



## بهینه‌سازی سینماتیکی مسیر مفصلی روبات دو بازویۀ موازی با قفل‌های بادامکی

سجاد رشیدنژاد<sup>1</sup>، کامبیز قائمی اسگوئی<sup>2\*</sup>، علی مقداری<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک (مکاترونیک)، دانشگاه صنعتی شریف، پردیس بین‌المللی - جزیره کیش

2- استادیار، گروه مکاترونیک، پردیس بین‌المللی کیش دانشگاه تهران، جزیره کیش

3- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

\* پردیس بین‌المللی کیش دانشگاه تهران، جزیره کیش، ایران، کد پستی 7941655665، kambiz\_osgouie@ut.ac.ir

### چکیده

در این مقاله بهینه‌سازی سینماتیکی مسیر، در فضای مفصلی روبات دو بازویۀ موازی در پیکربندی‌های مختلف قفل شدن انجام شده است. برای هر یک از حالت‌های پیکربندی یک مسیر در نظر گرفته شده است. پاسخ بهینه مسیر هر یک از مفاصل، با مینیمم کردن یک تابع هدف در کل مسیر محاسبه شده است. با توجه به تعداد افزونگی درجه آزادی در حالت‌های مختلف پیکربندی، حدس اولیه‌ای از متغیرها در نظر گرفته شده و با استفاده از اصل مینیمم سازی پونترینگ و تعیین نوع شرایط اولیه حاکم بر سیستم، حدس اولیه اصلاح شده و جواب بهینه به دست آمده است. با توجه به جواب بهینه‌ی به دست آمده، برای هر یک از مفاصل مسیر بهینه نیز به دست آمده است. همچنین در هر یک از حالت‌های پیکربندی، اندیس عملکرد بهینه به دست آمده است. همچنین معادلات سینماتیک مستقیم به عنوان قیدهای مسئله در نظر گرفته شده است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 21 تیر 1392  
پذیرش: 15 مهر 1392  
ارائه در سایت: 08 مهر 1393  
کلید واژگان:

دو بازویۀ موازی با قفل‌های بادامکی  
بهینه‌سازی سینماتیکی  
افزونگی درجه آزادی  
اصل مینیمم سازی پونترینگ

## Joint space kinematic optimization of the dual-arm cam-lock robot

Sajad Rashidnejhad<sup>1</sup>, Kambiz Ghaemi Osgouie<sup>2\*</sup>, Ali Meghdari<sup>3</sup>

1- Department of Science and Engineering, Sharif University of Technology, International Campus, Kish, Iran.

2- Department of Mechatronics, University of Tehran, Kish International Campus, Kish, Iran.

3- Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

\* P.O.B 7941655665, University of Tehran, Kish International Campus, Kish Island, Iran, kambiz\_osgouie@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 12 July 2013  
Accepted 07 October 2013  
Available Online 30 September 2014

#### Keywords:

Dual-arm cam-lock robot  
Kinematic optimization  
Redundancy  
Pontryagin's minimum principles

### ABSTRACT

Kinematic trajectory optimization of the dual-arm cam-lock parallel robot in the different lock configuration has been done in this paper. A different path has been considered for each of lock configuration. The optimal trajectory of each joint has been calculated by minimizing an objective function in whole trajectory. According to the number of redundancy in the different configurations, an initial guess of the variables have been considered. Then the initial guesses have been modified and optimum results have been obtained by using Pontryagin's minimum principles and determining the governing initial condition on the system. According to the optimal joint variable, optimal trajectory has been obtained for each of the joints. In all of the configurations, optimal performance index has been achieved. Also the direct kinematic equations have been considered as the constraints of the system.

### 1- مقدمه

قفل می‌شوند، برخی درجات آزادی روبات حذف می‌شود و به همان نسبت از عملگرهای مکانیکی روبات کاسته می‌شود. این موضوع باعث مصرف کمتر انرژی در انجام ماموریتها و همچنین صلبیت بالاتر مکانیزم و در نتیجه دقت دسترسی بهتر خواهد شد. لکن بسته به مسیر حرکتی مورد نظر باید تمام پیکربندی‌های قفل شونده روبات که امکان‌پذیر هستند جداگانه بررسی شده و با توجه به مقدار انرژی مصرفی تصمیم‌گیری شود.

روبات‌های موازی کارایی بسیار خوبی از نظر دقت، استحکام، و توانایی برای حمل بارهای بزرگ را دارند. روبات‌های همکار محبوبیت روز افزونی در صنعت ماشین ابزار دارند. همچنین می‌توان به کاربردهای آنها در زمینه نجوم و شبیه‌سازهای پرواز اشاره کرد.

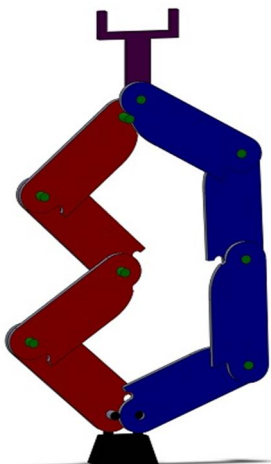
روبات دو بازویۀ موازی با قفل‌های بادامکی، یک بازوی مکانیکی با قابلیت پیکربندی، تشکیل شده از دو بازوی موازی همکار است. بازوها می‌توانند برخی از درجات آزادی خود را با قفل کردن به یکدیگر از دست بدهند. در این مکانیزم، عناصر اساساً تصویر آینه یکدیگر هستند. بدنه روبات توسط تعدادی بادامک ساخته شده است. این بادامک‌ها به گونه‌ای ساخته شده‌اند که در صورت نیاز می‌توانند به یکدیگر قفل شوند. به دلیل اینکه بادامک‌ها قابلیت قفل شدن در هم را دارند، درجه آزادی، درجه استحکام، و فضای کاری روبات تغییر خواهند کرد. بنابراین می‌تواند پیکربندی‌های مختلفی داشته باشد. در واقع هنگامی که بازوها در بخشی از زنجیره مکانیکی یکدیگر

حالت اول، پیکربندی بدون قفل است. شکل 1 پیکربندی بدون قفل بازوها را نشان می‌دهد. شکل 2 پیکربندی بازوها با قفل اول را نشان می‌دهد. در این حالت فقط لینک‌های اول هر کدام از بازوها با هم قفل می‌شوند. در حالت سوم، لینک‌های سوم و چهارم هر یک از بازوها با همدیگر قفل می‌شوند و این پیکربندی قفل دوم نامیده می‌شود. این پیکربندی در شکل 3 نشان داده شده است. حالت چهارم به این صورت است که لینک‌های اول و دوم هر یک از بازوها با هم قفل می‌شوند و این حالت، قفل سوم نامیده می‌شود. شکل 4 پیکربندی بازوها با قفل سوم را نشان می‌دهد.

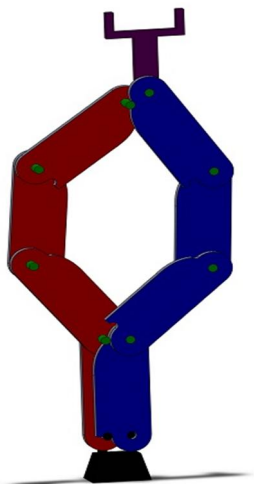
## 2- سینماتیک مستقیم و ماتریس ژاکوبین بازوها

شکل 5 روبات دو بازویۀ موازی را با پارامترهای مختلف آن نشان می‌دهد. با توجه به پیکربندی ربات، روابط سینماتیک مستقیم برای هر یک از بازوهای راست و چپ، به صورت رابطه (1) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{R1}C_{R1} + l_{R2}C_{R12} + l_{R3}C_{R123} + l_{R4}C_{R1234} \\ &= l_{L1}C_{L1} + l_{L2}C_{L12} + l_{L3}C_{L123} + l_{L4}C_{L1234} \\ x_2 &= l_{R1}S_{R1} + l_{R2}S_{R12} + l_{R3}S_{R123} + l_{R4}S_{R1234} \\ &= l_{L1}S_{L1} + l_{L2}S_{L12} + l_{L3}S_{L123} + l_{L4}S_{L1234} \end{aligned} \quad (1)$$



شکل 1 پیکربندی بدون قفل بازوها



شکل 2 پیکربندی بازوها با قفل اول

ربات دو بازویۀ موازی با قفل‌های بادامکی را می‌توان به عنوان ربات‌های همکار نیز نام برد. دلیل این اسم‌گذاری همکاری بین بازوها برای انجام یک کار به صورت مشترک می‌باشد که یک مبحث جدیدی در زمینه علم رباتیک شده است. از توانایی‌های این ربات‌ها می‌توان به انجام کارهایی که به لحاظ پیچیدگی، کارایی و یا دقت از عهده یک ربات خارج است اشاره کرد. با توجه به این که این سیستم‌ها دارای نامعینی استاتیکی و دینامیکی می‌باشند، به کارگیری این سیستم‌ها را با مشکلاتی همراه می‌سازند.

