



## تحلیل ارتعاشی تیرهای دورانی باریک‌شونده و استفاده از الگوریتم ژنتیک برای تشخیص ترک در این تیرها

سعید طالبی<sup>۱</sup>، علیرضا آریایی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

\* صندوق پستی ۷۳۴۴۱-۸۱۷۴۶، [ariaei@eng.ui.ac.ir](mailto:ariaei@eng.ui.ac.ir)

**چکیده-** در این مقاله روشی تحلیلی موسوم به روش انتقال دیفرانسیل برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی ترک‌دار اویلر برنولی با سطح مقطع متغیر ارائه شده است. ابتدا فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با تغییر موقعیت ترک و عمق آن به دست می‌آید. نتایج حاصل برای اعتبارسنجی با مقادیر تجربی به دست آمده از آزمایش مودال، نرم‌افزار آباکوس و روش‌های دیگر مورد استفاده در سایر مقالات مقایسه می‌شود که تطابق خوبی بین آنها مشاهده می‌گردد. در ادامه مسأله معکوس مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ بدین منظور با به کارگیری الگوریتم ژنتیک و با استفاده از فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار که از آزمایش مودال حاصل شده‌اند موقعیت و عمق ترک در تیر دورانی با سطح مقطع متغیر تعیین می‌شود. مشاهده می‌گردد که نتایج عددی به دست آمده تطابق قابل قبولی با موقعیت و عمق واقعی ترک دارد که نشان‌دهنده کارایی این روش در تعیین پارامترهای ترک در تیرهای دورانی است.

**کلید واژگان:** تیر دورانی اویلر- برنولی، الگوریتم ژنتیک، ترک، آزمایش مودال، فرکانس طبیعی.

## Vibration analysis of rotating tapered cantilever beams and their crack detection using genetic algorithm

S. Talebi<sup>1</sup>, A. Ariaei<sup>2\*</sup>

1-MSc. Student, Dept. of Mech. Eng., Faculty of Eng., Isfahan Univ., Isfahan, Iran

2- Assist. Prof., Dept. of Mech. Eng., Faculty of Eng., Isfahan Univ., Isfahan, Iran

\* P.O. B. 81746-73441, Isfahan, Iran, [ariaei@eng.ui.ac.ir](mailto:ariaei@eng.ui.ac.ir)

**Abstract-**The current article presents an analytical approach, for determining the natural frequencies of a rotating cracked Euler-Bernoulli beam with a varying transverse cross-section, using the so-called differential transform method (DTM). First, the natural frequencies of the beam are obtained for different values of the crack position and depth. The results have been validated against those obtained from experimental modal test, Abaqus software and some other methods reported in the literature and a good agreement between the results is observed. Then, the inverse problem is investigated. For this reason, the position and depth of the crack of the rotating beam with a varying transverse cross-section are estimated using the genetic algorithm and then, the natural frequencies are obtained from the modal test. It is seen that the numerical results have a suitable agreement with the actual position and depth of the crack that indicates the effectiveness of this method in determining the parameters of the crack in the rotating beams.

**Keywords:** Euler-Bernoulli Rotating Beam, Genetic Algorithms, Crack, Modal Analysis, Natural Frequency.

## ۱- مقدمه

روش انتقال دیفرانسیل بر مبنای بسط سری‌های تیلور است و به نظر می‌رسد که اولین بار توسط زهو [۱] معرفی شد. تیرهای دورانی بیشتر در تیغه‌های روتور هلیکوپتر، تیغه‌های توربین بادی، تیغه‌های ملخک هواپیما به کار می‌روند. مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل تیرهای دورانی ترک‌دار بسیار مهم بوده و اخیراً محبوبیت زیادی پیدا کرده‌اند [۲]. این تیرها معمولاً به تیرهای یک بعدی اویلر-برنولی یا تیموشنکو که در معرض نیروی خمشی گریز از مرکز هستند، ساده می‌شوند. روش‌های تقریبی متفاوتی برای تحلیل ارتعاشی مسأله‌ی تیر دوران‌کننده مطرح شده است. هودگس و روتکوسکی [۳] روش المان محدود مرتبه متغیر را برای به دست آوردن خواص ارتعاش آزاد تیر دورانی معرفی کردند. ناگولسواران [۴] ارتعاش جانبی یک تیر یکنواخت اویلر-برنولی را بر مبنای حل عمومی معادله‌ی شکل مود و با استفاده از برهم‌نهی چهار تابع مستقل خطی بررسی کرد.

رائو و گوپتا [۵] روش المان محدود را برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به کار بردند. گوندا [۶] یک المان مرتبه بالاتر را که تابع شکل آن با توابع چندجمله‌ای و مثلثاتی به دست آمده است، پیشنهاد می‌دهد که برای تحلیل دینامیکی تیرهای دورانی با سطح مقطع متغیر مناسب است. سپس، گوندا و گانگولی [۷] فرض کردند که جابجایی عرضی به عنوان یک تابع مرتبه چهار تغییر می‌کند و شکل جدیدی از تابع به دست می‌آید که قسمت استاتیکی معادله دیفرانسیل حاکم را ارضا می‌کند. بازون [۸] مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر تیموشنکو با سطح مقطع متغیر را با استفاده از روش المان محدود بررسی کرد. همچنین بازون [۹] روابط بین فرکانس‌های درون‌صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای را بر حسب ضرایب ساوت‌ول<sup>۱</sup> مورد بحث قرار داد. بازون [۱۰] ارتعاش یک میله دورانی با سطح مقطع متغیر را با روش المان محدود بررسی کرد که در آن ماتریس‌های جرم، الاستیک و سختی گریز از مرکز به روشنی برحسب نرخ باریک‌شوندگی بیان می‌شوند. عطارنژاد و شهباز [۱۱] از توابع جابجایی اصلی به دست آمده از حل معادله‌ی دیفرانسیل استاتیکی حرکت صفحه‌ای تیر دورانی با سطح مقطع متغیر

اویلر-برنولی برای تعیین فرمول‌های المان محدود استفاده کردند. بانرجی [۱۲] از روش سختی دینامیکی برای مطالعه ارتعاشات آزاد تیرهای دورانی با سطح مقطع متغیر استفاده کرد که در آن ارتفاع یا پهنای تیر به طور خطی در امتداد طول آن تغییر می‌کند. وانگ و ورلی [۱۳] روش سختی دینامیکی را بر مبنای روش فروبینوس برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر به کار بردند. کاملاً مشهود است که ترک روی یک تیر، انعطاف موضعی را افزایش و بنابراین خواص دینامیکی تیر مانند فرکانس‌ها و شکل مودها را تغییر می‌دهد. در نتیجه امکان تخمین موقعیت و اندازه ترک برای تیر ترک‌دار وجود دارد. تاثیر ترک به طور گسترده در مقالات بررسی شده است و رویکردهای گوناگونی برای مدل کردن ترک توسعه یافته است.

چانگ و چن [۱۴] روش المان محدود را برای تحلیل یک تیغه‌ی دورانی ضخیم ترک‌دار به کار بردند و سپس رویکرد موج‌های کوچک فضایی را برای نمایش ترک در این تیغه مطرح کردند. کیم [۱۵] از روش المان محدود برای بحث روی تیر کامپوزیتی دورانی با یک ترک عرضی استفاده کرد. کوانگ و هوانگ [۱۶] و هوانگ [۱۷] به ترتیب مکان‌یابی ارتعاشی و پایداری تیغه‌های دورانی با سطح مقطع متغیر و یکنواخت را با بررسی تاثیر مکان ترک با استفاده از روش گالرکین مورد بررسی قرار دادند. امروزه تیرهای دورانی غیریکنواخت به دلیل عملکرد ویژه آنها و رسیدن به توزیع مقاومت و جرم بهتر، کاربردهای فراوانی پیدا کرده‌اند [۱۸]. از این‌رو تحلیل ارتعاشی این تیرها اهمیت فراوانی دارد. همچنین، تشخیص ترک در تیرها به طور گسترده‌ای در مقالات مطرح شده است. رایزوز و همکارانش [۱۹] ترک را با فنر پیچشی جایگزین کردند و پاسخ ارتعاشی تیر با دو ترک را به دست آوردند و با استفاده از آنها برای یک شکل محل و عمق ترک را پیش‌بینی کردند. لال و مایتی [۲۰] یک روش را برای تیرهای کوتاه، برای شناسایی ترک‌ها با استفاده از فرکانس‌های اندازه‌گیری شده، گسترش دادند. کیان و همکارانش [۲۱] یک ماتریس سختی انتقال یافته از یک دسته تیر با ترک یک طرف باز با انتگرال‌گیری از فاکتورهای شدت تنش معرفی کردند. براساس این کار، نحوی و جباری [۲۲] موقعیت و اندازه ترک را در تیرها تخمین زدند. چاندرروز و دیمارگونز [۲۳] از روش انرژی همراه با تئوری تیرهای ترک‌دار پیوسته برای تحلیل ارتعاشات عرضی تیرهای

