



## تحلیل ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی مستقر بر بستر الاستیک سعید جعفری مهرآبادی<sup>1\*</sup>، میلاد جلیلیان راد<sup>2</sup>، احسان ضرونی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، اراک  
\* اراک، صندوق پستی 567/38135، s-jafari@iau-arak.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 16 آذر 1392  
پذیرش: 25 بهمن 1392  
ارائه در سایت: 12 مهر 1393  
کلیدواژه‌ها:  
ارتعاش آزاد  
پوسته مخروطی  
نانولوله‌های کربنی تک جداره  
روش ریتز  
بستر الاستیک

در این تحقیق رفتار ارتعاشی پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت (UD) و مستقر بر بستر الاستیک (بسترناک)، براساس تئوری مرتبه اول تغییر برشی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور تاثیر خواص مکانیکی نانولوله‌ها بر سازه مذکور از قانون مخلوطها استفاده شده است. برای فرمول‌بندی مسئله در ابتدا براساس میدان تغییر مکان در تئوری مرتبه اول و با استفاده از روابط کرنش تغییر مکان، مولفه های کرنش در مختصات منحنی الخط نوشته شده و پس از ساده سازی در مختصات مخروطی و با استفاده از قوانین هوک تنش‌ها محاسبه شده‌اند. در مرحله بعد با تشکیل تابع انرژی پتانسیل کل سیستم و با در نظر گرفتن توابع مناسب برای تغییر مکان‌ها با توجه به شرایط مرزی پوسته، با اعمال روش ریتز، فرکانس‌های پوسته مخروطی تقویت شده به دست آمده‌اند. در پایان اثر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، نسبت ضخامت به شعاع مخروط، ثابت‌های بستر الاستیک و پارامترهای دیگر بر روی فرکانس‌های طبیعی سازه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین نتایج با دیگر مقالات موجود در این زمینه مقایسه و از نحوه حل مسئله اطمینان کافی حاصل شده است.

## Free vibration analysis of nanotube-reinforced composite truncated conical shell resting on elastic foundation Saeed Jafari Mehrabadi<sup>1\*</sup>, Milad Jalilian Rad<sup>2</sup>, Ehsan Zarouni<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Arak Branch, Arak, Iran.  
2- Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Arak Branch, Arak, Iran.  
\*P. O. B. 567/38135 Arak, Iran, s-jafari@iau-arak.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 07 December 2013  
Accepted 14 February 2014  
Available Online 04 October 2014

### Keywords:

Free Vibration  
Conical Shell  
Single Wall Carbon Nanotube  
Ritz Method  
Elastic Foundation

### ABSTRACT

In this paper, Free Vibration analysis of truncated conical shell Reinforced with single-walled carbon nanotubes for Uniformly Distribution (UD), resting on Pasternak elastic foundation, based on the first order shear deformation plate theory is investigated. The rule of mixture is used to effect of the properties of nanotubes in the mentioned structure. Based on the displacement field according to the first order shear deformation theory, after determining the strain components in the curvilinear coordinates and simplifying derived relation, we compute the strain components in conical coordinate. Then, the stress components are derived by the Hook's law. In the next stage, by computing the total potential energy of system by regarding the effect of Pasternak elastic foundation and regarding the suitable functions for displacements, by applying the Ritz method the natural frequency of system have been derived. At the end, the effect of volume fraction of nanotubes, ratio of thickness to radius of cone, elastic constants and other parameters, on the natural frequency of structure have been investigated. Also, it can be observe close agreements between present results and other papers.

مرکب پیشرفته باعث پیشرفت‌های چشم‌گیری در علوم مختلف شده است. مواد تابعی مدرج و مواد مرکب لایه‌ای از جمله این مواد هستند که در بخش‌های مختلف صنایع پیشرفته مورد استفاده قرار می‌گیرند. از این رو تحقیقات گسترده در زمینه خواص مادی و مکانیکی این مواد انجام شده است [1-4]. یکی دیگر از فناوری‌های جدید در زمینه ساخت مواد فناوری نانو می‌باشد. اخیراً نانو فناوری در بسیاری از علوم از جمله علوم مهندسی توجه محققان را برانگیخته است. آزمایش‌ها نشان داده است که نانو لوله‌های کربنی (CNTs)<sup>1</sup> از خواص فوق العاده‌ای نسبت به دیگر الیاف‌های تقویتی برخوردارند. از لحاظ

### 1- مقدمه

ساختارهای پوسته‌ای مخروطی به میزان قابل توجهی در کاربردهای مهندسی و صنعتی از جمله صنایع هوافضا، پتروشیمی، مکانیکی، نظامی، کشتی‌سازی و غیره استفاده می‌شوند. بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری این سازه‌ها به منظور بهبود خواص ارتعاشی و مکانیکی آن‌ها در طراحی‌های دینامیکی از اهمیت بالایی برخوردار است. مواد کامپوزیتی به دلیل وزن پایین نسبت به مادی چون فولاد و آلومینیم و همچنین خواص مکانیکی قابل توجهی که دارند در موارد بسیاری مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه مواد

1- Carbon Nanotubes

روش ریلی-ریتز<sup>3</sup> معادلات حرکت به دست آمده‌اند. فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی با حل مسئله مقادیر ویژه معادلات حرکت به دست آمده و پاسخ‌های پایدار ارتعاش اجباری با حل معادلات حرکت به دست می‌آیند. تورنانه<sup>[25]</sup> به بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای از جنس مواد تابعی مدرج پرداخته است. در مقاله مذکور از نوعی ماده تابعی استفاده شده که ترکیبی از فلز و سرامیک می‌باشد. معادلات حرکت سیستم به وسیله روش مربع‌سازی مشتق تعمیم یافته حل شده‌اند. صوفیه و همکارانش<sup>[26]</sup> به تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری پوسته‌های مخروطی ارتوتروپیک غیرهمگن با لبه‌های گیردار در معرض فشارهای خارجی یکنواخت پرداختند و فرکانس‌های طبیعی اصلی و معادلات حاکم را روش گالرکین حل نمودند. صوفیه<sup>[27]</sup> همچنین ارتعاشات غیرخطی (با دامنه ارتعاش بالا) پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی ناقص غیرهمگن را مورد بررسی قرار داده است. در تحقیق خواص مادی پوسته مخروطی طبق یک رابطه توانی در راستای ضخامت آن تغییر می‌کند. ستوده و همکارانش<sup>[28]</sup> ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته‌های مخروطی از جنس مواد تابعی مدرج با ضخامت غیر یکنواخت و تحت بارگذاری ضربه‌ای را مورد بررسی قرار داده‌اند. خواص مواد به صورت تابعی مدرج در راستای ضخامت با استفاده از قانون توزیع توانی مخلوط‌ها تغییر می‌کند. برای حل معادلات از روش مربع‌سازی مشتق تعمیم یافته استفاده شده است.