در دهه‌های اخیر، کارهای زیادی از قبیل بررسی سینماتیکی، بررسی دینامیکی، کنترل و بهینه‌سازی مسیر، بر روی ربات‌های همکار انجام شده است. سراکین و همکارانش [1] یک توسعه چشم‌گیری از یک ربات موازی جدید با دو درجه آزادی فعال ارائه نموده‌اند. آن‌ها این توسعه را بر روی بهینه‌سازی فضای کاری و میدان نیرو نشان دادند. همچنین گوسلین و همکارانش [2] یک روشی برای تولید مسیر برای مکانیزم‌های موازی معلق توسط کابل ارائه کردند. برای این منظور آن‌ها یک ربات دو درجه آزادی صفحه‌ای را مورد بررسی قرار دادند. لیو و همکارانش [3] روشی برای تولید مسیر برای انگشتان یک ربات، بر اساس پیکربندی کنترل نقطه‌ها پیشنهاد کردند. از این روش برای بسته بندی صنعتی استفاده کردند. مینگ و همکارانش [4] هدفی برای تولید مسیر ربات‌های سریال - موازی هیبریدی با افزودنی درجه آزادی با بررسی بهترین عملکرد برای سفتی ارائه کرده‌اند.

ویتنی و لجیس [5,6] با استفاده از شبه معکوس ماتریس ژاکوبین مفاصل، معادلات سینماتیک معکوس در سطح سرعت مفاصل را به دست آورده‌اند. یوچی یاما و همکارانش [7] از چندجمله‌ای‌های محدود به عنوان تقریبی از زوایای مفاصل و تعیین ضرایب مجهول آن به وسیله اعداد تصادفی استفاده کرده‌اند. ناکورگا و ین [8] برای تقریب مسیر با شرایط اولیه نامشخص، از مجموع چندجمله‌ای‌ها و تعداد محدودی از جملات سری فوریه استفاده کرده‌اند. کیو و ازاکي [9] از تکنیک‌های درون‌یابی B اسپیلاین یکنواخت برای حل مسئله استفاده کرده‌اند. سپس استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی مورد توجه واقع شد. بر همین اساس چانگ [10] برای حل معادلات، یک اندیس تعریف کرد و آن را هم زمان با قید معادلات سینماتیک، بهینه کرد. با توجه به نظریه حساب تغییرات و با به دست آوردن معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، به دست آوردن مقدار بهینه برای اندیس مورد نظر تبدیل به حل یک مسئله شرط مرزی می‌شود [11-13]. اندیس مورد نظر می‌تواند سینماتیکی یا دینامیکی باشد. در صورتی که پارامترهای وابسته به اندیس، سینماتیکی باشند و برای به دست آوردن مقادیر بهینه از روابط سینماتیکی استفاده شود، اندیس سینماتیکی نامیده می‌شود. اگر پارامترهای وابسته به اندیس، دینامیکی (نیرو و گشتاور) باشند اندیس دینامیکی نامیده می‌شود.

اسگویی و همکاران [14] با معرفی روبات دو بازویۀ موازی با قفل‌های بادامکی به ارائه روشی جهت یافتن پیکره بهینه آن در حالت استاتیکی برای اعمال نیروی حداکثر در نقطه‌ای از فضای کاری و در راستای از پیش تعریف شده‌ای پرداختند.

در این مقاله هدف بررسی سینماتیکی ربات دو بازویۀ موازی با قفل‌های بادامکی، در پیکربندی‌های مختلف قفل شدن می‌باشد. این ربات دارای چهار حالت برای قفل شدن است. با توجه به اینکه این روبات در هر یک از لینک‌های دارای قفل‌های بادامکی است لذا لینک‌ها می‌توانند با یک دیگر قفل شده و پیکربندی‌های مختلفی داشته باشند.

در صورتی که متغیرهای استفاده شده در رابطه (1) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$C_{R1234} = \cos(\theta_{R1} + \theta_{R2} + \theta_{R3} + \theta_{R4})$$

$$S_{R1234} = \sin(\theta_{R1} + \theta_{R2} + \theta_{R3} + \theta_{R4})$$

$$C_{L1234} = \cos(\theta_{L1} + \theta_{L2} + \theta_{L3} + \theta_{L4})$$

$$S_{L1234} = \sin(\theta_{L1} + \theta_{L2} + \theta_{L3} + \theta_{L4})$$

بازوی مکانیکی را با تعداد  $n$  متغیر فضای مفصلی  $r = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$  و  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$  فضای کاری  $m$  متغیر فضای کاری در نظر بگیرید، ماتریس ژاکوبین که با حرف  $J$  نمایش داده می‌شود، یک ماتریس انتقال خطی است که یک بردار سرعت  $n$  بعدی ( $\dot{\theta}$ ) از فضای مفصلی را بر یک بردار سرعت  $m$  بعدی ( $\dot{r}$ ) از فضای کاری می‌نگارد، که به صورت رابطه (2) بیان می‌شود.

$$\dot{r} = J\dot{\theta} \quad (2)$$

رابطه (2) با جزئیات بیشتر به صورت ماتریسی نیز نوشته می‌شود. در رابطه (3) داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

به طوری که متغیرهای استفاده شده در رابطه (3) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$x_i = f_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

### 3- مدل سازی

#### 3-1- طرح مسئله

بردارهای  $r \in R^m$  و  $\theta \in R^n$  به ترتیب، نشان دهنده متغیرهای فضای مفصلی و متغیرهای فضای کاری می‌باشند. به ازای  $n > m$  سیستم دارای افزونگی درجه آزادی است. هدف پیدا کردن مسیر  $\theta(t)$  در فضای مفاصل است، به طوری که مجری نهایی از مختصات  $X(t_0)$  شروع به حرکت نماید، مسیر  $X(t)$  را طی نماید و به مختصات  $X(t_f)$  برسد. نشان دهنده زمان اولیه و  $t_f$  نشان دهنده زمان نهایی است. معادله سینماتیکی بازوها توسط رابطه (4) بیان می‌شود.

$$r(t) = f(\theta) \quad (4)$$

در صورتی که از رابطه (4) نسبت به زمان مشتق گرفته شود، معادله به فرم دیفرانسیلی در آمده و به صورت رابطه (5) بازنویسی می‌شود.

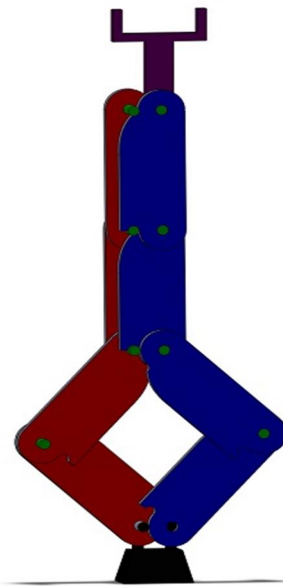
$$\dot{r}(t) = J(\theta)\dot{\theta} \quad (5)$$

که  $J(\theta) \in R^{m \times n}$  نشان دهنده ماتریس ژاکوبین است. فرم کلی جواب برای رابطه (5) در رابطه (6) نشان داده شده است.