1. South Well

همچنین با انجام آزمایش مودال، نتایج تجربی برای مطالعه تیرهای دارای ترک و با سطح مقطع متغیر ارائه می‌شود که می‌تواند به عنوان مرجعی در سایر مطالعات در این زمینه مورد استفاده باشد. در ادامه با استفاده از فرکانس‌های طبیعی تیر که از آزمایش مودال به‌دست آمده‌اند محل و عمق ترک تعیین می‌شود (مسئله معکوس). بدین منظور از الگوریتم ژنتیک که یکی از روش‌های جستجوی تصادفی است استفاده می‌شود. نتایج به دست آمده نشان‌دهنده تخمین قابل قبول جهت تعیین محل و عمق ترک است.

## ۲- فرمول‌بندی

### ۲-۱- معادلات حاکم بر تیر دورانی دارای ترک

یک تیر اولیه- برنولی در حال دوران و دارای ترک با سطح مقطع متغیر به طول  $L$  در نظر گرفته می‌شود. همان طور که شکل ۱ نشان می‌دهد، این تیر به یک تویی با شعاع  $R$  متصل است که با سرعت زاویه‌ای  $\Omega$  حول محور ثابت می‌چرخد. ارتفاع تیر به طور خطی در طول آن تغییر می‌کند. در تحقیق حاضر تیر دورانی ترک‌دار با سطح مقطع متغیر به سه المان در مقطع عرضی ترک تفکیک می‌شود (شکل ۱). ترک با یک المان فیزیکی پیچشی با سختی معادل  $K_\theta$  مدل و فرض می‌شود. وجود ترک تغییری در توزیع جرم در امتداد تیر به وجود نمی‌آورد. نیروهای گریز از مرکزی که در هر مقطع (در هر دو طرف راست و چپ) از المان‌های آن اعمال می‌شوند از روابط (۱) و (۲) محاسبه می‌شوند.

$$T_1(X_1) = \int_{L_2}^{L_1} \rho A \Omega (R+x) dx + \int_0^{X_1} \rho A \Omega (R+L_1+x) dx \quad (1)$$

$$T_2(X_2) = \int_{X_2}^{L_2} \rho A \Omega^2 (R+L_1+x) dx \quad (2)$$

برای روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$T_1(x) = T_2(x) \quad (3)$$

$$A(x) = A_g \left(1 - \frac{cx}{L}\right)^n \quad (4)$$

$$I(x) = I_g \left(1 - \frac{cx}{L}\right)^{n+2} \quad (5)$$

ترک‌دار استفاده کردند. ویولا و همکارانش [۲۴] از روش المان محدود برای شناسایی ترک با به‌دست آوردن ماتریس‌های جرم و سختی المان تیر ترک خورده استفاده کردند. یانگ و همکارانش [۲۵] و اسوامیدز و همکارانش [۲۶] با استفاده از روش انرژی به تعیین سختی خمشی معادل یک تیر با یک و دو ترک پرداختند. در این مقالات با داشتن فرکانس‌های طبیعی می‌توان موقعیت و عمق ترک را محاسبه کرد. کیم و استابز [۲۷] محل ترک در تیرهای ترک‌دار نازک را توسط یک الگوریتم بر اساس مفهوم حساسیت مودال پیش‌بینی کردند. علاوه بر این، آنها از روش گودمانسان [۲۸] برای تخمین اندازه ترک‌ها استفاده کردند.

رازی و همکارانش [۲۹] روش کیم و استابز [۲۷] را برای شناسایی ترک در تیرهای تیموشنکو گسترش دادند. براساس شاخص آسیب معرفی شده توسط چراغی و طاهری [۳۰]، رضایی و طاهری [۳۱] با استفاده از تجزیه حالت تجربی برای تشخیص یک ترک عرضی در تیر و کمیت روند پیشرفت ترک را مورد بررسی قرار دادند. از آنجا که فرکانس‌های طبیعی تیرهای ترک خورده تابعی از هر دو موقعیت و عمق ترک است، بسیاری از روش‌های مبتنی بر فرکانس‌های ذکر شده در بالا نیاز به یک روش دو مرحله‌ای به منظور برآورد محل و اندازه ترک دارند. با این حال، اگر عمل تشخیص ترک به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی در نظر گرفته شود، محل و اندازه ترک به عنوان پارامترهای طراحی مطرح خواهند بود. هوریب و واتاناب [۳۲] برای توسعه مدل المان محدود برای یک صفحه آسیب دیده با ترک‌های داخلی از روش الگوریتم ژنتیک استفاده کردند. ساهو و مایتی [۳۳] برای شناسایی ترک در سازه‌ها یک روش ترکیبی الگوریتم ژنتیک و عصبی پیشنهاد دادند. آنها روش خود را به صورت عددی بر روی یک قاب هواپیما با موفقیت عملی کردند. کاسایتی [۳۴] از روش تکاملی دیفرانسیلی برای تعیین محل و موقعیت آسیب در تیر با مقایسه ماتریس سختی قبل و بعد از آسیب استفاده کرد. وکیل باغمیشه و همکارانش [۳۵] روش الگوریتم ژنتیک را برای تعیین موقعیت و عمق ترک برای یک تیر به کار بردند.

در کارهای گذشته تیر دورانی بدون ترک و یا تیر دارای ترک غیردوار مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا ضمن مطالعه تیر دورانی دارای ترک، کارایی روش انتقال دیفرانسیل و دقت این روش در مطالعه این نوع تیرها بررسی می‌شود.

$$w_1 = \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0, \quad x = L \quad (9)$$

همچنین شرایط پیوستگی در محل ترک با روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) قابل بیان است

$$w_1(L_C^-, t) = w_2(L_C^+, t) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(L_C^-, t) = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L_C^+, t) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}(L_C^-, t) = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}(L_C^+, t) \quad (12)$$

که  $L_C^-$  و  $L_C^+$  به ترتیب مکان‌هایی بلافاصله در بعد و قبل از موقعیت ترک  $L_C$  را نشان می‌دهند. علاوه بر این، یک ناپیوستگی در شیب تیر در محل ترک ایجاد می‌شود که می‌توان آن را با رابطه (۱۳) بیان کرد.

$$\frac{\partial w_2}{\partial x}(L_C^+, t) - \frac{\partial w_1}{\partial x}(L_C^-, t) = \theta L \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(L_C^+, t) \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)،  $\theta$  ضریب خمشی بی بعد ترک و تابع اندازه آن است که برای ترک یک طرف باز با رابطه (۱۴) تعریف می‌شود [۲۷].

$$\theta = 6\pi a_1^2 f_1(a_1) \left( \frac{h}{L} \right) \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)،  $a_1 = (a_c/h)$  عمق بی‌بعد شده ترک است که در آن عمق ترک و  $h$  ضخامت تیر در محل ترک است. همچنین تابع  $f_1$  با رابطه (۱۵) داده می‌شود.

$$f_1(a_1) = 0.6384 - 1.035a_1 + 3.7201a_1^2 - 5.1773a_1^3 + 7.553a_1^4 - 7.332a_1^5 + 2.4909a_1^6 \quad (15)$$

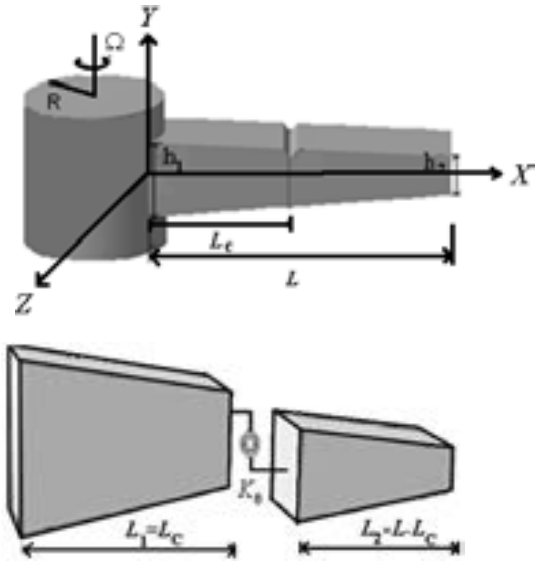
## ۲-۲- بی‌بعد سازی پارامترها

پارامترهای بی‌بعد شده برای موقعیت المان، شعاع توپی و سرعت زاویه‌ای با رابطه (۱۶) تعریف می‌شود [۲۸].