ژاو و لیو<sup>[29]</sup> به بررسی ارتعاش آزاد پل‌های پوسته مخروطی ساخته شده از مواد تابعی با استفاده از روش بدون مش یا المان آزاد ریتز<sup>4</sup> پرداخته‌اند. از تئوری مرتبه اول برشی برای کرنش‌ها استفاده شده است و توابع ذره‌ای را جهت پیوند توابع هارمونیک جهت تقریب میدان جابه‌جایی دوبعدی استفاده کرده‌اند. فرض کرده‌اند که خواص مواد پل‌های مخروطی در جهت ضخامت به‌طور پیوسته براساس قانون توانی توزیع کسر حجمی مواد تشکیل دهنده متغیر باشد. شن<sup>[30,31]</sup> در تحقیقی، به بررسی پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره<sup>5</sup> در معرض بار جانبی یا فشار هیدرواستاتیک در محیط حرارتی پرداخته است. نتایج نشان داده است که توزیع تابعی خطی نانولوله‌های کربنی تقویتی باعث افزایش فشار کمانشی و همچنین مقاومت پس‌کمانشی پوسته مخروطی تحت بار خارجی فشاری می‌شود. مرادی دستجردی و همکارانش<sup>[32]</sup> تحلیل دینامیکی پوسته‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره در معرض بارهای ضربه‌ای را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها ارتعاش آزاد و انتشار موج تنش را بررسی کردند. در این تحقیق توزیع‌های مختلفی برای نانولوله‌ها در نظر گرفته شده است و خواص مادی پوسته با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی تخمین زده شده است. یاس و همکارانش<sup>[33]</sup> خواص ارتعاشی پانل‌های استوانه‌ای تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تک‌جداره را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی مورد مطالعه قرار داده‌اند. برای پیش‌بینی خواص مادی نانو کامپوزیت از قانون اصلاح شده مخلوط‌ها استفاده شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده معادلات حرکت با استفاده از روش مربع‌سازی مشتق تعمیم یافته حل شده و فرکانس‌های طبیعی پوسته به دست آمده‌اند. شن و ژیانگ<sup>[34]</sup> ارتعاشات غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در محیط حرارتی مطالعه نموده‌اند. در این تحقیق از تئوری مرتبه بالای برشی استفاده شده است. ملک‌زاده و

مقاومت کششی و ضریب کشسانی، این مواد یکی از محکم‌ترین موادی هستند که تا کنون شناخته شده‌اند<sup>[5]</sup>. بنابراین انتظار می‌رود که استفاده از نانو لوله‌های کربنی به‌عنوان الیاف تقویتی در زمینه‌های پلیمری باعث بهبود خواص این کامپوزیت‌های نسبت به نوع تقویت شده با سایر الیاف‌ها گردد. برخی مطالعات در زمینه بررسی خواص مادی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی انجام شده است که نشان می‌دهد تقویت سازه‌های کامپوزیتی با نانو لوله‌های کربنی حتی با کسر جرمی کم (2 تا 5 درصد)، به میزان قابل توجهی خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی آن‌ها را ارتقا می‌دهد<sup>[6-11]</sup>. جوشی و یوپادای<sup>[12]</sup> انتقال بار در مواد مرکب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی چند جداره، تحت بارهای کششی و فشاری را با استفاده از مدل مکانیک محیط پیوسته مورد مطالعه قرار داده‌اند در این تحقیق از روش اجزا محدود استفاده شده است. آن‌ها تأثیر نانولوله‌های کربنی تک‌جداره و چندجداره را در ارتقا خواص مکانیک مواد کامپوزیتی مورد بررسی قرار داده‌اند. وندینچاروا و ژانگ<sup>[13]</sup>، خمش خالص و کمانش تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی تک‌جداره را مورد بررسی قرار دادند. ویت و ادلی<sup>[14]</sup> رفتار تنش و خیز تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی را بررسی کردند. آن‌ها دریافتند که سختی این تیرها با به‌کارگیری کسر حجمی پایینی از نانو لوله‌ها با توزیع یکنواخت به میزان چشمگیری افزایش می‌یابد. یاس و حشمتی<sup>[15]</sup> خواص ارتعاشی تیرهای نانو کامپوزیتی تابعی مدرج را تحت بار متحرک مورد بررسی قرار داده‌اند. تیر در نظر گرفته شده در این تحقیق با نانو لوله‌های کربنی تک‌جداره با جهت‌گیری تصادفی تقویت شده‌اند. به‌منظور مدل‌سازی خواص مادی تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانو از مدل موری-تاناکا استفاده شده است. آن‌ها تأثیر جهت‌گیری نانولوله‌ها، توزیع مواد، سرعت بار متحرک و شرایط مرزی مختلف را روی خواص ارتعاشی تیر مورد نظر، مورد بررسی قرار داده‌اند. یاس و صمدی<sup>[16]</sup> ارتعاشات آزاد و کمانش تیر تیموشنکوی کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی روی بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نانولوله‌ها با توزیع یکنواخت و همچنین تابعی مدرج در راستای ضخامت فرض شده‌اند. از قانون مخلوط‌ها برای توصیف خواص مادی مؤثر استفاده شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی گوناگون معادلات پایداری و حرکت تیر به کمک اصل هامیلتون به دست آمده و از روش مربع‌سازی مشتق تعمیم یافته<sup>1</sup> حل شده‌اند. اثرات کسر حجمی و نحوه توزیع نانولوله‌ها، پارامترهای سختی بستر الاستیک و شرایط مرزی گوناگون بر روی فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی کمانش تیر مورد بررسی قرار گرفته است.

آیری و همکارانش<sup>[17,18]</sup> در تحقیقی به بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی پرداختند. لیسا<sup>[19]</sup> ارتعاشات پوسته‌های مخروطی را با شرایط مرزی مختلف و براساس تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک مورد بررسی قرار داده است. سیوآداس و گانسن<sup>[20-22]</sup> ارتعاش پوسته‌های مخروطی با ضخامت متغیر را با استفاده روش المان محدود نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. هوا<sup>[23]</sup>، در تحقیقی، به بررسی اثرات شرایط مرزی و خواص ارتوتروپیک روی فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص دوار پرداخت. در این تحقیق از روش گالرکین<sup>2</sup> برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. لی و همکارانش<sup>[24]</sup> به محاسبه فرکانس‌های طبیعی و پاسخ‌های ارتعاش اجباری پوسته مخروطی پرداخته‌اند. با استفاده از اصل همیلتون و

3- Rayleigh-Ritz Method  
4- Element-Free kp-Ritz Method  
5- Single-walled Carbon Nanotubes

