸۷	۰/۲۰۵۶	۰/۲۵۷۲
اختلاف (درصد)	۰/۲	۰/۴	۱/۴۴	۱/۶۳

بررسی دقت داده‌ها:

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نتایج با دقت بالایی با نتایج موجود در مراجع [۷] و [۸] انطباق دارد. در نتیجه فرمولاسیون کلی مسئله برای ورق ایزوتروپیک و ورق تمام پیزوالکتریک قابل قبول است.

همان‌گونه که از جدول‌های بالا پیداست، با کاهش نسبت طول به ارتفاع ورق (ضخیم‌تر شدن ورق)، خطای حاصله بیشتر می‌شود که این امر به دلیل نزدیک‌شدن ورق به حالت ضخیم (نسبت ضخامت به طول ۰/۱) است.

۴-۲- حل عددی ارتعاشات آزاد سازه مورد نظر

در این قسمت، نتایج عددی مرتبط با ارتعاشات آزاد سازه مورد نظر که متشکل از یک ورق ایزوتروپیک به‌همراه دو وصله پیزوالکتریک به طور متقارن در بالا و پایین می‌باشد، ارائه شده است. در این حالت نسبت A/a بیانگر نسبت طول وصله‌های پیزوالکتریک به طول ورق ایزوتروپیک است.

همان‌طور که از جدول‌ها پیداست، با افزایش ابعاد وصله‌های پیزوالکتریک، فرکانس‌های طبیعی مجموعه افزایش می‌یابد که این امر تاثیر اثر پیزوالکتریک در کاهش ارتعاشات مجموعه را نشان می‌دهد.

جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی سازه در حالت چهار طرف تکیه‌گاه ساده

مود چهارم	مود سوم	مود دوم	مود اول	A/a
۱۰۰۴/۶	۷۸۳/۲	۶۶۲/۹۴	۴۵۸/۳۲	۰/۴
۱۰۵۸/۵	۸۴۵/۸	۷۷۸/۱	۴۷۰/۶۵	۰/۶
۱۱۳۲/۷	۹۶۴/۲	۷۸۱/۲	۴۷۴/۱۳	۰/۸
۱۲۸۹	۱۲۰۳	۷۸۲/۳	۴۹۶/۷	۱

۵- نتیجه‌گیری

همان‌طور که در بخش قبل مشاهده شد، نتایج ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی میندلین در حالت‌های ورق ایزوتروپیک و پیزوالکتریک حاصله از روش ریتز با دقت مناسبی با نتایج حل دقیق موجود در مراجع انطباق داشت. برخی از عوامل ایجاد خطا در روش ریتز به شرح زیر است:

- استفاده از تئوری صفحات نیمه‌ضخیم (میندلین) در مواردی که نسبت طول به ضخامت ورق کمتر از ۱۰ بوده است.
- صرف‌نظر کردن از تنش نرمال در راستای z یعنی σ_{zz}
- انتگرال‌گیری مجزا از ورق ارتوتروپیک و وصله‌های پیزوالکتریک در هنگام به‌دست آوردن معادلات انرژی پتانسیل و جنبشی در روش ریتز
- استفاده از روش انتگرالگیری گوس
- افزایش تعداد جملات سری مثلثاتی تقریب توابع جابه‌جایی در روش ریتز تا ۱۰ جمله (افزایش جملات باعث کاهش درصد خطا می‌شد. اما، به دلیل حجم محاسبات، سری تا ۱۰ جمله محاسبه شده است).

شایان ذکر است که در این روش استفاده از سری‌های مثلثاتی به عنوان توابع جابه‌جایی نسبت به سری‌های توانی خطای کمتری را در محاسبات وارد کرده است.

۶- منابع

[1] Samonta A., Mukhopadhyay M., “Finite Element Large Deflection Static Analysis of Shallow and Deep Stiffened Shells”, *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 33, 1999, pp. 187-208.

[2] Yang J. S., “A nonlinear Theory for Thin Piezoelectric Plates in Moderately Large Exntensional Deformation”, *Mechanics Research Communications*, Vol. 26. No. 4, 1999, pp. 421-426.

[3] Song G., Qiao P. Z., Binienda W. K., Zou G. P., “Active Vibration Damping of Composite Beam using Smart Sensors and Actuators”, *Journal of Composite Aerospace Engineering*, Vol. 103, 2002, pp. 893-1321.

[4] Lee S. J., Reddy J. N., Rostam-Abadi F., “Transient Analysis of Laminated Composite Plates with Embedded Smart-Material Layers”, *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 40, 2004, pp. 463-483.

[5] Reddy J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Analysis*, 2nd Ed. CRC Press, London, 1996.

[6] Hou Y., Wei G. W., Xiang Y., “DSC-Ritz Method for the Free Vibration Analysis of Mindlin Plates”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 62, 2004, pp. 262-288.

[7] Hosseini Hashemi Sh., Arsanjani M., “Exact Characteristic Equations for Some of Classical Boundary Conditions of Vibrating Moderately Thick Rectangular Plates”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, 2004, pp. 819-853.

[8] Cupial P., “Three-Dimentional Natural Vibration Analysis and Energy Considerations for a Piezoelectric Rectangular Plate”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 283, 2004, pp. 1093-1113.