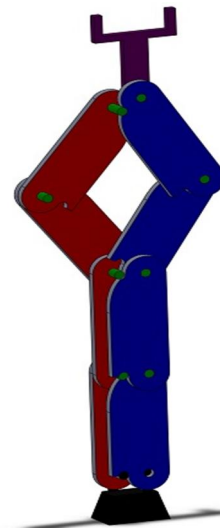
$$\dot{\theta} = J^\# \dot{r}(t) + (I_n - J^\# J)y \quad (6)$$

در رابطه بالا،  $J^\#(\theta) \in R^{n \times m}$  نشان دهنده معکوس ضعیف ماتریس ژاکوبین و  $I_n \in R^{n \times n}$  نشان دهنده ماتریس همانی است.  $J^\#$  در حالت‌های غیر تکین به صورت رابطه (7) محاسبه می‌شود.

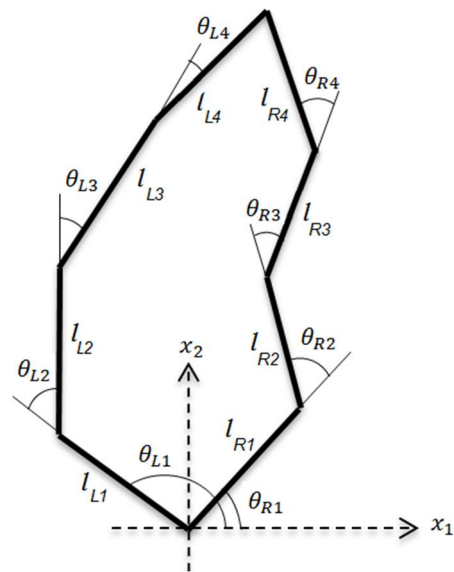
$$J^\# = (J^T J)^{-1} J^T \quad (7)$$



شکل 3 پیکربندی بازوها با قفل دوم



شکل 4 پیکربندی بازوها با قفل سوم



شکل 5 پارامترهای مربوط به بازوهای روبات

در صورتی که متغیر استفاده شده در رابطه (16) به صورت رابطه (17) بیان می‌شود:

$$f_0 = \dot{\theta}^T \dot{\theta} \quad (17)$$

در اندیس عملکرد بالا،  $f_0$ ، باعث آسان شدن محاسبات همپلتونین می‌شود و وجود جواب را تضمین می‌کند. در واقع با تعریف معادلات (16) و (17) مسیر بهینه به گونه‌ای به دست خواهد آمد که انرژی کینتیکی مصرفی توسط عملگرهای روبات بر روی آن مسیر حداقل شوند. با توجه به اینکه اندیس عملکرد بر حسب  $\dot{\theta}$  می‌باشد و همچنین با در نظر گرفتن این موضوع که  $\gamma$  در آن به صورت درجه دو ظاهر شده است، نتیجه گرفته می‌شود که حل معادله (13) منجر به جواب تحلیلی برای  $\gamma$  به صورت بسته می‌شود که به صورت رابطه (18) بیان می‌شود (پیوست را ببینید):

$$\gamma = -\frac{1}{2}(I_n - J^\#) \lambda \quad (18)$$

ترم سمت راست معادله بالا نشان می‌دهد که ورودی بهینه معادله (15)، نیمی از طرح متعام بردار الحاقی بر فضای افزونگی درجه آزادی است.

با جایگذاری معادله (18) در معادله (15) و با توجه به معادلات (11) تا (14)، نهایتاً معادلات به شکل روابط (19)، (20) و (21) ساده می‌شوند:

$$\dot{\theta} = f \quad (19)$$

$$\dot{\lambda} = \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^T (2f - \lambda) \quad (20)$$

$$f = J^\# \dot{r}(t) + \frac{1}{2}(I_n - J^\#) \lambda \quad (21)$$

### 3-3- شرایط مرزی حاکم بر سیستم

هر کدام از معادلات 19 و 20 دارای  $n$  معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند که در مجموع سیستم دارای  $2n$  معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. بنابراین برای به دست آوردن حل بهینه سیستم،  $2n$  شرط اولیه باید تعیین گردد. رابطه (22) در لحظه  $t = t_0$  باید برقرار باشد:

$$r(t_0) = f(\theta(t_0)) \quad (22)$$

معادله بالا تعداد  $m$  شرط را تعیین می‌کند. در لحظه  $t = t_f$  در انتهای مسیر به دلیل وجود افزونگی درجه آزادی،  $\theta_f$  به صورت آزاد است، ولی با توجه به معلوم بودن زمان خاتمه مسیر و همچنین با توجه به معادلات حاکم بر سیستم این نوع مسائل را، مسئله حالت نهایی آزاد با زمان معلوم می‌نامند که در این موارد رابطه (23) برقرار است:

$$\lambda(t_f) = 0 \quad (23)$$

رابطه 23 تعداد  $n$  شرط را تعیین می‌کند. از دو رابطه اخیر در مجموع تعداد  $n + m$  شرط معلوم می‌گردد. تعداد  $n - m$  شرط دیگر باقی می‌ماند که برای تعیین آن از شرط متعام  $\lambda$  بر دسته معادلات سینماتیکی مستقیم در ابتدای مسیر استفاده می‌شود. این شرط بر اساس رابطه (24) بیان می‌شود:

$$\{I_n - J^\#(\theta(t_0))\} \lambda(t_0) = 0 \quad (24)$$

رابطه 24 تعداد  $n - m$  شرط را تعیین می‌کند و در مجموع  $2n$  شرط اولیه لازم در دو انتهای بازه انتگرال‌گیری تعیین می‌گردد. با توجه به شرایط مرزی موجود در دو بازه انتگرال‌گیری، تعیین مسیر بهینه نیاز به حل مسئله شرط مرزی دو طرفه خواهد داشت. روش شلیک از جمله حل این نوع مسائل به شمار می‌آید.

$\gamma \in R^n$  یک بردار کاملاً اختیاری است. جمله اول معادله (6) جواب خصوصی معادله (5) است که از مکمل متعام فضای پوچ ماتریس ژاکوبین استخراج شده است. جمله دوم معادله (6) نشان دهنده جواب عمومی معادله (5) می‌باشد که  $(I_n - J^\#)$  را توسط بردار اختیاری  $\gamma$ ، در فضای پوچ ژاکوبین می‌نگارد. در حقیقت این جواب عمومی نشان دهنده قابلیت افزونگی درجات آزادی سیستم می‌باشد و همچنین می‌تواند جواب‌های متفاوتی برای  $\dot{\theta}(t)$  تولید کند. قابلیت فوق اجازه بهینه‌سازی یک اندیس را برای یک عملیات مشخص می‌دهد.

این مسئله می‌تواند از طریق روش‌های کنترل بهینه همانند اصل مینیمم سازی پونترینگن، مورد بحث قرار گیرد.

### 2-3- اصل مینیمم سازی پونترینگن

سیستم دینامیکی در رابطه (8) مفروض است:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (8)$$

در صورتی که  $x \in R^n$  متغیرهای حالت و  $u \in R^m$  متغیرهای ورودی هستند.  $\dot{x}$  نشان دهنده مشتق  $x$  نسبت به زمان است. هدف مسئله کنترل بهینه، یافتن  $u(t)$  در بازه  $t_0 \leq t \leq t_f$  می‌باشد که متغیرهای حالت را از یک مقادیر اولیه  $x(t_0)$  به مقادیر نهایی  $x(t_f)$  انتقال دهد به صورتی که کل مسیر، طبق رابطه (9)، تابع عملکرد:

$$PI = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u) dt \quad (9)$$

را بهینه سازد.