1- Generalized Differential Quadrature (GDQ)  
2- Galerkin Method

رابطه  $V_{CN} + V_m = 1$  را نیز ارضا می نماید.  
کسر حجمی  $V_{CN}$  را به صورت رابطه (4) فرض می شود:

$$V_{CN} = W(Z) V_{CN}^* \quad (4)$$

که طبق رابطه (5):

$$V_{CN}^* = \frac{W_{CN}}{W_{CN} + \left(\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}\right) - \left(\frac{\rho_{CN}}{\rho_m}\right) W_{CN}} \quad (5)$$

که  $W_{CN}$  کسر جرمی نانولوله می باشد. برای حالت توزیع یکنواخت نانولوله مقدار  $W(Z)$  برابر واحد بوده و در نتیجه  $V_{CN} = V_{CN}^*$  می باشد. نسبت پواسون و دانسیته جرمی را می توان به صورت روابط (6,7) محاسبه کرد:

$$V_{12} = V_{CN} \times V_{12}^{CN} + V_m V_m^m \quad (6)$$

$$V_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} V_{12}$$

$$\rho = V_{CN} \times \rho^{CN} + V_m \rho^m \quad (7)$$

### 3- مدل سازی مسئله

پوسته مخروطی ناقصی را مطابق شکل 1 در نظر می گیریم. که در آن  $X$  راستای بال مخروط و  $\theta$  در راستای محیط و  $Z$  در راستای ضخامت پوسته می باشد.

که در آن جابه جایی های  $(u, v, w)$  به ترتیب در راستای  $(x, y, z)$  می باشند.

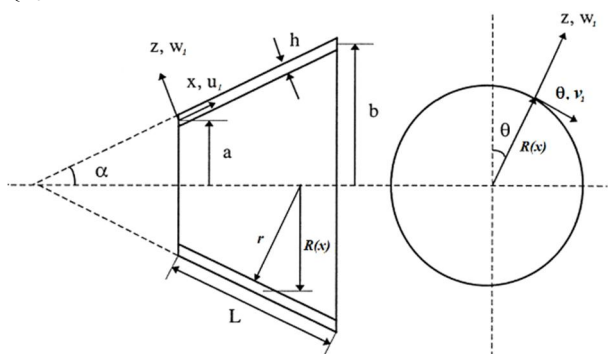
با توجه به شکل 1 پارامترهای لامه<sup>3</sup> و شعاع های انحنای<sup>4</sup> پوسته مخروطی ناقص به صورت روابط (9-11) تعریف می گردند [42].

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = a + x \sin \alpha \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} r = \frac{R(x)}{\cos \alpha} \\ R(x) = a + x \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow r = \frac{a + x \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\begin{cases} R_1 = \infty \\ R_2 = r = \frac{a + x \sin \alpha}{\cos \alpha} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = X \\ \alpha_2 = \theta \\ \alpha_3 = Z \end{cases} \quad (11)$$



شکل 1 برشی از پوسته مخروطی ناقص با دستگاه مختصات منحنی الخط

همکارانش [35] در تحقیقی، ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص دورانی از جنس ماده تابعی مدرج را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی پوسته ها مورد بررسی قرار دادند و معادلات حاصل را از روش مربع سازی مشتق تعمیم یافته حل نمودند. فتوحی و همکارانش [36] در تحقیقی به بررسی تاثیرات بستر الاستیک بر روی مشخصه های ارتعاشی نانو مخروط ها پرداخته است. در این تحقیق از روش گالرکین برای حل معادلات حرکت نانو مخروط استفاده شده است و همچنین مدل پاسترناک برای مدل سازی بستر الاستیک استفاده شده است. فیروز آبادی و همکارانش [38,37] خواص ارتعاشی و پایداری نانومخروطها را بر اساس یک تئوری غیرمحلّی پوسته ها مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیقات معادلات پایداری و حرکت با استفاده از روش گالرکین حل شده و فرکانس های طبیعی و بار بحرانی به دست آمده اند.

در این مقاله ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک، بر اساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است. جهت اعمال خواص مکانیکی نانولوله ها از قانون مخلوطها استفاده شده است. با تشکیل فانکشنال انرژي و از روش ریتز و اعمال شرایط مرزی ساده و حل مسئله مقادیر ویژه فرکانس های پوسته ی مخروطی به دست آمده اند. در پایان اثر کسر حجمی نانولوله های کربنی تقویتی، نسبت ضخامت به شعاع مخروط، ثابت های بستر الاستیک و پارامترهای دیگر بر روی فرکانس های طبیعی ارتعاش مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. صحت نتایج با دیگر مقالات موجود مقایسه و دقت مناسبی بین نتایج این تحقیق و دیگر مقالات برقرار است.

### 2- خواص پوسته مخروطی نانو کامپوزیت

در این تحقیق پوسته مخروطی ناقص با نانولوله های کربنی با توزیعی یکنواخت در راستای مختصات  $X$  تقویت شده است و دارای زمینه ای پلیمری باشد. در مدل میکرومکانیکی، می توان خواص مادی را با استفاده از مدل موری-تاناکا [39] یا قانون اصلاح شده مخلوطها [26]<sup>2</sup> تخمین زد. مدل موری-تاناکا قابل کاربرد برای ذرات نانو می باشد [39,30,15] و قانون مخلوطها برای پیش بینی تمامی خواص مادی ساده، ساده و مناسب می باشد. در این مقاله به دلیل تطابق نتایج حاصل از دو روش فوق، از قانون مخلوطها استفاده شده است. بر اساس قانون اصلاح شده مخلوطها مدول یانگ و مدول برشی موثر مطابق روابط (3-1) بیان می شوند [41]

$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m \quad (1)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (2)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (3)$$

که  $E_{11}^{CN}$ ،  $E_{22}^{CN}$  و  $G_{12}^{CN}$  به ترتیب مدول های یانگ و برشی نانولوله کربنی می باشد،  $E^m$  و  $G^m$  خواص متناظر مربوط به زمینه می باشند.  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) پارامتر کارایی نانولوله کربنی می باشد، این پارامتر به این دلیل که انتقال بار بین ماتریس و نانولوله به صورت کامل صورت نمی گیرد [39,30]. در معادلات (3-1) وارد می شود. مقدار آن با تطابق مدول های الاستیسیته به دست آمده از نتایج شبیه سازی دینامیک مولکولی و قانون مخلوطها تعیین می شود [30]. همچنین  $V_m$  و  $V_{CN}$  کسرهای حجمی نانولوله کربنی و زمینه می باشند که

3- Lamé parameters  
4- Radii of curvature

1- Mori Tanaka  
2- Extended rule of mixture

مطابق رابطه (16) نوشت.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{\theta\theta} \\ K_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z}^0 \end{Bmatrix}$$

(16)

که با جایگذاری روابط مقادیر کرنش‌ها بر حسب جابجایی از رابطه (15) رابطه (16) به صورت رابطه (17) نوشته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ \frac{1}{a+x \sin \alpha} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + U_1 \sin \alpha + W_1 \cos \alpha \right) \\ \frac{1}{a+x \sin \alpha} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \theta} - v_1 \sin \alpha \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{array} \right\} + Z \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{1}{a+x \sin \alpha} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \phi \sin \alpha \right) \\ \frac{1}{a+x \sin \alpha} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \psi \sin \alpha \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \phi + \frac{\partial W_1}{\partial x} \\ \psi + \frac{1}{a+x \sin \alpha} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} \end{array} \right\}$$

(17)

روابط تنش-کرنش برای مواد ارتونروپیک مطابق رابطه (18) می‌باشد

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

(18)

که در آن

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

(19)

روابط  $\nu_{12}, \nu_{21}, E_{11}, E_{22}, G_{12}$  از روابط اصلاح شده مخلوطها مطابق روابط (1) و (3) و (6) محاسبه می‌شوند.