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad \gamma^2 = \frac{\rho A \Omega^2 L^4}{EI_g} \quad (16)$$

با قرار دادن معادلات (۴) و (۱۶) در معادلات (۱) و (۲)، نیروهای کششی گریز از مرکز به صورت رابطه (۱۷) به دست می‌آیند.

$$T_1 = T_2 = \frac{\rho A \Omega^2 L^2}{c^2 (n+1)(n+2)} \times$$



شکل ۱ تیر دورانی ترک‌دار با سطح مقطع متغیر

در روابط (۴) و (۵)،  $I$  و  $A$  به ترتیب سطح مقطع عرضی و گشتاور دوم سطح هستند. زیرنویس  $g$  متناظر با انتهای چپ تیر است که در شکل ۱ نشان داده شده است. نرخ باریک‌شوندگی با ثابت  $c$  نشان داده می‌شود که عددی کوچکتر از یک است، زیرا در غیر این صورت ارتفاع تیر قبل از رسیدن به انتهای آن به صفر می‌رسد. مدول یانگ ( $E$ ) و چگالی ماده ( $\rho$ ) ثابت فرض می‌شوند. بر طبق تئوری اویلر-برنولی معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش عرضی تیر در حال دوران با رابطه (۶) بیان می‌شود [۱۳]

$$\rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( T_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) = P_w, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

در معادله (۶)  $w_i$  جابجایی عرضی و  $P_w$  نیروی اعمالی بر واحد طول است. با در نظر گرفتن ارتعاش آزاد تیر، نیروی اعمالی بر واحد طول آن صفر در نظر گرفته می‌شود و این معادله با رابطه (۷) بیان می‌شود.

$$\rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( T_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (7)$$

تیر شکل ۱ دارای چهار شرط مرزی در ابتدا و انتهای آن به صورت معادلات (۸) و (۹) است.

تابع  $f(x)$  با رابطه (۲۶) بیان می‌شود.

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (26)$$

که در آن تابع  $f(x)$  تابع اصلی و  $F[k]$  تابع انتقال است. تابع انتقال معکوس با رابطه (۲۷) تعیین می‌شود.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k F[k] \quad (27)$$

با در نظر گرفتن معادله (۲۶) می‌توان نشان داد که مفهوم انتقال دیفرانسیل از بسط سری تیلور استخراج می‌شود. در کاربردهای واقعی، تابع  $f(x)$  در معادله (۲۷) با تعداد جملات محدود بیان و این معادله پس از جایگزینی رابطه (۲۶) در آن به صورت رابطه (۲۸) بازنویسی می‌شود.

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left( \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (28)$$

در رابطه فوق  $m$  به همگرایی فرکانس‌های طبیعی بستگی دارد. قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی که در این مقاله از آنها استفاده می‌شود به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ معرفی شده‌اند.

حال با به‌کارگیری روش انتقال دیفرانسیل و اعمال روابط بیان شده در جدول ۱ در معادله (۱۸)، این معادله به ازای  $x_0=0$  به شکل معادله (۲۹) در می‌آید.

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)(k+3) \\ & (k+4)W_i[k+4] - \frac{\gamma^2}{6}(3+6\delta) \\ & (k+1)(k+2)W_i[k+2] \\ & - \gamma^2 \delta (k+1)^2 W_i[k+1] \\ & [-\omega^2 + \gamma^2 k + \frac{\gamma^2}{2} k \\ & (k-1)] W_i[k] = 0, \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (29)$$

جدول ۱ قوانین حاکم بر روش انتقال معادلات دیفرانسیل

تابع اصلی	تابع انتقال
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F[k] = G[k] \pm H[k]$
$f(x) = \mu g(x)$	$F[k] = \mu G[k]$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F[k] = \sum_{l=0}^k G[k-l]H[l]$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F[k] = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n]$
$f(x) = x^n$	$F[k] = \delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k \neq n \\ 0, & k = n \end{cases}$

$$\left[ (1-c\xi^2)^{n+1} (1+2c\delta+cn\delta+c\xi+nc\xi) - (1-c)^{n+1} (1+2c\delta+cn\delta+c+nc) \right] \quad (17)$$

با جایگذاری عبارت نیروی کششی گریز از مرکز از معادله (۱۷) در معادله (۷) و انتخاب  $n=1$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[ (1-c\xi)^2 \frac{d^2 w_i}{d\xi^2} \right] - w_i \lambda^2 (1-c\xi) \\ & - \frac{1}{6c^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \left[ (1-c\xi)^2 (1+3c\delta+2c\xi) \right. \right. \\ & \left. \left. - (1-c)^2 (1+3c\delta+2c) \right] \frac{dw_i}{d\xi} \right\} = 0, \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (18)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد شده معادله (۱۶)، شرایط مرزی (۸) و (۹) به صورت رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) در می‌آیند.

$$w_1 = \frac{dw_1}{d\xi} = 0, \quad \xi = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^2 w_2}{d\xi^2} = \frac{d^3 w_2}{d\xi^3} = 0, \quad \xi = 1 \quad (20)$$

همچنین با جایگذاری معادله (۱۶) در شرایط پیوستگی (۱۰) - (۱۳) در محل ترک، معادلات (۲۱) - (۲۴) به دست می‌آیند.

$$w_1 = w_2, \quad \xi = \xi_1 \quad (21)$$

$$\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = \frac{d^2 w_2}{d\xi^2}, \quad \xi = \xi_1 \quad (22)$$

$$\frac{d^3 w_1}{d\xi^3} = \frac{d^3 w_2}{d\xi^3} = 0, \quad \xi = \xi_1 \quad (23)$$

$$\frac{dw_2}{d\xi} - \frac{dw_1}{d\xi} = \theta \frac{d^2 w_2}{d\xi^2}, \quad \xi = \xi_1 \quad (24)$$

در روابط (۲۱-۲۴)  $\xi_1$  معرف مکان ترک است و با رابطه (۲۵) بیان می‌شود.

$$\xi_1 = \frac{L_C}{L} \quad (25)$$

### ۲-۳- روش انتقال دیفرانسیل

در این بخش از روش انتقال دیفرانسیل جهت تعیین پاسخ یک تیر اوپلر-برنولی دارای ترک استفاده می‌شود. یک تابع  $f(x)$  را در نظر بگیرید که در ناحیه  $D$  تعریف شده است و نقطه  $x=x_0$  می‌تواند معرف هر نقطه در  $D$  باشد. هدف تعریف تابع  $f(x)$  با سری‌های توانی با مرکزیت نقطه  $x_0$  است. انتقال دیفرانسیل

با جایگذاری این روابط در شرایط مرزی (۳۰-۳۵) برای مقادیر مختلف  $k$ ، ۶ معادله بر حسب مقادیر مجهول  $C_{22}$ ،  $C_{32}$ ،  $C_{21}$ ،  $C_{02}$ ،  $C_{31}$  و  $C_{21}$  به دست می‌آید که با استفاده از این معادلات یک ماتریس  $6 \times 6$  از ضرایب مجهولات نتیجه می‌شود. حال برای داشتن جواب غیر صفر باید دترمینان این ماتریس ضرایب برابر صفر باشد که در این صورت یک معادله بر حسب  $c$ ،  $\gamma$ ،  $\delta$  و فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد به دست می‌آید؛ حال می‌توان برای مقادیر مختلف  $c$ ،  $\gamma$  و  $\delta$ ، فرکانس‌های بی‌بعد را محاسبه کرد.