همپلتونین سیستم، با در نظر گرفتن بردار الحاقی  $\lambda \in R^n$ ، با رابطه (10) بیان می‌شود:

$$H(\lambda, x, u) = -f_0 + \lambda^T f \quad (10)$$

$u^*$  مسئله کنترل بهینه برای بازه زمانی  $t_0 \leq t \leq t_f$  خواهد بود در صورتی که روابط (11) تا (14) برقرار باشند.

$$\dot{x}^*(t) = \left( \frac{\partial H(\lambda^*, x^*, u^*)}{\partial \lambda} \right)^T \quad (11)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left( \frac{\partial H(\lambda^*, x^*, u^*)}{\partial x} \right)^T \quad (12)$$

$$\frac{\partial H(\lambda^*, x^*, u^*)}{\partial u} = 0 \quad (13)$$

$$H(\lambda^*, x^*, u^*) \leq H(\lambda^*, x^*, u) \quad (14)$$

روابط بالا ترکیبی از معادلات جبری و معادلات دیفرانسیل می‌باشند. بنابراین با حل  $m$  عدد معادله جبری (13)، و محاسبه  $u^*(t)$  و سپس با جایگذاری در رابطه (11) و (12)، مسیر بهینه  $\dot{x}^*(t)$  قابل محاسبه خواهد بود. روابط بالا شرط‌های لازم برای مینیمم کردن همپلتونین سیستم می‌باشند. رابطه (13)، فقط در شرایطی که همپلتونین، نسبت به  $u$ ، خطی یا درجه دو باشد، دارای حل تحلیلی است، در غیر این صورت، در هر مرحله باید به صورت انتگرال‌گیری عددی حل شود. این امر منجر می‌شود که محاسبات فوق‌العاده سنگین شوند.

با توجه به روابط (6)، (8) و (9) مسئله کنترل بهینه برای افزونگی درجه آزادی، به صورت روابط (16) و (17) در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{\theta} = f(\theta, \gamma) \quad (15)$$

$$PI = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\theta, \gamma) dt \quad (16)$$

4- روش شلیک

در تحلیل عددی، روش شلیک روشی برای حل مسئله مقدار مرزی توسط کاهش آن در جوابی از مسئله مقدار اولیه است. پروسه حل در روش شلیک به این صورت می‌باشد که در ابتدا فرض اولیه‌ای در یک بازه انتگرال‌گیری در نظر گرفته می‌شود تا شرایط مرزی در یک بازه کامل شود. سپس انتگرال‌گیری انجام می‌شود و مقادیر در طرف دیگر بازه به دست می‌آیند. مقادیر به دست آمده در طرف دیگر بازه با شرایط مرزی موجود مقایسه می‌شود. در صورت بروز خطا فرض اولیه اصلاح شده و انتگرال‌گیری دوباره انجام می‌شود. این کار تا زمانی که خطا صفر شود و مسئله به جواب واقعی خود همگرا شود تکرار می‌شود.

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد،  $2n$  شرط اولیه لازم در دو انتهای بازه انتگرال‌گیری معلوم است که از این شرط‌ها، تعداد  $n$  شرط در  $t = t_0$  و تعداد  $n$  شرط در  $t = t_f$  می‌باشند. بنابراین باید در  $t = t_0$ ، تعداد  $n$  فرض اولیه در نظر گرفت و انتگرال‌گیری را انجام داد تا مقادیر در طرف دیگر بازه، یعنی در  $t = t_f$  به دست آیند. سپس مقادیر به دست آمده را با  $n$  شرط موجود مقایسه کرد. با توجه به اینکه  $\theta(t_0)$  شرط  $r(t_0) = f(\theta(t_0))$  را ارضا می‌کند، بر این اساس  $\theta(t_f)$  نیز می‌تواند شرط  $r(t_f) = f(\theta(t_f))$  را ارضا کند. با توجه به این نکته، در صورتی که اگر معادله (22) را به جای  $t_0$  در  $t_f$  در نظر گرفته شود، تعداد شرایط مرزی معلوم در  $t = t_f$  مجموع  $n+m$  می‌شود و فقط  $n-m$  فرض انجام می‌شود. این امر باعث می‌شود تا حجم محاسبات کاهش یافته و سرعت همگرایی به جواب واقعی افزایش یابد.

در نهایت، شرایط مرزی موجود مطابق روابط (25) بیان می‌شود:

$$r(t_0) = f(\theta(t_0))$$

$$e = \{I_n - J^\#(\theta(t_0))J(\theta(t_0))\} \lambda(t_0)$$

$$\lambda(t_f) = 0 \tag{25}$$

با توجه به شرایط مرزی موجود در  $t = t_f$ ، انتگرال‌گیری به صورت پسرو انجام می‌گیرد و مقادیر  $\theta$  و  $\lambda$  در  $t = t_0$  به دست می‌آیند. اگر شرط تعامد در ابتدای بازه برقرار نبود، فرض‌های اولیه باید طوری تصحیح شوند که شرط تعامد برقرار شده و  $e = 0$  شود.

اگر بردار  $S$  به عنوان بردار فرضی اولیه در نظر گرفته شود، برای تصحیح این بردار در هر تکرار به ازای  $e \neq 0$  از بسط تیلور استفاده می‌شود. طبق رابطه (26) داریم:

$$S_{n+1} = S_n - \left(\frac{\partial e}{\partial S}\right)^{-1} \Big|_n e_n \tag{26}$$

بردار  $S$  تا زمانی که دقت مورد نظر ارضا نشود، توسط رابطه بازگشتی (26) تصحیح می‌شود.

5- مسئله نمونه

هدف مسئله بررسی و به دست آوردن مسیر بهینه برای روبات دو بازویۀ موازی در حالت‌های مختلف پیکربندی است.

5-1- پیکربندی بدون قفل

در این پیکربندی هیچ کدام از لینک‌ها با یکدیگر قفل نمی‌باشند. تعداد درجات آزادی در این پیکربندی شش می‌باشد که از رابطه گروبلر محاسبه شده است. موقعیت مجری نهایی (متغیرهای فضای کاری) در صفحه،

$r(t) = [x(t) \ y(t)]^T$  می‌باشد. بنابراین در این پیکربندی، روبات دارای  $n - m = 6 - 2 = 4$  افزونگی درجه آزادی می‌باشد. با توجه به تعداد افزونگی درجه آزادی، برای حل مسئله بهینه‌سازی، بردار  $S$  دارای 4 مؤلفه خواهد بود. بدین ترتیب که 4 فرض اولیه باید در نظر گرفته شود.

فرض‌های در نظر گرفته شده در این حالت،  $\theta_{R1}$ ،  $\theta_{R2}$ ،  $\theta_{L1}$ ، و  $\theta_{L2}$  در لحظه  $t = t_f$  می‌باشد. با در نظر گرفتن این فرض‌ها، از طریق روابط سینماتیک معکوس بقیه متغیرهای فضای مفصلی بر اساس متغیرهای فرضی به دست می‌آیند. پروسه بهینه‌سازی مسیر بر همین اساس شروع می‌شود و در هر گام متغیرهای فرضی اصلاح می‌شوند و دوباره مقادیر اصلاح شده فرض‌ها در روابط سینماتیک معکوس قرار می‌گیرند و مقادیر جدیدی از دیگر متغیرهای فضای مفصلی به دست می‌آیند. این کار تا زمان رسیدن به دقت مورد نظر ادامه پیدا می‌کند.

5-1-1- نتایج بهینه‌سازی پیکربندی بدون قفل

بر اساس مطالب ذکر شده، بهینه‌سازی برای یک مسیر مورد نظر انجام شده است. مجری نهایی، باید مسیر  $A$ ، که توسط رابطه (27) بیان می‌شود را طی کند:

$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \frac{1}{4}[1 - \cos(\pi t)] \end{bmatrix} \tag{27}$$

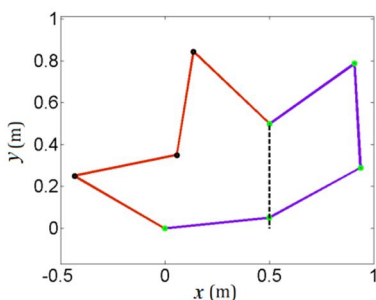
بدین ترتیب که،  $t \in [0, 1]$ .