پوسته مخروطی مورد مطالعه در این تحقیق مطابق شکل 2 با بستر الاستیک از نوع دو پارامتری (وینکلر-پاسترناک) احاطه شده است و تأثیر ثابت‌های بستر الاستیک بر روی فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور از مدل پسترناک استفاده شده است [44]. به این منظور نیروی‌های عکس‌العمل که از سوی بستر الاستیک در جهت ضخامت پوسته مخروطی به آن وارد می‌گردد مطابق رابطه (20) فرمول‌بندی

روابط کرنش-تغییر مکان براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به‌دست آمده‌اند. در این تئوری فرض قابل نظر بودن از کرنش‌های برشی جانبی  $\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{\theta z}$  و اینرسی دورانی دیگر معتبر نمی‌باشد و این تفاوت اصلی تئوری مرتبه اول تغییر شکل با تئوری کلاسیک پوسته‌ها می‌باشد. در واقع در این تئوری نتایج از دقت بیشتری برخوردار می‌باشند. روابط میدان تغییرمکان در مختصات منحنی‌الخط مطابق رابطه (12) تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} U_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \phi_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ U_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \phi_2(\alpha_1, \alpha_2) \\ U_3 = u_3(\alpha_1, \alpha_2) \end{cases}$$

(12)

همچنین روابط کرنش-جابجایی برای هر نقطه دلخواه به فاصله  $\alpha_3$  از سطح میانی به صورت رابطه (13) بیان می‌گردد [43].

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{U_2}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + U_3 \frac{A_1}{R_1} \right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{U_1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + U_3 \frac{A_2}{R_2} \right)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{U_1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \right) + \frac{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{U_2}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \right)$$

$$\varepsilon_{13} = A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{U_1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \right) + \frac{1}{A_1(1 + \frac{\alpha_3}{R_1})} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1}$$

$$\varepsilon_{23} = A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}) \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left( \frac{U_2}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \right) + \frac{1}{A_2(1 + \frac{\alpha_3}{R_2})} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2}$$

(13)

حال با جایگذاری روابط (9-11) در روابط (12,13) روابط میدان تغییرمکان و روابط کرنش-تغییرمکان برای پوسته مخروطی به‌صورت روابط (14,15) در می‌آیند.

$$\begin{cases} U = u_1(x, \theta) + Z \phi(x, \theta) \\ V = v_1(x, \theta) + Z \psi(x, \theta) \\ W = w_1(x, \theta) \end{cases}$$

(14)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + Z \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a+x \sin \alpha} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + Z \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \sin \alpha (u_1 + Z\phi) + w_1 \cos \alpha \right)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{a+x \sin \alpha} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + Z \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + Z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{(v_1 + Z\psi) \sin \alpha}{a+x \sin \alpha}$$

$$\varepsilon_{xz} = \phi + \frac{\partial W_1}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \psi + \frac{1}{a+x \sin \alpha} \frac{\partial W_1}{\partial \theta}$$

(15)

روابط کرنش-تغییرمکان حاکم بر پوسته مخروطی را می‌توان به فرم ماتریسی

گردیده است

با جایگذاری روابط (16.9) در معادله (23)، معادله (24) را داریم:

$$U = \iint_{h/2}^{h/2} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sigma_{xx} (\epsilon_{xx}^0 + Zk_{xx}) + \sigma_{\theta\theta} (\epsilon_{\theta\theta}^0 + Zk_{\theta\theta}) + \sigma_{x\theta} (\epsilon_{x\theta}^0 + Zk_{x\theta}) + \sigma_{xz} \epsilon_{xz}^0 + \sigma_{\theta z} \epsilon_{\theta z}^0 \right] dz \right\} (a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (24)$$

نیرو و ممان های منته به صورت رابطه (25) تعریف می شوند:

$$\begin{bmatrix} N_x & M_x \\ N_\theta & M_\theta \\ N_{x\theta} & M_{x\theta} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{bmatrix} [1 \quad z] dz$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix} dz$$

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (25)$$

با انتگرال گیری در راستای ضخامت پوسته مخروطی و جایگذاری مقادیر نیرو و ممان های منته از رابطه (25)، رابطه (26) به دست می آید:

$$U = \iint [N_x \epsilon_{xx}^0 + M_x k_{xx} + N_\theta \epsilon_{\theta\theta}^0 + M_\theta k_{\theta\theta} + N_{x\theta} \epsilon_{x\theta}^0 + M_{x\theta} k_{x\theta} + Q_x \epsilon_{xz}^0 + Q_\theta \epsilon_{\theta z}^0] (a + x \sin \alpha) dx d\theta \quad (26)$$

با جایگذاری مقادیر و کرنش ها از رابطه (17) انرژی پتانسیل به صورت رابطه (27) نوشته می شود.

$$U = \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + M_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + N_\theta \left( \frac{1}{a + x \sin \alpha} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + u_1 \sin \alpha \right) + w_1 \cos \alpha \right) + M_\theta \left( \frac{1}{a + x \sin \alpha} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \phi \sin \alpha \right) \right) + N_{x\theta} \left( \frac{1}{a + x \sin \alpha} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - v_1 \sin \alpha \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + M_{x\theta} \left( \frac{1}{a + x \sin \alpha} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \psi \sin \alpha \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + Q_x \left( \phi + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + Q_\theta (\psi + \frac{\partial w_1}{\partial \theta}) \right] (a + x \sin \alpha) dx d\theta \quad (27)$$

انرژی جنبشی نیز به صورت رابطه (28) تعریف می شود

$$K = \frac{1}{2} \iint \int_{h/2}^{h/2} \rho \left[ \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right] A_1 A_2 dx d\theta dz \quad (28)$$

با انتگرال گیری در راستای ضخامت و جایگذاری از روابط (25.9) انرژی جنبشی مطابق رابطه (29) نوشته می شود

$$K = \iint I \left[ \dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w} \right] (a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (29)$$

انرژی کرنشی نیز به صورت رابطه (30) تعریف می شود:

$$V = \iint q w (a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (30)$$

که نیروی حاصل از برهم کنش پوسته مخروطی و بستر الاستیک می باشد. با جایگذاری  $q$  از رابطه (20) انرژی کرنشی به صورت رابطه (31) در می آید

$$q = k_w w - k_p \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (20)$$

که در آن ثابت سختی بستر  $k_w$  (N/m<sup>3</sup>) و ثابت برشی آن  $k_p$  (N/m) می باشد. همچنین  $\varphi = \theta \sin \alpha$  و  $w$  تغییر مکان صفحه میانی در راستای ضخامت می باشد.