### ۳- تشخیص ترک به عنوان مسأله معکوس

همان طور که در بخش قبل بیان شد، هنگامی که عمق و مکان ترک مشخص باشد می‌توان فرکانس‌های طبیعی تیر را محاسبه کرد (مسأله مستقیم). در مقابل، می‌توان با داشتن فرکانس‌های طبیعی، محل و عمق ترک را تعیین نمود (مسأله معکوس) که هدف این بخش است. بدین منظور می‌توان یک الگوریتم بهینه‌سازی را به کار برد که برای تخمین پارامترهای ترک، مقادیر بهینه را در یک تابع هدف جستجو می‌کند. به طور کلی روش‌های بهینه‌سازی جواب‌های ممکن بسیاری را با روشی کارآمد تعیین و به مسأله اعمال می‌کنند تا بهترین پاسخ را بیابند. تشخیص ترک عمدتاً با داشتن فرکانس‌های طبیعی یا شکل مودها انجام می‌گیرد. بدین منظور در این مقاله از روش الگوریتم ژنتیک که یکی از الگوریتم‌های جستجوی تصادفی است استفاده می‌شود.

### ۳-۱- الگوریتم ژنتیک

ایده روش الگوریتم ژنتیک برگرفته از طبیعت است. الگوریتم-های ژنتیک برای روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی در حل مسائل خطی، محدب و برخی مسائل مشابه بسیار موفق بوده‌اند، ولی الگوریتم‌های ژنتیک برای حل مسائل گسسته و غیر خطی بسیار پر کاربردتر می‌باشند. الگوریتم‌های ژنتیک از اصول انتخاب طبیعی داروین برای یافتن فرمول بهینه جهت پیش‌بینی یا تطبیق الگو استفاده می‌کنند. در دهه هفتاد میلادی جان هلند [۳۶] ایده استفاده از الگوریتم ژنتیک را در بهینه‌سازی‌های مهندسی مطرح کرد. برای الگوریتم ژنتیک ابتدا یک تابع هدف تعریف می‌شود، سپس با استفاده از این

همچنین با اعمال روابط بیان شده در جدول‌های ۱ و ۲ در معادلات (۱۹) تا (۲۴) و در نظر گرفتن  $x_0=0$  می‌توان به روابط (۳۰-۳۳) رسید.

$$W_1[0]=W_1[1]=0 \quad (30)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)W_2[k]=\sum_{k=3}^{\infty} k(k-2)W_2[k]=0 \quad (31)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_1)^k W_1[k]=\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_1)^k W_2[k] \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1)W_1[k] \\ = \sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1)W_2[k] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} (\xi_1)^{k-3} k(k-1)(k-2)W_1[k] \\ = \sum_{k=3}^{\infty} (\xi_1)^{k-3} k(k-1)(k-2)W_2[k] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_1)^{k-1} k(W_2[k]-W_1[k]) \\ = \theta \sum_{k=2}^{\infty} (\xi_1)^{k-2} k(k-1)W_2[k] \end{aligned} \quad (35)$$

در روابط (۳۰-۳۵)،  $W_i[k]$  تبدیل یافته  $W_i(\xi)$ ،  $i=1,2$ ، است. از طرفی روابط (۳۶-۴۱) در نظر گرفته می‌شوند.

$$W_1[2]=C_{21} \quad (36)$$

$$W_1[3]=C_{31} \quad (37)$$

$$W_2[0]=C_{02} \quad (38)$$

$$W_2[1]=C_{12} \quad (39)$$

$$W_2[2]=C_{22} \quad (40)$$

$$W_2[3]=C_{32} \quad (41)$$

جدول ۲ قوانین انتقال دیفرانسیل در شرایط مرزی

$X=0$		$X=1$	
شرط مرزی اصلی	شرط مرزی انتقال	شرط مرزی اصلی	شرط مرزی انتقال
$f(0)=0$	$F(0)=0$	$f(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F(k)=0$
$\frac{df}{dx}(0)=0$	$F(1)=0$	$\frac{df}{dx}(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k)=0$
$\frac{d^2f}{dx^2}(0)=0$	$F(2)=0$	$\frac{d^2f}{dx^2}(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F(k)=0$
$\frac{d^3f}{dx^3}(0)=0$	$F(3)=0$	$\frac{d^3f}{dx^3}(1)=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F(k)=0$

#### ۴- مطالعات تجربی

برای اعتبارسنجی کارهای انجام شده، فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار با سطح مقطع متغیر و بدون دوران به کمک آزمایش مودال تعیین و با مقادیر عددی به‌دست آمده مقایسه می‌شود. در شکل زیر تیرهای حالت بدون ترک و ترک‌دار نشان داده شده است. در اینجا برای اندازه و موقعیت‌های متفاوت ترک سه فرکانس طبیعی اول به‌دست آمده است که در بخش ۵ آمده است. در هر مورد با چکش به انتهای آزاد تیر ضربه زده (شکل‌های ۲ و ۳) و پاسخ به کمک شتاب‌سنج اندوسکو که در انتهای ثابت تیر قرار دارد با استفاده از نرم‌افزار پالس به صورت یک نمودار به‌دست می‌آید.



شکل ۲ تیر بدون ترک با سطح مقطع متغیر



شکل ۳ تیر ترک‌دار با سطح مقطع متغیر

در این نمودار محور افقی معرف فرکانس بر حسب هرتز و محور قائم نسبت دامنه خروجی به ورودی است. مقادیری از محور افقی در نقاطی از این نمودار که رزونانس اتفاق می‌افتد بیانگر فرکانس‌های طبیعی سیستم است.

#### ۵- نتایج عددی و تجربی

در این قسمت تیر با ترک‌هایی در موقعیت‌های مختلف در نظر

تابع با جایگذاری اعداد تصادفی بهترین موقعیت و اندازه ترک برای سه فرکانس داده شده به‌دست می‌آید. نتایج به‌دست آمده از الگوریتم ژنتیک دارای درصد خطای قابل قبولی است که در قسمت‌های بعدی نشان داده می‌شود.

#### ۳-۲- فرمول‌بندی مسأله معکوس

همان گونه که در بخش ۲-۳ بیان شد با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب و با داشتن مقادیر موقعیت و عمق ترک، معادله‌ای جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی به دست می‌آید. حال بالعکس، اگر مقادیر فرکانس‌های طبیعی به عنوان مثال از آزمایش مودال معلوم باشد می‌توان موقعیت و عمق ترک را به گونه‌ای انتخاب کرد که پس از جایگذاری آن در دترمینان ماتریس ضرایب، فرکانس‌های طبیعی حاصل از صفر قرار دادن این دترمینان، دارای حداقل فاصله از مقادیر معلوم فرکانس‌های طبیعی حاصل از آزمایش باشند. در این صورت می‌توان گفت مقادیر موقعیت و عمق انتخاب شده برای ترک با نتایج حاصل از آزمایش تطابق خوبی دارند. این موضوع ایده اصلی در حل مسأله معکوس جهت تعیین پارامترهای ترک است. ابتدا دترمینان ماتریس ضرایب به شکل تابعی از مقادیر موقعیت و عمق ترک و نیز فرکانس طبیعی به صورت رابطه (۴۲) نوشته می‌شود.

$$D(\omega, L_c, a_c) = 0 \quad (42)$$

در رابطه (۴۲)  $L_c$  و  $a_c$  به ترتیب بیانگر موقعیت و عمق ترک است. همانگونه که بیان شد در مسأله مستقیم با داشتن موقعیت و عمق ترک، فرکانس‌های طبیعی تیر تعیین می‌شود که به صورت  $\omega_j = \omega_j(L_c, a_c)$ ,  $j=1,2,3,\dots$  قابل بیان است. در مسأله معکوس فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده از آزمایش مودال که شامل  $u$  فرکانس طبیعی اول سیستم هستند به صورت  $\bar{\omega}^* = \{\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_u^*\}^T$  معلوم و هدف تعیین مقادیر  $L_c$  و  $a_c$  است. تابع هدف را می‌توان با رابطه (۴۳) تعریف کرد.