شکل‌های 6 تا 15، پیکربندی بهینه بازوها، مسیر بهینه مفاصل بازوهای سمت راست و چپ، و مقادیر بهینه اندیس عملکرد را نشان می‌دهد. جدول 1، جزئیات بهینه‌سازی را که شامل متغیرهای حدسی اولیه بردار  $S$ ، مقادیر بهینه به دست آمده، تعداد گام‌های تکرار شده برای رسیدن به دقت مورد نظر و مقدار بهینه اندیس عملکرد است در  $t = t_f$  نشان می‌دهد.

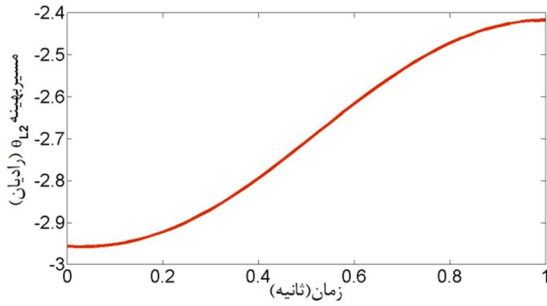
5-2- پیکربندی روبات با قفل اول

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد در این پیکربندی لینک‌های اول هر کدام از بازوها بر یکدیگر قفل می‌شوند. در این حالت متغیرهای فضای مفصلی  $\theta_{R1}$  و  $\theta_{L1}$  دارای مقادیر ثابتی با مقدار  $\pi/2$  می‌باشند. تعداد درجات آزادی در این پیکربندی چهار است.

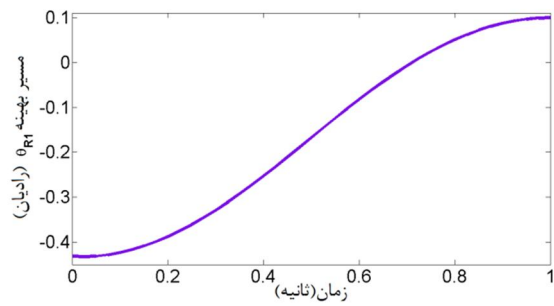
با توجه به متغیرهای فضای کاری روبات، در این پیکربندی بازوها دارای  $n - m = 4 - 2 = 2$  افزونگی درجه آزادی می‌باشد. لازم است که برای بردار  $S$  دو فرض اولیه در نظر گرفته شود. برای این حالت  $\theta_{L1}$  و  $\theta_{R1}$  به عنوان فرض‌های اولیه در نظر گرفته می‌شوند. بقیه متغیرها از طریق روابط سینماتیک معکوس به دست آمده و پروسه حل مسئله کنترل بهینه شروع می‌شود.



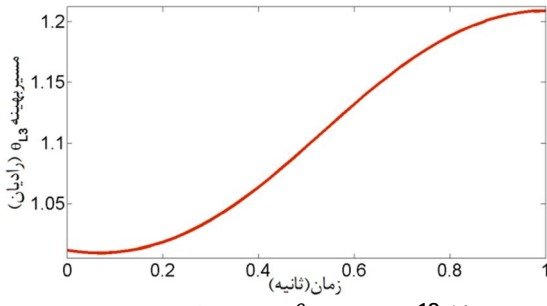
شکل 6 پیکربندی بدون قفل



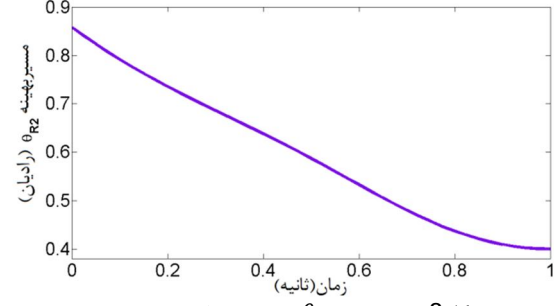
شکل 12 مسیر بهینه  $\theta_{L2}$  نسبت به زمان



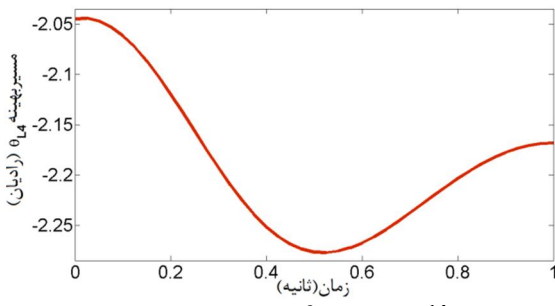
شکل 7 مسیر بهینه  $\theta_{R1}$  نسبت به زمان



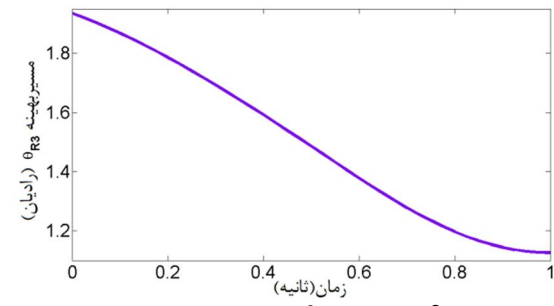
شکل 13 مسیر بهینه  $\theta_{L3}$  نسبت به زمان



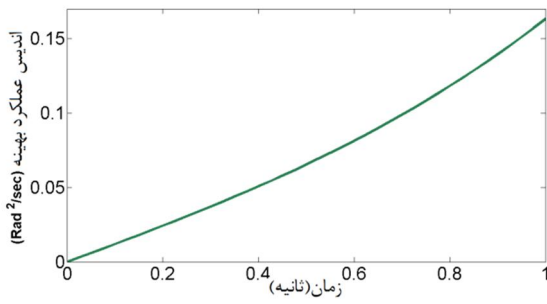
شکل 8 مسیر بهینه  $\theta_{R2}$  نسبت به زمان



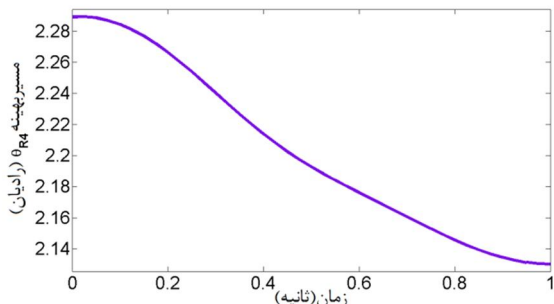
شکل 14 مسیر بهینه  $\theta_{L4}$  نسبت به زمان



شکل 9 مسیر بهینه  $\theta_{R3}$  نسبت به زمان



شکل 15 اندیس عملکرد بهینه نسبت به زمان



شکل 10 مسیر بهینه  $\theta_{R4}$  نسبت به زمان

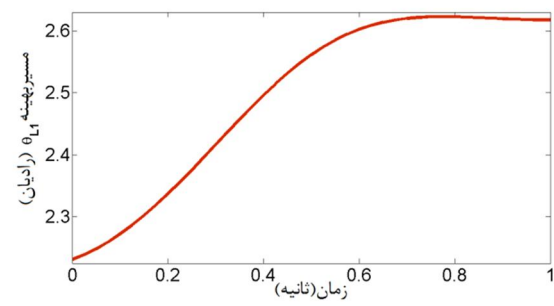
5-2-1- نتایج بهینه‌سازی برای پیکربندی با قفل اول

مسیر A، که برای پیکربندی بدون قفل در نظر گرفته شده بود، به دلیل اینکه خارج از فضای کاری روبات است، برای این پیکربندی مجاز نیست. بنابراین مسیر دیگری در نظر گرفته شده است. در این حالت، مجری نهایی باید مسیر B، که توسط رابطه (28) بیان می‌شود را طی کند:

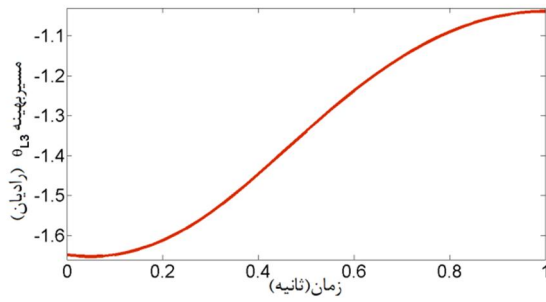
$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 + 0.15[1 - \cos(\pi t)] \\ 1.5x(t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

در صورتی که  $t \in [0,1]$ .