#### 4- به دست آوردن فرکانس های سیستم از روش ریتز

به منظور تعیین فرکانس های طبیعی پوسته مخروطی ناقص از روش ریتز استفاده است. روش ریتز از روش های حل عددی است که بر اساس روش تغییرات<sup>1</sup> معمولاً برای حل مسائل مقدار مرزی مختلف مکانیک استفاده می شود. مزیت اصلی این روش این است که توابع حدس فقط کافی است شرایط مرزی مسئله را ارضا نماید، به همین دلیل در بسیاری از موارد به کار می رود. پوسته مخروطی ناقص در این مقاله با تکیه گاه ساده در دو سر مخروط در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی ساده S-S در دو انتهای پوسته مخروطی به صورت رابطه (21) بیان می شوند:

$$v_1 = 0, w_1 = 0, N_x = 0, M_x = 0 \quad \text{at } x = 0, L \quad (21)$$

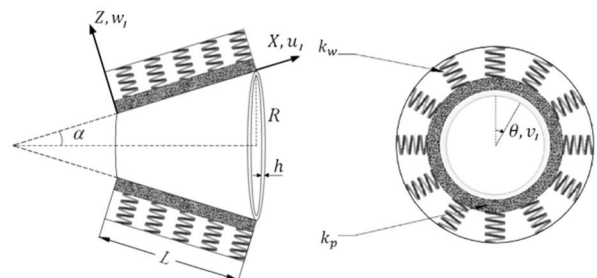
توابع جابه جایی نیز مطابق رابطه (22) در نظر گرفته شده است که شرایط مرزی مسئله را ارضا می نمایند [23].

$$\begin{aligned} u &= a_1 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta + \omega t) \\ v &= a_2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta + \omega t) \\ w &= a_3 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta + \omega t) \\ \phi &= a_4 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta + \omega t) \\ \psi &= a_5 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta + \omega t) \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن  $n$  و  $m$  به ترتیب اعداد موج محیطی و طولی، و  $\omega$  نیز فرکانس ارتعاش پوسته بر حسب هرتز (Hz) هستند.

برای پوسته مخروطی انرژی های پتانسیل، کار خارجی و انرژی جنبشی به صورت رابطه (23) می باشد:

$$U = \iint \left\{ \int_{h/2}^{h/2} \left[ \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta} \epsilon_{x\theta} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{\theta z} \epsilon_{\theta z} \right] dz \right\} A_1 A_2 dx d\theta dz \quad (23)$$



شکل 2 نمای شماتیک از پوسته مخروطی ناقص بر بستر الاستیک

دمای (K) 300 به صورت  $v^m = 0.34$ ،  $\rho^m = 1.15$  (gcm<sup>-3</sup>)،  $E^m = 2.5$  (GPa)،  $G^m = 0.933$  (GPa) فرض شده است. مهم‌ترین مسئله در به-کارگیری قانون اصلاح شده مخلوطها برای کامپوزیت‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی<sup>3</sup> تعیین پارامتر کارایی نانولوله کربنی  $\eta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) است. این پارامتر را می‌توان از تطبیق نتایج تئوری به دست آمده براساس قانون اصلاح شده مخلوطها با نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی تخمین زد. به این ترتیب که پارامترهای کارایی نانولوله با تطبیق مدول یانگ  $E_{11}$  و  $E_{22}$  و مدول برشی  $G_{12}$  کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به دست آمده از قانون توسعه یافته مخلوطها با مقادیر به دست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به دست آمده‌اند. این مقادیر در حالت خاص در جدول 2 آمده است [30].

به منظور بررسی صحت نتایج تحقیق انجام شده، نتایج به دست آمده برای فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی ناقص با تکیه‌گاه ساده، ایزوتروپیک و از جنس آلومینیم با در نظر گرفتن خواص مادی و ابعاد هندسی  $v = 0.3$ ،  $E = 70$  (GPa)،  $G = 26.9$  (GPa)،  $\rho = 2710$  (kgm<sup>-3</sup>)،  $h = 0.004$  (m)،  $b = 0.4$  (m) با نتایج مقاله هوا [23] مقایسه شده است. این نتایج در جدول 3 قابل مشاهده است. اعداد  $n$  و  $m$  به ترتیب اعداد موج در راستای محیط و یال مخروط است. فرکانس بی‌بعد به صورت  $\Omega = \omega \cdot b \sqrt{\rho(1-v^2)}/E$  تعریف شده است. که در آن  $\omega$  فرکانس پایه برحسب هرتز (Hz)،  $v$  ضریب پواسون،  $E$  مدول یانگ،  $G$  مدول برشی،  $\rho$  چگالی،  $h$  ضخامت پوسته،  $a$  شعاع کوچک مخروط،  $b$  شعاع بزرگ مخروط و  $L$  طول یال مخروط می‌باشد. از جدول 3 می‌توان مشاهده نمود که نتایج به دست آمده در تحقیق ارائه شده با نتایج موجود در مقالات گذشته مطابقت دارد. البته مقداری اختلاف میان نتایج ارائه شده در تحقیق حاضر با نتایج مرجع [23] مشاهده می‌شود که دلیل آن اختلاف در تئوری-های استفاده شده برای توصیف میدان تغییر مکان پوسته است. نتایج ارائه شده در مرجع [23] براساس تئوری تخمین اولیه لاو<sup>4</sup> (تئوری کلاسیک)

جدول 1 خواص مادی وابسته به دما نانولوله کربنی تک جداره (10,10)

دما (K)	$E_{11}^{CN}$ (TPa)	$E_{22}^{CN}$ (TPa)	$G_{12}^{CN}$ (TPa)	$\alpha_{11}^{CN}$ (10 <sup>-6</sup> /k)	$\alpha_{22}^{CN}$ (10 <sup>-6</sup> /k)
300	5/6466	7/0800	1/9445	3/4584	5/1682
500	5/5308	7/0800	1/9643	4/5361	5/0189
700	5/4744	6/8641	1/9644	4/6677	4/8943

$$(L = 9.26 \text{ nm}, R = 0.68 \text{ nm}, h = 0.068 \text{ nm}, v_{12}^{CN} = 0.175)$$