$$f(L_c, a_c) = \sum_{j=1}^u \left[ \frac{\omega_j(L_c, a_c)}{\omega_j^*} - 1 \right]^2 \quad (43)$$

تعریف مسأله در روش الگوریتم ژنتیک به صورت رابطه (۴۴) خواهد بود

$$\begin{aligned} f(L_c, a_c) &\rightarrow \text{مینیمم} \\ 0 \leq L_c \leq 1, \quad 0 \leq a_c \leq 1 \end{aligned} \quad (44)$$

**جدول ۳** سه فرکانس طبیعی اول تیر غیردوار بدون ترک با سطح مقطع متغیر برای نسبت‌های باریک‌شوندگی مختلف

$$(\delta = 0, \omega = \mu L^2 \sqrt{\rho A_g / EI_g})$$

$c$	روش	مود اول	فرکانس‌های بی‌بعد مود دوم	مود سوم
	تجربی	۳/۵۱۳۲	۲۱/۹۶۲۳	۶۰/۹۲۳۵
۰/۱	انتقال دیفرانسیل	۳/۵۱۵۷	۲۲/۰۳۳۶	۶۱/۶۹۷۲
	آباکوس	۳/۵۴۴۴	۲۰/۶۶۳۷	۶۰/۸۰۴۸
	تجربی	۳/۶۶۳۱	۱۹/۶۶۱۵	۵۲/۹۱۳۶
۰/۳	انتقال دیفرانسیل	۳/۶۶۶۱	۱۹/۸۷۹۶	۵۳/۳۲۱۵
	آباکوس	۳/۶۵۲۳	۱۹/۳۶۲۰	۵۰/۱۷۹۱
	تجربی	۳/۸۱۹۹	۱۸/۰۱۲۹	۴۶/۸۶۹۳
۰/۵	انتقال دیفرانسیل	۳/۸۲۲۸	۱۸/۳۱۶۹	۴۷/۲۶۴۴
	آباکوس	۳/۸۰۸۰	۱۷/۹۳۲۲	۴۶/۱۵۴۲

#### ۵-۲- تیرهای غیردوار ترک‌دار

در این بخش تیر ترک‌دار بررسی می‌شود که در آن  $c = 0/5$  است. تحلیل ارتعاشی این تیر قبلاً توسط چودهاری و مایتی [۳۷] انجام شده است. آنها سه فرکانس طبیعی اول را برای موقعیت‌ها و اندازه‌های مختلف ترک با استفاده از روش المان محدود دوبعدی بررسی کردند. در اینجا سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد با استفاده از روش انتقال دیفرانسیل و نرم‌افزار آباکوس به دست می‌آید و با مقادیر تجربی مقایسه می‌شود که مقادیر آن در جدول ۴ آمده است.

در جدول ۴ مشاهده می‌شود که نتایج روش انتقال دیفرانسیل نسبت به دو روش المان محدود دو بعدی و نرم‌افزار آباکوس به نتایج تجربی نزدیک‌تر است. از این رو، این روش از دقت بالاتری برخوردار است. اما نکته‌ای که در استفاده از این روش باید در نظر گرفته شود، تعداد جملات مورد استفاده در آن است. همان‌گونه که در معادله (۲۸) مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد جملات دقت نتایج افزایش می‌یابد ولی به زمان حل نیز افزوده می‌شود. بنابراین باید تعداد جملات را به گونه‌ای انتخاب کرد که ضمن حصول اطمینان از همگرایی نتایج با افزایش تعداد جملات، زمان حل نیز بیش از حد زیاد نشود.

#### ۵-۳- تیرهای دورانی ترک‌دار

تیرهای دورانی ترک‌دار برای سرعت‌های دورانی بالای متفاوت در نظر گرفته و در آن  $c = 0/5$  و  $L_c/L = 0/5$  و  $\delta = 0$  فرض

گرفته می‌شود و دقت و همگرایی فرمول‌بندی حاضر مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از رویکرد مطرح شده در این مقاله با مقادیر موجود در مقالات دیگر که با استفاده از روش‌های دیگر به دست آمده‌اند، مقایسه می‌شود. در ابتدا تیر بدون ترک با سطح مقطع متغیر و بدون سرعت دورانی، سپس تیر ترک‌دار بدون سرعت دورانی با سطح مقطع متغیر بررسی می‌شود. در انتها یک تیر دورانی دارای ترک با سطح مقطع متغیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

#### ۵-۱- تیرهای غیر دوار بدون ترک

ابتدا یک تیر بدون ترک با سطح مقطع متغیر با نسبت‌های باریک‌شوندگی متفاوت بررسی می‌شود که از سمت با سطح مقطع بزرگ‌تر، ثابت (گیردار) است. جرم و سختی فنر در امتداد طول تیر به ترتیب به صورت  $m(x) = \rho A_g (1 - cx/L)$  و  $EI(x) = EI_g (1 - cx/L)^3$  در نظر گرفته می‌شود. پارامترهای هندسی و فیزیکی این تیر عبارت از طول تیر  $L = 240 \text{ mm}$ ، ضخامت تیر در انتهای ثابت  $h_1 = 20 \text{ mm}$ ، عمق تیر  $b = 12 \text{ mm}$ ، مدول یانگ  $E = 210 \text{ GPa}$  و چگالی  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$  می‌باشند. در جدول ۳، سه فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای این تیر نشان داده شده است و با مقادیر تجربی و نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. در نرم‌افزار آباکوس از المان‌بندی سه بعدی استفاده و با مقید کردن کلیه درجات آزادی در انتهای بزرگ‌تر تیر، شرط مرزی گیردار در آن اعمال شده است. سپس یک محور به فاصله  $R$  از انتهای گیردار تیر انتخاب و تیر با سرعت زاویه‌ای مورد نظر حول آن دوران داده می‌شود.

در جدول ۳، فرکانس بی‌بعد به صورت  $\omega = \mu L^2 \sqrt{\rho A_g / EI_g}$  تعریف شده است که در آن  $\mu$  فرکانس تیر بر حسب هرتز است. در این جدول مشاهده می‌شود که با افزایش  $c$  فرکانس اول افزایش ولی فرکانس‌های بالاتر کاهش می‌یابد.

این نشان می‌دهد که با افزایش  $c$  با وجود کاهش جرم و سختی سیستم، اگر تیر باریک‌شونده در مود اول خود ارتعاش کند سختی آن با سرعت کمتری نسبت به جرم کاهش می‌یابد و در نتیجه فرکانس اول افزایشی است؛ این در حالی است که در ارتعاش سیستم در مودهای بالاتر این روند عکس می‌شود و سختی سیستم با سرعت بیشتری نسبت به جرم کاهش می‌یابد.



می‌شود. در جدول ۵ مقادیر عددی به‌دست آمده از روش انتقال دیفرانسیل با مقادیر حاصل از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است که تطابق خوبی بین نتایج دیده می‌شود.