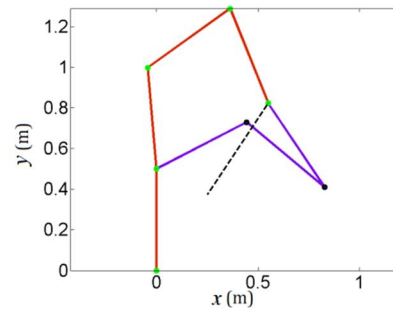
شکل‌های 16 تا 23، پیکربندی بهینه بازوها، مسیر بهینه مفاصل بازوهای



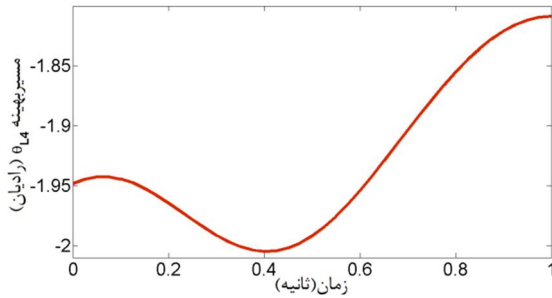
شکل 11 مسیر بهینه  $\theta_{L1}$  نسبت به زمان



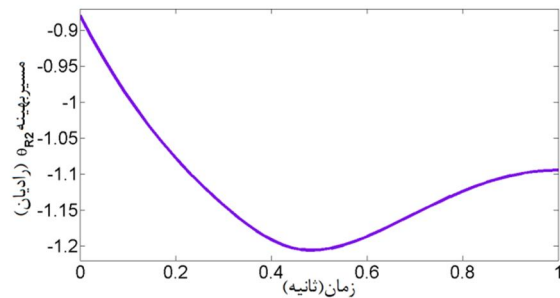
شکل 21 مسیر بهینه  $\theta_{L3}$  نسبت به زمان



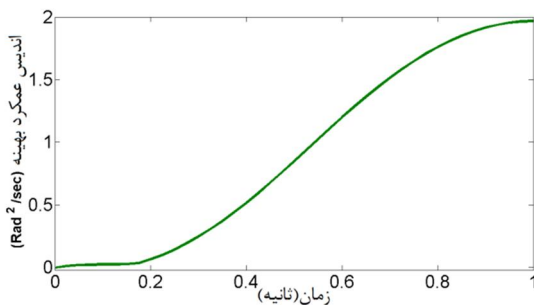
شکل 16 پیکربندی با قفل اول



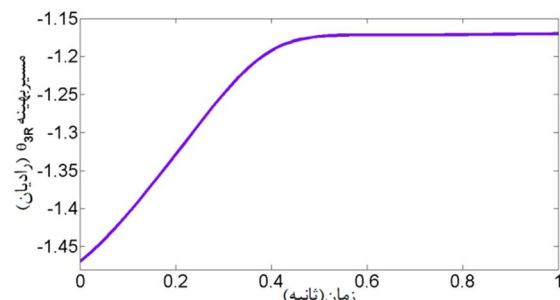
شکل 22 مسیر بهینه  $\theta_{L4}$  نسبت به زمان



شکل 17 مسیر بهینه  $\theta_{R2}$  نسبت به زمان



شکل 23 اندیس عملکرد بهینه نسبت به زمان



شکل 18 مسیر بهینه  $\theta_{R3}$  نسبت به زمان

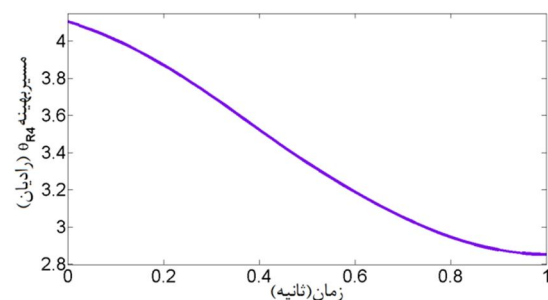
سمت راست و چپ، و مقادیر بهینه اندیس عملکرد را نشان می‌دهد. جدول 1، جزئیات بهینه‌سازی را که شامل متغیرهای حدسی اولیه بردار  $S$ ، مقادیر بهینه به دست آمده، تعداد گام‌های تکرار شده برای رسیدن به دقت مورد نظر و مقدار بهینه اندیس عملکرد است در  $t = t_f$  نشان می‌دهد.

### 3-5- پیکربندی روبات با قفل دوم

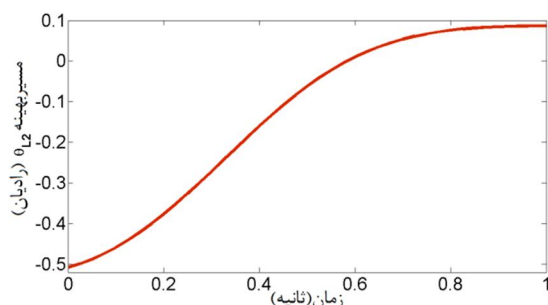
حالت پیکربندی در این حالت به گونه‌ای می‌باشد که لینک‌های سوم و چهارم هر یک از بازوها با یکدیگر قفل می‌شوند. در این حالت  $\theta_{R4} = \theta_{L4} = 0$  می‌باشند. تعداد درجات آزادی در این پیکربندی سه است. در این حالت، روبات دارای  $1 = 3 - 2 = n - m$  افزونگی درجه آزادی می‌باشد. با توجه به تعداد افزونگی درجه آزادی، تنها لازم است که یک فرض اولیه در نظر گرفته شود. بدین منظور  $\theta_{R1}$  به عنوان فرض اولیه در نظر گرفته می‌شود سپس مقادیر متغیرهای مفصلی بهینه توسط روابط سینماتیک معکوس به دست می‌آیند.

### 3-5-1- نتایج بهینه‌سازی برای پیکربندی با قفل دوم

با توجه به اینکه مسیر  $A$ ، در این پیکربندی نیز خارج از فضای کاری روبات است برای حل مسئله کنترل بهینه برای این پیکربندی مسیر  $B$  در بازه زمانی  $t \in [0,1]$  نظر گرفته می‌شود.



شکل 19 مسیر بهینه  $\theta_{R4}$  نسبت به زمان

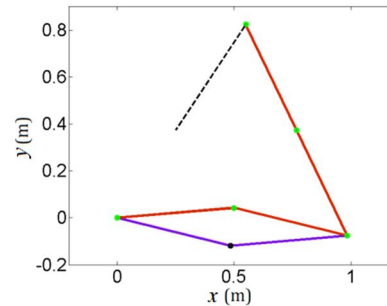


شکل 20 مسیر بهینه  $\theta_{L2}$  نسبت به زمان

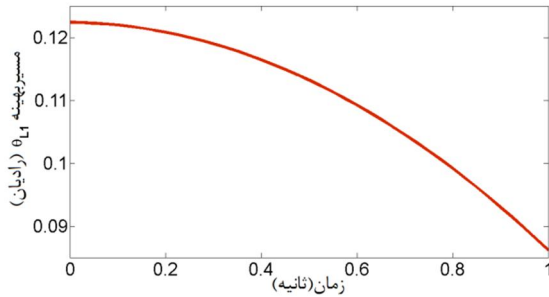
شکل‌های 24 تا 31، پیکربندی بهینه بازوها، مسیر بهینه مفصل بازوهای سمت راست و چپ، و مقادیر بهینه اندیس عملکرد را نشان می‌دهد. جدول 1، جزئیات بهینه‌سازی را که شامل متغیرهای حدسی اولیه بردار  $S$ ، مقادیر بهینه به دست آمده، تعداد گام‌های تکرار شده برای رسیدن به دقت مورد نظر و مقدار بهینه اندیس عملکرد است در  $t = t_f$  نشان می‌دهد.