جدول 2 مقایسه مدول‌های یانگ برای کامپوزیت‌های PMMA/CNT

$V_{CN}^*$	$E_{11}$ (GPa)		$E_{22}$ (GPa)		قانون مخلوطها		
	94/6	2/9	94/78	2/9	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
0/12	94/6	2/9	94/78	2/9	0/137	1/022	0/715
0/17	138/9	4/9	138/68	4/9	0/142	1/626	1/138
0/28	224/2	5/5	224/50	5/5	0/141	1/585	1/109

$$V = \iint \left[ k_w W - k_p \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \right] w(a + x \sin \alpha) d\theta dx \quad (31)$$

تابعی انرژی برحسب انرژی‌های پتانسیل، کرنشی و جنبشی به صورت رابطه (32) بیان می‌شود:

$$\Pi = U + V - K \quad (32)$$

با حذف مولفه‌های هارمونیک و جایگذاری توابع جابه‌جایی در معادله (32) ماکزیمم فانکشنال انرژی مطابق رابطه (33) بیان می‌شود:

$$\hat{\Pi} = U_{\max} + V_{\max} - K_{\max} \quad (33)$$

با کمینه کردن فانکشنال معادله بالا نسبت به ضرایب به دست می‌آید. طبق رابطه (34) داریم:

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (34)$$

که منجر به معادله مقدار ویژه به صورت رابطه (35) می‌شود:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

برای به دست آوردن فرکانس طبیعی سیستم کافی است دترمینان ماتریس ضرایب مساوی صفر قرار داده شود. طبق رابطه (36) داریم:

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

مولفه‌های  $S_{ij}$  ماتریس ضرایب در معادله (36) در پیوست آمده است.

## 5- بحث و نتایج

در این تحقیق پوسته‌های کامپوزیتی مخروطی ناقص با زمینه پلی متیل - متاکریل (PMMA)<sup>1</sup> که با نانولوله‌های کربنی تک‌جداره (10,10) به-صورت یکنواخت در راستای یال مخروط تقویت شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. که زوج مرتب (10,10) مولفه‌های بردار کایرال<sup>2</sup> نانولوله هستند و نوع نانولوله‌های تک جداره را مشخص می‌کند [45]. ابتدا به بررسی خواص مادی پلیمر مورد نظر و نانولوله‌های کربنی تک‌جداره (10,10) پرداخته شده است.

خواص مادی نانولوله که وابسته به ابعاد نانولوله و دما می‌باشند از شبیه-سازی دینامیک مولکولی به دست آمده‌اند [30]. نتایج نمونه در جدول 1 ارائه شده است. خواص مادی پلیمر زمینه که از جنس پلی متیل - متاکریل در

3- CNTRCs

4 -Love first-approximation theory

1- Poly Methyl Methacrylate

2 -Chiral Vector

- تقویت یک سازه با نانولوله های کربنی هر چند با درصد حجمی بسیار کم (0/25%) می تواند به میزان چشم گیری فرکانس ارتعاش آن را افزایش دهد.
- با افزایش کسر حجمی نانو لوله های تقویتی فرکانس به میزان بیشتری افزایش می یابد.
- میزان افزایش فرکانس ارتعاش در اثر تقویت با نانولوله های کربنی به عدد موج ( $n$ ) نیز بستگی دارد.
- بسته به کسر حجمی نانولوله ها حداقل فرکانس ممکن است به ازای مقادیر مختلف عدد موج ( $n$ ) (مود ارتعاش) رخ دهد.

جدول 4 فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده به ازای مقادیر مختلف عدد موج در راستای یال مخروط  $m$

(از جنس آلومینیم)  $(L \sin \alpha = 0.1, a = b - L \sin \alpha, n=1)$

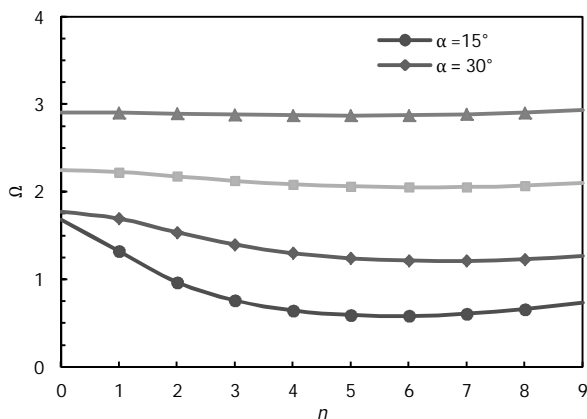
$m$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
1	0/920818	0/794965	0/642763
2	1/04562	1/19388	1/46797
3	1/39250	2/17442	3/07978
4	2/04087	3/66191	5/34530
5	2/96342	5/58496	8/19612
6	4/12578	7/90120	11/5759

جدول 5 تغییرات فرکانس سازه تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره بر حسب

مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله ها

$N$	کسر حجمی نانولوله			
	0/25%	2%	5%	10%
1	28/04%	150/9%	265/81%	385/94%
2	6/77%	44/63%	85/15%	131/64%
3	17/34%	31/06%	39/37%	50/96%
4	12/26%	32/80%	42/90%	54/42%
5	6/79%	75/26%	119/72%	142/36%

تغییرات به صورت درصدی نسبت به حالت بدون نانولوله تقویتی داده شده است.



شکل 3 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 12% بر حسب  $n$

است که در این تئوری از تغییر شکل های برشی صرف نظر می شود، ولی در مقاله حاضر از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، که دقیق تر و به واقعیت نزدیک تر است، استفاده شده است.

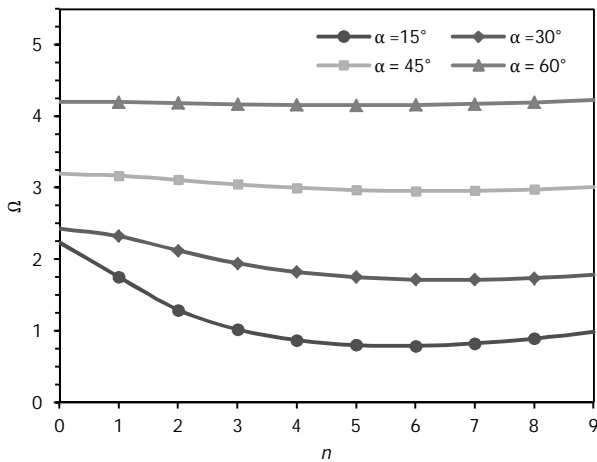
در جدول 4 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega$  پوسته مخروطی ناقص با در نظر گرفتن شرایط مرزی ساده برای زوایای راس مختلف و خواص مادی و ابعاد هندسی  $\nu = 0.3, E = 70$  (GPa),  $G = 26.9$  (GPa),  $\rho = 2710$  (kgm<sup>-3</sup>),  $h = 0.004$  (m),  $b = 0.4$  (m),  $L = 0.1 / \sin \alpha$  و  $n=1$  به ازای عدد موج های در راستای یال مخروط ( $m$ ) مختلف به دست آمده و مشاهده می شود که در تمام زوایای به ازای  $m=1$  فرکانس های بی بعد پوسته مخروطی حداقل مقدار را دارد. از شکل های 3 تا 5 می توان دریافت که با افزایش زاویه راس مخروط  $\alpha$  فرکانس بی بعد  $\Omega$  افزایش می یابد، همچنین با بزرگتر شدن زاویه راس مخروط میزان وابستگی فرکانس بی بعد  $\Omega$  به عدد موج  $n$  کاهش می یابد یعنی دیگر با تغییر  $n$  شدت تغییرات  $\Omega$  زیاد نیست. علاوه بر این از شکل های 3 تا 5 مشاهده می گردد که مقدار حداقل فرکانس بی بعد بسته به زاویه راس مخروط تغییر کرده است. بدین ترتیب که در زوایای راس  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  و  $60^\circ$  حداقل فرکانس بی بعد به ترتیب مربوط به اعداد موج محیطی 6، 7، 6 و 5 می باشد.