جدول ۴ سه فرکانس طبیعی اول تیرهای غیردوار ترک‌دار با سطح مقطع متغیر برای موقعیت و عمق ترک‌های مختلف ( $\delta = 0$ )

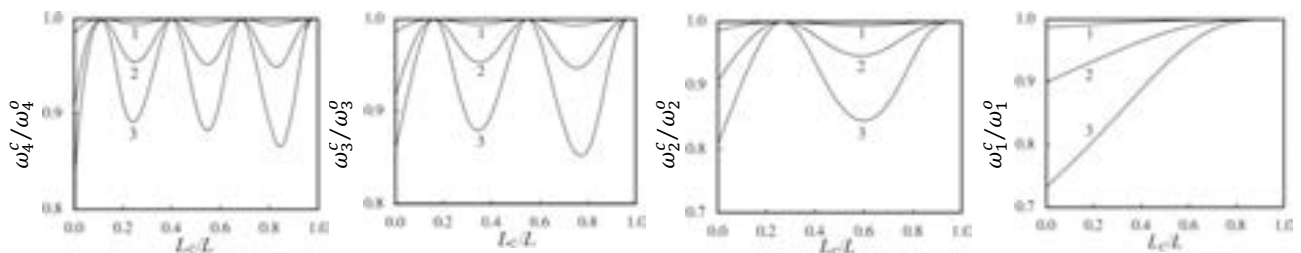
مود سوم	فرکانس‌های بی بعد مود دوم	موداول	روش	$a_c/h$	$L_c/L$
۴۶/۶۹۸۶	۱۸/۱۰۶۳	۳/۷۸۰۱	تجربی	۰/۱	
۴۷/۱۶۸۴	۱۸/۲۱۳۱	۳/۷۸۴۲	انتقال دیفرانسیل	۰/۳	
۴۶/۰۸۲۶	۱۷/۸۲۶۷	۳/۷۷۰۵	آباکوس		
۴۷/۰۸۹۶	۱۸/۲۱۲۶	۳/۷۸۵۲	المان محدود دوبعدی		
۴۵/۹۰۲۸	۱۷/۴۸۶۳	۳/۵۰۰۱	تجربی		
۴۶/۵۸۸۹	۱۷/۵۵۴۳	۳/۵۰۴۶	انتقال دیفرانسیل		۰/۱
۴۵/۴۷۶۲	۱۷/۱۱۳۶	۳/۴۸۹۰	آباکوس	۰/۵	
۴۶/۵۷۶۲	۱۷/۶۱۲۳	۳/۵۰۴۳	المان محدود دوبعدی		
۴۵/۱۸۳۲	۱۶/۵۴۲۶	۲/۹۳۷۶	تجربی		
۴۵/۷۹۶۱	۱۶/۵۵۳۳	۲/۹۴۰۴	انتقال دیفرانسیل		
۴۳/۹۳۷۳	۱۶/۰۳۳۱	۳/۹۲۷۲	آباکوس		
۴۵/۸۰۲۱	۱۶/۵۵۰۳	۲/۹۴۰۱	المان محدود دوبعدی		
۴۶/۴۶۳۱	۱۸/۳۰۵۶	۳/۷۹۵۶	تجربی	۰/۱	
۴۷/۰۲۶۷	۱۸/۳۱۱۳	۳/۸۰۱۰	انتقال دیفرانسیل	۰/۳	
۴۶/۰۸۹۹	۱۷/۹۴۵۵	۳/۷۸۷۱	آباکوس		
۴۷/۰۴۲۸	۱۸/۳۱۲۹	۳/۸۰۲۱	المان محدود دوبعدی		
۴۴/۸۶۵۲	۱۸/۲۰۹۶	۳/۶۲۹۵	تجربی		
۴۵/۳۵۴۶	۱۸/۲۸۴۹	۳/۶۳۱۲	انتقال دیفرانسیل		۰/۳
۴۵/۶۱۹۳	۱۷/۹۳۴۶	۳/۶۱۵۸	آباکوس	۰/۵	
۴۵/۳۲۶۱	۱۸/۲۸۵۱	۳/۶۳۱۵	المان محدود دوبعدی		
۴۱/۹۹۸۲	۱۸/۱۰۲۳	۳/۲۲۶۳	تجربی		
۴۲/۱۵۶۸	۱۸/۲۲۸۱	۳/۲۳۹۱	انتقال دیفرانسیل		
۴۴/۳۸۰۱	۱۷/۹۰۶۷	۳/۲۲۰۷	آباکوس		
۴۲/۸۱۲۳	۱۸/۲۳۰۱	۳/۲۳۹۴	المان محدود دوبعدی		
۴۶/۸۳۶۲	۱۷/۹۹۶۲	۳/۸۱۰۲	تجربی	۰/۱	
۴۷/۲۲۱۶	۱۸/۲۱۵۵	۳/۸۱۳۳	انتقال دیفرانسیل		
۴۶/۱۱۷۸	۱۷/۸۵۳۲	۳/۸۰۲۷	آباکوس	۰/۳	
۴۷/۲۲۹۳	۱۸/۲۲۶۱	۳/۸۱۳۹	المان محدود دوبعدی		
۴۵/۹۲۳۵	۱۷/۳۹۱۲	۳/۷۳۹۹	تجربی		
۴۶/۹۱۵۵	۱۷/۴۸۲۰	۳/۷۴۱۱	انتقال دیفرانسیل		۰/۵
۴۵/۸۳۶۴	۱۷/۲۰۳۴	۳/۷۲۵۴	آباکوس		
۴۶/۹۰۳۱	۱۷/۴۸۳۱	۳/۷۴۰۹	المان محدود دوبعدی		
۴۵/۶۳۵۲	۱۵/۹۱۲۳	۳/۵۶۰۲	تجربی	۰/۵	
۴۶/۳۰۵۰	۱۵/۹۴۷۰	۳/۵۶۶۳	انتقال دیفرانسیل		
۴۵/۱۱۸۵	۱۵/۸۲۸۲	۳/۵۲۵۳	آباکوس		
۴۶/۲۹۲۳	۱۵/۹۵۲۱	۳/۵۶۲۳	المان محدود دوبعدی		

جدول ۵ سه فرکانس طبیعی اول تیرهای دورانی ترک‌دار با سطح مقطع متغیر برای سرعت‌های دورانی بی‌بعد و عمق ترک‌های مختلف

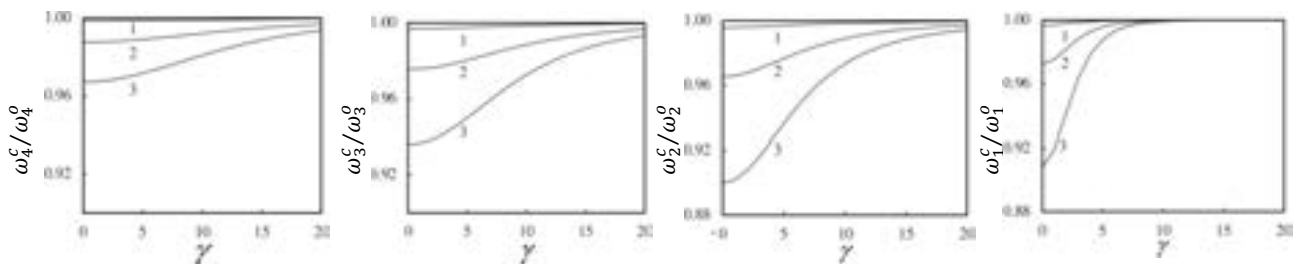
مُد سوم	فرکانس های بی بعد مُد دوم	مُد اول	روش	$a_c/h$	$\gamma$
۴۷/۰۶۷۷	۱۷/۶۲۶۲	۳/۹۱۶۹	انتقال دیفرانسیل	۰/۳	۱
۴۷/۳۲۳۶	۱۷/۷۴۲۳	۳/۹۲۷۸	آباکوس	۰/۳	
۴۶/۴۵۶۷	۱۶/۰۶۵۷	۳/۷۵۳۱	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۴۶/۵۲۳۶	۱۵/۶۵۳۲	۳/۷۹۲۳	آباکوس	۰/۵	
۴۵/۶۴۰۱	۱۳/۷۷۰۳	۳/۳۶۶۳	انتقال دیفرانسیل	۰/۷	
۴۴/۵۲۱۴	۱۳/۲۴۵۶	۳/۳۹۶۵	آباکوس	۰/۷	
۵۰/۸۵۰۱	۲۰/۸۱۴۰	۶/۷۹۵۸	انتقال دیفرانسیل	۰/۳	۵
۴۹/۷۰۰۱	۲۱/۵۱۳۰	۷/۰۲۵۶	آباکوس	۰/۳	
۴۹/۹۶۲۱	۱۸/۷۵۳۵	۶/۹۲۰۷	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۴۷/۳۷۸۱	۱۷/۴۹۱۱	۷/۱۳۸۶	آباکوس	۰/۵	
۴۹/۱۳۹۲	۱۵/۵۳۳۰	۷/۲۳۳۷	انتقال دیفرانسیل	۰/۷	
۴۷/۴۷۸۶	۱۵/۸۶۲۳	۷/۴۰۲۱	آباکوس	۰/۷	
۶۰/۲۰۶۶	۲۸/۶۴۱۶	۱۱/۵۸۴۴	انتقال دیفرانسیل	۰/۳	۱۰
۵۸/۷۰۸۹	۲۶/۲۶۸۱	۱۱/۸۵۶۲	آباکوس	۰/۳	
۵۹/۵۷۸۵	۲۵/۶۷۳۹	۱۱/۷۹۱۳	انتقال دیفرانسیل	۰/۵	
۵۷/۶۸۲۲	۲۳/۲۵۶۹	۱۲/۰۲۱۴	آباکوس	۰/۵	
۵۸/۷۲۷۶	۲۰/۸۶۳۰	۱۲/۳۸۸۷	انتقال دیفرانسیل	۰/۷	
۵۶/۴۹۲۳	۱۸/۷۸۲۷	۱۲/۵۶۰۱	آباکوس	۰/۷	