4-5- پیکربندی با قفل سوم

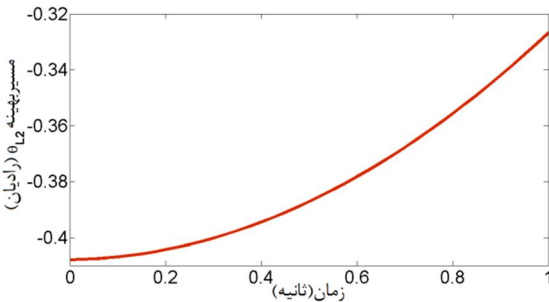
آخرین حالت، پیکربندی با قفل سوم می‌باشد. در این حالت لینک‌های اول و دوم هر کدام از بازوها با یکدیگر قفل می‌شوند. در این پیکربندی  $\theta_{R1} = \theta_{L1} = \pi/2, \theta_{R2} = \theta_{L2} = 0$



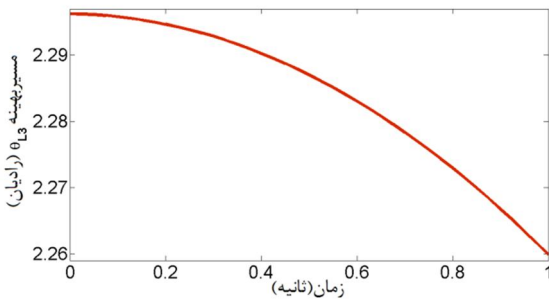
شکل 24 پیکربندی با قفل دوم



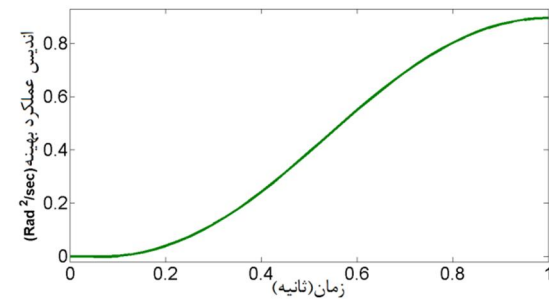
شکل 28 مسیر بهینه  $\theta_{L1}$  نسبت به زمان



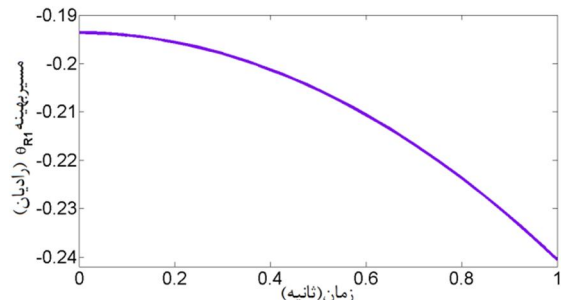
شکل 29 مسیر بهینه  $\theta_{L2}$  نسبت به زمان



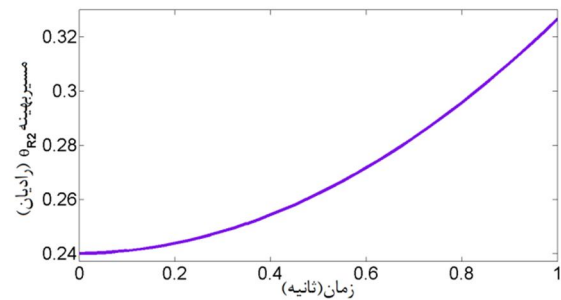
شکل 30 مسیر بهینه  $\theta_{L3}$  نسبت به زمان



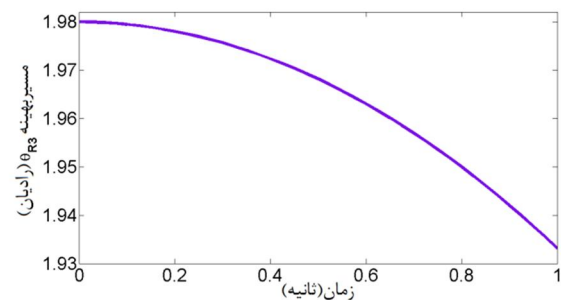
شکل 31 اندیس عملکرد بهینه نسبت به زمان



شکل 25 مسیر بهینه  $\theta_{R1}$  نسبت به زمان



شکل 26 مسیر بهینه  $\theta_{R2}$  نسبت به زمان



شکل 27 مسیر بهینه  $\theta_{R3}$  نسبت به زمان

این پیکربندی دو می‌باشد. به این ترتیب،  $n - m = 2 - 2 = 0$  بنابراین، در این حالت سیستم دارای افزونگی درجه آزادی نیست لذا نیازی به حل مسئله کنترل بهینه در این حالت نمی‌باشد.

4-5-1- نتایج بهینه‌سازی برای پیکربندی با قفل سوم

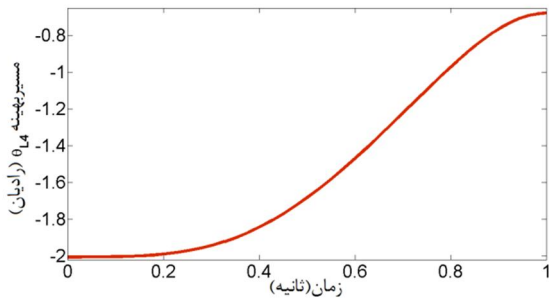
مسیر A، خارج از فضای کاری روبات با این پیکربندی می‌باشند. برای این حالت نیز مسیر B در نظر گرفته می‌شود. مجری نهایی روبات باید مسیر B را در بازه زمانی  $t \in [0, 1]$  طی کند.



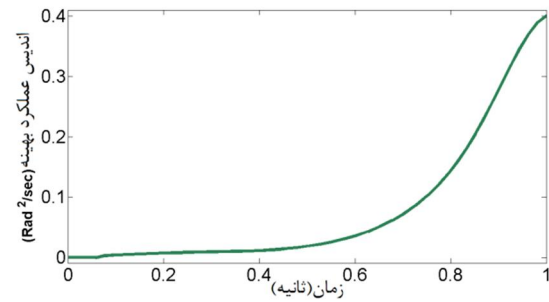
شکل‌های 32 تا 37، پیکربندی بهینه بازوها، مسیر بهینه مفصل بازوهای سمت راست و چپ، و مقادیر بهینه اندیس عملکرد را نشان می‌دهد. جدول 1، مقادیر نهایی متغیرهای فضای مفصلی را نشان می‌دهد.