به منظور بررسی صحت نتایج به دست آمده برای پوسته تقویت شده با نانولوله های کربنی نتایج حاصل با نتایج به دست آمده در مرجع [46] مقایسه شده است. نتایج حاصل از مرجع [46] حاکی از آن است تقویت یک سازه با نانولوله های کربنی تک جداره فرکانس های طبیعی ارتعاش آن را تا 500% افزایش می دهد. بخشی از نتایج به دست آمده در این تحقیق در جدول 5 آمده است که می توان نتایج زیر از آن استخراج نمود:

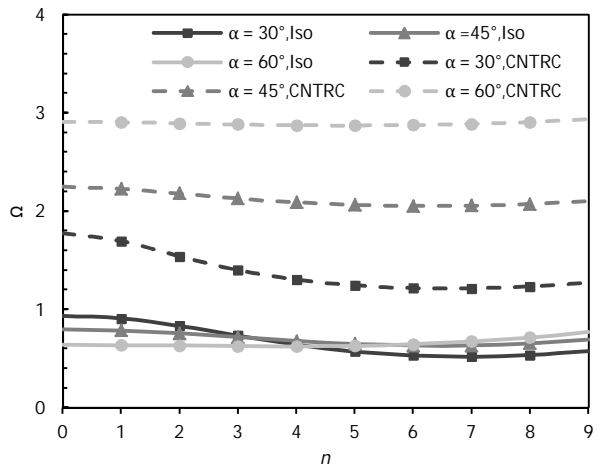
جدول 3 فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده ( $m=1, L \sin \alpha = 0.1, a = b - L \sin \alpha$ )

$n$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
2	0/8420	0/7655	0/6348
2	0/843117	0/766729	0/637436
3	0/7376	0/7212	0/6238
3	0/744890	0/727617	0/631664
4	0/6362	0/6739	0/6145
4	0/651349	0/687627	0/629497
5	0/5528	0/6323	0/6111
5	0/579622	0/655668	0/634844
6	0/4950	0/6035	0/6171
6	0/536970	0/638403	0/650742

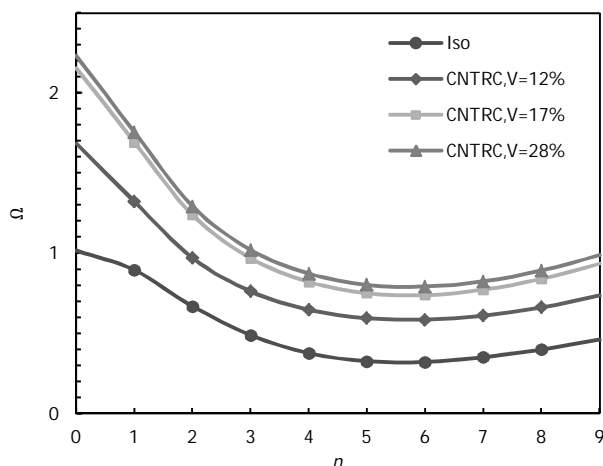
بیشتری افزایش می یابد. به عبارت دیگر می توان گفت که تأثیر افزایش نسبت ضخامت به شعاع مخروط بر روی افزایش فرکانس های پوسته مخروطی با افزایش زاویه رأس افزایش می یابد.



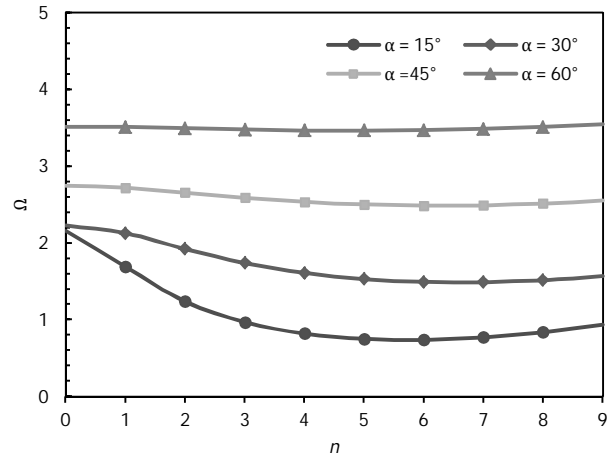
شکل 4 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 17% بر حسب n



شکل 5 مقایسه فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 12% بر حسب n



شکل 6 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  برای پوسته مخروطی ناقص با زاویه رأس  $\alpha = 15^\circ$  با تکیه گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی های مختلف



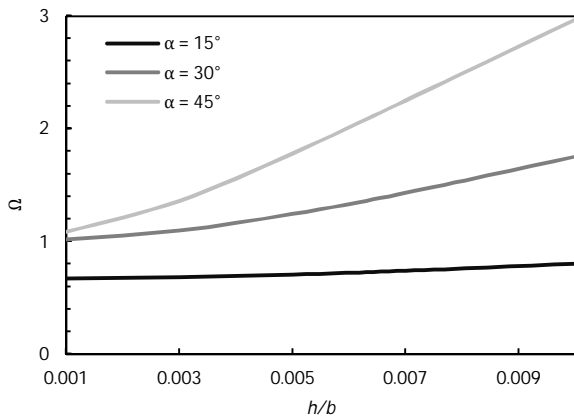
شکل 7 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با SWCNT با کسر حجمی 17% بر حسب n

دریافت که هر چه زاویه رأس مخروط  $\alpha$  افزایش می یابد تأثیر نانولوله های کربنی تقویتی بر روی افزایش فرکانس های بی بعد  $\Omega$  بیشتر می شود. به عنوان مثال برای  $\alpha = 15^\circ$  فرکانس بی بعد  $\Omega$ ، بسته به عدد موج محیطی  $n$ ، 165% تا 182%، برای  $\alpha = 30^\circ$  189% تا 234%، برای  $\alpha = 45^\circ$ ، 282% تا 325%، برای  $\alpha = 60^\circ$ ، 400% تا 456% افزایش یافته است. که این نتایج با نتایج حاصل در مرجع [46] کاملاً همخوانی دارد. در هر یک از زوایای رأس مخروط مقدار فرکانس حداقل در مقدار متفاوتی از  $n$  رخ می دهد، از طرفی با بزرگتر شدن زاویه رأس مخروط میزان وابستگی فرکانس بی بعد  $\Omega$  به عدد موج  $n$  کاهش می یابد یعنی دیگر با تغییر  $n$  شدت تغییرات  $\Omega$  زیاد نیست و نمودار به صورت خطی تقریباً افقی در می آید. به عنوان مثال منحنی مربوط زاویه  $30^\circ$  با افزایش  $n$  به سمت پایین متمایل می شود ولی منحنی مربوط به زاویه  $60^\circ$  درجه تقریباً افقی و بدون تغییر است. به همین دلیل منحنی های حالت ایزوتروپیک یکدیگر را در  $n = 4$  و  $5$  قطع می کنند.