همچنین برای مقادیر  $c=0/5$ ،  $\delta=0$ ،  $a_c/h=0/3$  و  $L_c/L=0/45$  نسبت چهار فرکانس اول تیر دورانی باریک‌شونده‌ی ترک‌دار به فرکانس‌های تیر دورانی باریک‌شونده بدون ترک برای سرعت‌های دورانی مختلف محاسبه شده است. مشاهده می‌شود برای اندازه‌های داده شده، با افزایش سرعت دورانی، اثر ترک روی نسبت فرکانس کمتر می‌شود؛ به عبارت دیگر، همان گونه که در شکل ۵ مشاهده می‌شود نسبت فرکانس حالت ترک‌دار به حالت بدون ترک به سمت یک میل می‌کند. چهار شکل مُود اول این نوع تیر برای حالت  $0/45$   $L_c/L=$  در شکل ۶ نشان داده شده است.

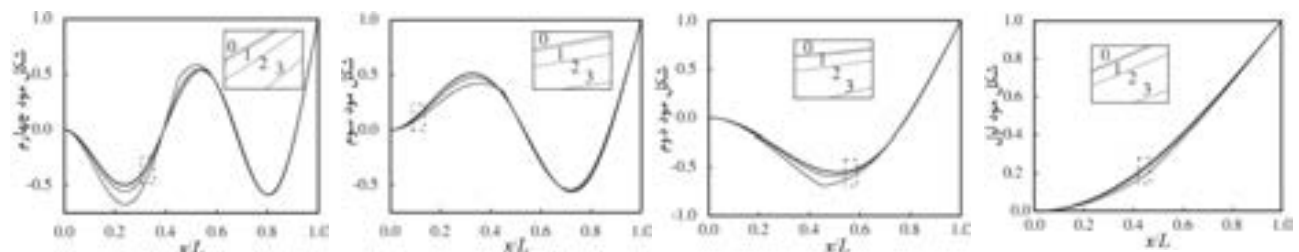
اینک برای تیر دورانی که نسبت باریک‌شوندگی، شعاع توپی، سرعت چرخش و نسبت عمق ترک تیر به ترتیب  $c=0/5$ ،  $\delta=0$ ،  $\gamma=1$ ،  $0/3$  و  $0/2$  و  $a_c/h=0/1$  می‌باشند، نسبت چهار فرکانس اول تیر دورانی باریک‌شونده ترک‌دار به فرکانس‌های تیر دورانی باریک‌شونده بدون ترک برای موقعیت‌های مختلف ترک محاسبه و اثر آن روی چهار فرکانس اول در شکل ۴ مشاهده می‌شود. می‌توان دید برای اندازه‌های داده شده برای ترک، با تغییر موقعیت ترک از انتهای ثابت به سمت انتهای آزاد، فرکانس اول به طور یکنواخت افزایش می‌یابد، ولی فرکانس‌های بعدی با نزدیک شدن به گره ارتعاشی افزایش و پس از آن کاهش می‌یابند.



شکل ۴ اثر موقعیت و اندازه ترک روی چهار فرکانس طبیعی اول تیر دورانی باریک‌شونده (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات  $a_c/h$  برابر با  $0/1$ ،  $0/2$  و  $0/3$ ).



شکل ۵ اثر سرعت زاویه‌ای بی‌بعد  $\gamma = \Omega L^2 \sqrt{\rho A_g / EI_g}$  روی چهار فرکانس طبیعی اول برای تیر دورانی باریک‌شونده ترک‌دار با موقعیت ترک  $L_c/L = 0.45$  (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات  $a_c/h$  برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳).



شکل ۶ چهار شکل مود اول تیر دورانی با سطح مقطع متغیر برای حالت بدون ترک و ترک‌دار در موقعیت  $L_c/L = 0.45$  (۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات  $a_c/h$  برابر با ۰، ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳).

این موضوع به این دلیل است که الگوریتم ژنتیک یکی از الگوریتم‌های جستجوی تصادفی می‌باشد. دیده می‌شود خطای نتایج همواره کمتر از ۶٪ است که نشان‌دهنده تخمین قابل قبول محل و عمق ترک با استفاده از الگوریتم ژنتیک است.

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش انتقال دیفرانسیل برای تحلیل ارتعاشی تیر دورانی با سطح مقطع متغیر توسعه داده شد و فرکانس‌های طبیعی تیر برای موقعیت‌ها و عمق‌های گوناگون ترک به دست آمد. در ادامه مقادیر فرکانس به دست آمده با روش انتقال دیفرانسیل با مقادیر تجربی حاصل از آزمایش مودال و نیز مقادیر به دست آمده از نرم‌افزار آباکوس و روش‌های دیگر در سایر مقالات مقایسه شد. مشاهده شد که این روش دقت خوبی برای تحلیل این نوع تیرها دارد. در ادامه با استفاده از الگوریتم ژنتیک مسأله معکوس مورد بررسی قرار گرفت و با استفاده از فرکانس‌های طبیعی، موقعیت و عمق ترک به دست آمد و با مقادیر تجربی مقایسه گردید. نتایج نشان‌دهنده تخمین قابل قبول برای مکان و عمق ترک با استفاده از الگوریتم ژنتیک است.

با افزایش اندازه ترک شکل مود تیر تغییر می‌کند؛ به عبارت دیگر یک اغتشاش محلی به تدریج روی شکل مود در محل ترک اتفاق می‌افتد. هر چند هنگامی که اندازه ترک خیلی کوچک است، اغتشاش روی شکل مود قابل تشخیص نیست. در شکل‌های ۴، ۵، ۶، اعداد ۱، ۲ و ۳ به ترتیب بیانگر حالات  $a_c/h$  برابر با ۰/۱، ۰/۲ و ۰/۳ و در شکل ۶ صفر بیانگر حالت بدون ترک است.

#### ۵-۴- استفاده از الگوریتم ژنتیک در مسأله معکوس تیرهای دارای ترک

در این بخش به تحلیل مشخصه‌های ارتعاشی یک تیر غیر دورانی دارای ترک با سطح مقطع متغیر پرداخته می‌شود. مقادیر نسبت باریک‌شوندگی و شعاع توپی تیر به ترتیب  $c=0.5$  و  $\delta=0$  می‌باشند. با داشتن سه فرکانس طبیعی اول که از آزمایش مودال به دست آمده‌اند، نسبت‌های عمق و موقعیت ترک با استفاده از الگوریتم ژنتیک محاسبه و سپس با مقادیر تجربی مقایسه می‌شود. همان گونه که در جدول ۶ مشاهده می‌گردد در برخی موارد، نتایج حاصل از الگوریتم ژنتیک کمتر و در بعضی موارد بیشتر از مقادیر تجربی است.