6- نتیجه‌گیری

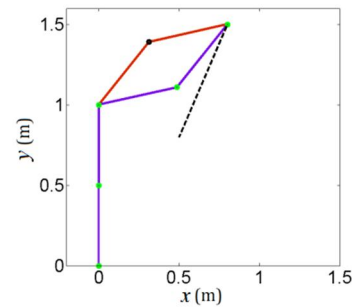
در این مقاله، بهینه‌سازی سینماتیکی مسیر برای روبات دو بازویه موازی با قفل‌های بادامکی با در نظر گرفتن افزودنی درجه آزادی انجام شده است. پیکربندی‌های مختلف قفل شدن، مورد بررسی قرار گرفت. روابط مسئله بهینه‌سازی سینماتیکی با افزودنی درجه آزادی برای روبات با تعداد  $n$  مفصل، با استفاده از اصل مینیمم سازی پونترینگن به دست آمد. عمل بهینه‌سازی به



شکل 36 مسیر بهینه  $\theta_{L4}$  نسبت به زمان



شکل 37 اندیس عملکرد بهینه نسبت به زمان

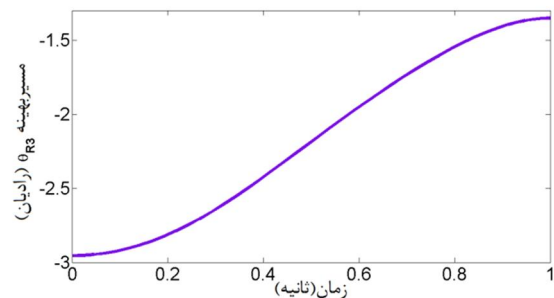


شکل 32 پیکربندی با قفل سوم

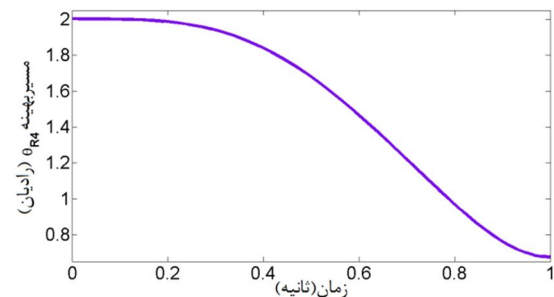
جدول 1 جزئیات بهینه‌سازی برای پیکربندی‌های مختلف

پیکربندی	بدون قفل	قفل اول	قفل دوم	قفل سوم
$\theta_{R1f}$ (Rad) حدسی	0/2	-	-	-
$\theta_{R2f}$ (Rad) حدسی	0/4	0/5	0/3	-
$\theta_{L1f}$ (Rad) حدسی	1/5	-	-	-
$\theta_{L2f}$ (Rad) حدسی	-0/09	0/02	-	-
$\ e\ $	0/01	0/01	0/01	-
تعداد تکرار	9	8	6	-
$\theta_{R1f}$ (Rad) بهینه	-0/012	-	-0/152	-
$\theta_{R2f}$ (Rad) بهینه	0/0174	-1/137	-	-
$\theta_{L1f}$ (Rad) بهینه	2/8133	-	-	-
$\theta_{L2f}$ (Rad) بهینه	-2/597	-0/897	-	-
بهینه PI (Rad <sup>2</sup> /sec)	0/145	2/05	1/1	0/33

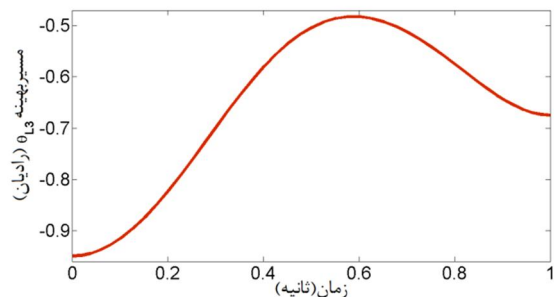
همراه بهینه کردن یک اندیس سینماتیکی انجام شد. برای حل مسئله بهینه‌سازی، انتگرال‌گیری عددی به صورت پرسو انجام شد. برای این منظور بادر نظر گرفتن شرایط مرزی دوطرفه، از روش شلیک استفاده شد. نتایج بهینه‌سازی به صورت عددی برای همه حالت‌های پیکربندی به دست آمد. نتایج نشانگر این موضوع هستند که در صورت جدا پذیری اندیس سینماتیکی، مسئله طراحی مسیر بهینه می‌تواند به صورت مجزا حل شود.



شکل 33 مسیر بهینه  $\theta_{R3}$  نسبت به زمان



شکل 34 مسیر بهینه  $\theta_{R4}$  نسبت به زمان



شکل 35 مسیر بهینه  $\theta_{L3}$  نسبت به زمان

7- پیوست

از آنجا که معادله 6 بر حسب  $y$  به صورت خطی است می‌توان در رابطه (29) نوشت:

$$\dot{\theta} = f = c + By \quad (29)$$

که طبق رابطه (30) داریم:

$$B = (I_n - J^\# J) \quad (30)$$

برای  $f_0 = \dot{\theta}^T \theta$  از معادله (29) در رابطه (31) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= 2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^T \dot{\theta} + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T \lambda \\ &= 2B^T(c + By) + B^T \lambda = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

با حل معادله فوق بر حسب  $y$ ، معادله (32) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$y = -(B^T B)^\# B^T \left( c + \frac{1}{2} \lambda \right) \quad (32)$$

از تعریف ماتریس  $B$  و همچنین شبه معکوس یک ماتریس، خواص زیر در رابطه (33) برقرار هستند:

$$\begin{aligned} BB &= B \\ B^T &= B \\ B^\# &= B \\ Bc &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

با جایگذاری معادله 33 در 32 قانون کنترلی به شکل رابطه (34) ساده می‌شود.

$$y = -\frac{1}{2} (I_n - J^\# J) \lambda \quad (34)$$

8- مراجع

- and autonomous systems, Vol. 60, issue 6, pp. 852-861, 2012.
- [2] C. Gosselin, R. Ping, S. Foucault, Dynamic trajectory planning of a two-DOF cable-suspended parallel robot, *Proceedings of the IEEE international conference on robotic and automation*, pp. 1476-1481, 2012.
- [3] H. Liu, J. Dai, An approach to carton-folding trajectory planning using dual robotic fingers, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol 42, issue 1, pp. 47-63, 2003.
- [4] L. Ming, W. Huapeng, H. Handroos, Stiffness-maximum trajectory planning of a hybrid kinematic-redundant robot machine, *37 th IEEE Annual conference on electronics society*, pp. 283-288, 2011.
- [5] A. Liegeois, Automatic Supervisory Control of the Configuration and Behavior of Multi-Body Mechanisms, *IEEE Transaction Systems, Man and Cybernetic*, Vol. 7, No. 12, pp 868-871, 1977.
- [6] D.E. Whitney, Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses, *IEEE Transaction, Man-Machine Systems*, Vol. 10, No. 2, pp. 47-53, 1969.
- [7] M. Ushiyama, K. Shimizu, K. Hakomori, Performance Evaluation of Manipulators Using the Jacobian and its Application to Trajectory Planning, *In Robotics Research 2*, pp. 447-454, 1985.
- [8] M.L. Nagurka, V. Yen, Optimal Design of Robotic Manipulator Trajectories, Technical Report CMU-RI-TR-87-12, *The Robotic Institute, Carnegie Mellon University*, Pgh, PA 15213, 1987.
- [9] H. Qiu, H. Ozaki, Expression and optimization of joint trajectory of manipulator using uniform B-spline, In *Systems, Man and Cybernetics, 1995. Intelligent Systems for the 21st Century., IEEE International Conference on*, Vol. 2, pp. 1267-1272, 1995.
- [10] P.H. Chang, A Closed Form Solution for Inverse Kinematics of Robot Manipulators with Redundancy, *IEEE Journal Robotics Automat.*, Vol. 3, No. 5, pp. 393-403, 1987.
- [11] J.S. Hemmerle, F.B. Prinz, Optimal Path Placement for Kinematically Redundant Manipulators, *Proc. IEEE International Confrence on Robotics and Automation*, Vol. 2, pp. 1234-1244, 1991.
- [12] O.P. Agrawal, Y. Xu, On The Global Optimum Path Planning for Redundant Space Manipulator, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 24, No. 9, pp. 1306-1316, 1994.
- [13] K. Gotlih, The Use and Comparison of A Special Global Optimal Control Algorithm with A Local Optimal Control Solution for Redundant Mechanisms, *Proc. IEEE International Symposium. on Industrial Electronics*, Vol. 2, pp. 872-876, 1999.
- [14] K.G. Osgouie, A. Meghdari, S. Sohrabpour, Optimal Configuration of Dual-Arm Cam-Lock Robot Based on Task-Space Manipulability, *Robotica*, Vol. 27, No.1, pp. 13-18, 2009.

- [1] J.R. Serracin, L.J. Puglisi, R. Saltaren, G. Ejarque, J.M. Sabater-Navvaro, R. Aracil, Kinematic analysis of a novel 2-DOF orientation device, *Robotics*