فاصله ترک تا انتهای ثابت (m)	$L_C$
فرکانس طبیعی تیر بدون ترک	$\omega^0$
فرکانس طبیعی تیر ترک‌دار	$\omega^c$
فرکانس طبیعی بر حسب هر تیر (Hz)	$\mu$
چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )	$\rho$
سرعت زاویه‌ای بی‌بعد	$\gamma$
نسبت ارتفاع تیر در ابتدا و انتهای تیر	$\alpha$

جدول ۶ مقادیر نسبت های عمق و موقعیت ترک با استفاده از

الگوریتم ژنتیک

مقدار عددی		مقدار تجربی		فرکانس‌های طبیعی (بی بعد)	
$L_C/L$	$a_c/h$	$L_C/L$	$a_c/h$	$L_C/L$	$a_c/h$
۱/۶۰	۰/۲۰	۰/۱۰۱۶	۰/۰۹۹۸	۰/۱	۰/۱
۲/۷۰	۱/۵۳	۰/۰۹۷۳	۰/۳۰۴۶	۰/۱	۰/۳
۳/۱۰	۳/۲۰	۰/۱۰۳۱	۰/۴۸۴	۰/۱	۰/۵
۰/۵۰	۵/۴۰	۰/۳۰۱۵	۰/۰۹۴۶	۰/۳	۰/۱
۱/۳۳	۳/۰۰	۰/۳۰۴۰	۰/۲۹۱	۰/۳	۰/۳
۳/۵۰	۲/۲۰	۰/۳۰۱۵	۰/۴۸۹	۰/۳	۰/۵
۱/۸۰	۱/۹۰	۰/۴۹۱	۰/۱۰۱۹	۰/۵	۰/۱
۰/۲۰	۳/۰۰	۰/۵۰۱	۰/۲۹۱	۰/۵	۰/۳
۲/۲۰	۳/۸۰	۰/۵۱۱	۰/۴۸۱	۰/۵	۰/۵

### ۸- مراجع

- [1] Zhou J.K., *Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits* Wuhan Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986.
- [2] Sohn H., Farrar C.R., Hemez F.M., Shunk D.D., Stinemates D.W., Nadler B.R., "A Review of Structural Health Monitor in Literature", 1996–2001, *Los Alamos National Laboratory Report*, LA-13976-MS, 2003.
- [3] Hodges D.H., Rutkowski M.J., "Free Vibration Analysis of Rotating Beams by a Variable Order Finite Element Method", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 19, 1981, pp.1459-1466.
- [4] Naguleswaran S., "Lateral Vibration of a Centrifugally Tensioned Euler-Bernoulli Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, No. 5, 1994, pp.613-624.
- [5] Rao S.S., Gupta R.S., "Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, 2001, pp. 103-124.
- [6] Gunda J.B., Singh A.P., chhabra p.S., Ganguli R., "Free Vibration Analysis of Rotating Tapered Blades Using Fourier-p Super Element", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 27, 2007, pp. 243–257.
- [7] Gunda J.B., Ganguli R., "New Rational Interpolation Functions for Finite Element Analysis of Rotating Beams", *International Journal of Mechanical sciences*, Vol. 50, 2008, pp. 578-588.
- [8] Bazoune A., Khulief Y.A., Stephen N.G., "Further Results for Modal Characteristics of Rotating Tapered Timoshenko Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, No. 3, 1999, pp. 157-174.
- [9] Bazoune A., "Relationship between Softening and Stiffening Effects in Terms of South Well Coefficients", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 287, No. 4, 2005, pp. 1027-1030.
- [10] Bazoune A., "Effect of Tapering on Natural Frequencies of Rotating Beams", *Shock and Vibration*, Vol.14, 2007, pp.169-179.
- [11] Attarnejad R., Shahba A., "Basic Displacement Functions for Centrifugally Stiffened Tapered Beams", *International Journal for Numerical*

### ۷- فهرست علائم

مساحت ( $\text{m}^2$ )	$A$
عمق ترک (m)	$a_c$
عرض تیر (m)	$b$
نسبت باریک‌شوندگی	$c$
مدول یانگ (Pa)	$E$
ارتفاع متغیر تیر (m)	$h$
گشتاور دوم سطح ( $\text{m}^4$ )	$I$
طول تیر (m)	$L$

- [25] Yang X.F., Swamidass A.S.J., Seshadri R., "Crack Identification in Vibrating Beams Using Energy Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 2, 2001, pp. 339-357.
- [26] Swamidass A.S.J., Yang X.F., Seshadri R., "Identification of Cracking in Beam Structures Using Timoshenko and Euler Formulations", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 130, No. 11, 2004, pp. 1297-308.
- [27] Kim J.T., Stubbs N., "Crack Detection in Beam-type Structures Using Frequency Data", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 1, 2003, pp. 145-60.
- [28] Gudmundsson P., "Eigen Frequency Changes of Structures due to Cracks, Notches or other Geometrical Changes", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 30, No. 5, 1982, pp. 339-53.
- [29] Razi P., Moradi S., Fatahi L., "Crack Detection in Beams Using Frequency Data", *In: Proceeding of the 12th international conference on fracture*, July 2009, Ottawa, Canada; 2009.
- [30] Cheraghi N., Taheri F., "A Damage Index for Structural Health Monitoring Based on the Empirical Mode Decomposition", *Journal of mechanics of materials and structures*, Vol. 2, No. 1, 2007, pp. 43-62.
- [31] Rezaei D., Taheri F., "Damage Identification in Beams Using Empirical Mode Decomposition", *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 10, 2011, pp. 261-74.
- [32] Horibe T., Watanabe K., "Crack Identification of Plates Using Genetic Algorithm", *Journal Japan Society Pharmacie Mechanical Engineering*, Vol. 49, No. 3, 2006, pp. 403-410.
- [33] Sahoo B., Maity D., "Damage Assessment of Structures Using Hybrid Neuro-Genetic Algorithm", *Journal of applied soft computing*, Vol. 7, 2007, pp. 89-104.
- [34] Casciati S., "Stiffness Identification and Damage Localization via Differential Evolution Algorithms", *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 15, 2008, pp. 436-449.
- [35] Vakil-Baghmishah MT., Peimani M., Homayoun Sadeghi M., Etefagh MM., "Crack Detection in Beam-like Structures Using Genetic Algorithms", *Journal of applied soft computing*, Vol. 8, 2008, pp. 1150-60.
- [36] Holland J.H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Michigan, U. S., 1975.
- [37] Chaudhari T.D., Maiti, S.K., "Modeling of Transverse Vibration of Beam of Linearly Variable Depth with Edge Crack", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, No. 4, 1999, pp. 425- 445.
- [12] Banerjee J.R., Su H., Jackson D.R., "Free Vibration of Rotating Tapered Beams Using the Dynamic Stiffness Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, No. 4, 2006, pp. 1034-1054.
- [13] Wang G., Wereley N.M. "Free Vibration Analysis of Rotating Blades with Uniform Tapers", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 42, No. 12, 2004, pp. 2429-2437.
- [14] Chang C.C., Chen L.W., "Damage Detection of Cracked Thick Rotating Blades by a Spatial Wavelet Based Approach", *Applied acoustics*, Vol. 65, No. 11, 2004, pp. 1095-1111.
- [15] Kim S.S., Kim J.H., "Rotating Composite Beam with a Breathing Crack", *Composite Structures*, Vol. 60, No. 1, 2003, pp.83-90.
- [16] Kuang J.H., Huang B.W., "The Effect of Blade Cracks on Mode Localization in Rotating Bladed Disks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 227, No. 1, 1999, pp. 85-103.
- [17] Huang B.W., "Effect of Number of Blades and Distribution of Cracks on Vibration Localization in a Cracked Pre-twisted Blade System", *International Journal of Mechanical Sciences* , Vol. 48, No. 1, 2006, pp.1-10.
- [18] Yoo H.H., Cho J.E., Chung J., "Modal Analysis and Shape Optimization of Rotating Cantilever Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 290, No. 1, 2006, pp. 223-241.
- [19] Rizos P.F., Aspragathos N., Dimargonas A.D., "Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 3, 1990, pp. 381-8.
- [20] Lele S.P., Maiti S.K., "Modeling of Transverse Vibration of Short Beams for Crack Detection and Measurement of Crack Extension", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, No. 3, 2002, pp. 559-83.
- [21] Qian G.L., Gu S.N., Jiang J.S., "The Dynamic Behavior and Crack Detection of a Beam with a Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, No. 2, 1990, pp. 233-43.
- [22] Nahvi H., Jabbari M., "Crack Detection in Beams Using Experimental Modal data and Finite Element Method", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, 2005, pp. 1477-1497.
- [23] Chondros T.G., Dimargonas A.D., "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, 1998, pp. 17-34.
- [24] Viola E., Federici L., Nobile L., "Detection of Crack Location Using Cracked Beam Element Method for Structural Analysis", *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 39, 2001, pp. 23-35.