در شکل های 7 و 8 به ترتیب تأثیر کسر حجمی های مختلف از نانولوله کربنی تقویتی بر روی افزایش فرکانس های بی بعد پوسته مخروطی با زاویه رأس  $15^\circ$  و  $30^\circ$  نشان داده شده است. همان طور که به وضوح مشاهده می شود با تقویت پوسته مخروطی با نانولوله ها حتی با کسر حجمی پایین 12% فرکانس های پوسته مورد نظر افزایش یافته است و سختی آن بیشتر شده است. شکل 7 همچنین نشان می دهد که به طور میانگین افزایش فرکانس بی بعد پوسته مخروطی مورد نظر در اثر تقویت با نانو لوله های کربنی برای کسر حجمی 12%، 17% و 28% به ترتیب 170%، 220% و 240% بوده است. می توان مشاهده نمود که اختلاف چندانی میان فرکانس های بی بعد برای کسر حجمی 12% و 28% وجود ندارد، ولی این اختلاف بین دو کسر حجمی 17% و 12% بیشتر است. البته با افزایش زاویه رأس مخروط این شرایط دیگر برقرار نیست به عنوان مثال در شکل 8 اختلاف میان فرکانس های بی بعد با کسر حجمی 28% و 17% بیشتر شده است. در شکل 8 مشاهده می گردد که افزایش فرکانس بی بعد پوسته مورد نظر به طور میانگین برای کسر حجمی 12%، 17% و 28% به ترتیب 220%، 260% و 300% نسبت به حالت بدون نانولوله تقویتی افزایش یافته است.

در شکل 9 اثرات نسبت ضخامت به شعاع سر بزرگ پوسته مخروطی نشان داده شده است. در این نمودار مشاهده می شود که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع مخروط مقدار فرکانس بی بعد  $\Omega$  افزایش می یابد. همچنین می توان مشاهده نمود که با افزایش زاویه رأس مخروط، مقدار فرکانس بی بعد با شیب

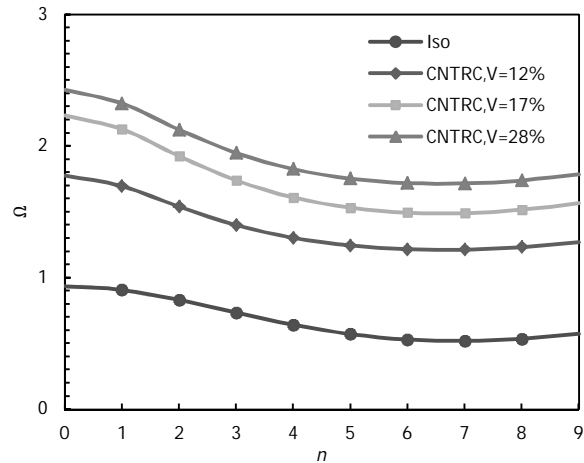




شکل 9 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی 28% با تغییر نسبت  $h/b$  برای زوایای راس مخروط مختلف ( $n=5$ )

جدول 6 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$  برای پوسته مخروطی ناقص با تکیه گاه ساده به ازای تغییرات سختی بستر الاستیک

پوسته ایزوتروپیک از جنس آلومینیم، $(n,m)=(2,1)$		پوسته تقویت شده با نانولوله کربنی با کسر حجمی 12%، $(n,m=1)$		$K_p$ (N/m)	$K_w$ (N/m <sup>2</sup> )
$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$		
0/76629	0/84317	2/22735	1/69684	0	0
0/80226	0/88526	2/33541	1/80034	$10^6$	
0/82601	0/90578	2/37625	1/82417	$2/5 \times 10^6$	
0/83277	0/93077	2/41315	1/85236	$5 \times 10^6$	
0/82449	0/89788	2/31812	1/79309	0	
0/85022	0/92871	2/40214	1/83526	$10^6$	
0/86110	0/94566	2/45635	1/85218	$2/5 \times 10^6$	
0/88011	0/97021	2/50541	1/88615	$5 \times 10^6$	
0/86144	0/94003	2/43502	1/84129	0	$2 \times 10^6$
0/88028	0/98113	2/51025	1/87624	$10^6$	
0/89217	1/01210	2/57821	1/89805	$2/5 \times 10^6$	
0/91576	1/04473	2/63653	1/93742	$5 \times 10^6$	
0/90645	1/02783	2/56298	1/90521	0	
0/94788	1/07677	2/67539	1/96552	$10^6$	
0/97397	1/10303	2/75445	2/03217	$2/5 \times 10^6$	
1/01130	1/15480	2/81148	2/11256	$5 \times 10^6$	



شکل 8 تغییرات فرکانس بی بعد  $\Omega = \omega b \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$  برای پوسته مخروطی ناقص با زاویه راس  $\alpha = 30^\circ$  با تکیه گاه ساده ایزوتروپیک و تقویت شده با نانولوله با کسر حجمی های مختلف

در جدول 6 تاثیرات بستر الاستیک بر روی فرکانس های طبیعی ارتعاش پوسته مخروطی ناقص ایزوتروپیک از جنس آلومینیم و همچنین پوسته کامپوزیتی تقویت شده با نانو لوله های کربنی با تکیه گاه ساده مورد بررسی قرار گرفته است. در این جدول شانزده حالت برای سختی های بستر الاستیک در نظر گرفته شده است، به این صورت که چهار حالت برای سختی بستر وینکلر با مقادیر  $0, 10^6, 2 \times 10^6, 4 \times 10^6$  در نظر گرفته شده است و برای هر کدام از این حالات نیز چهار حالت برای سختی بستر پاسترناک با مقادیر  $0, 10^6, 2/5 \times 10^6, 5 \times 10^6$  در نظر گرفته شده است. مشاهده می گردد که احاطه نمودن پوسته مورد نظر با بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانس های طبیعی ارتعاش آن می گردد. با افزایش سختی های بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک فرکانس های بی بعد سیستم افزایش می یابد. همچنین با توجه به جدول 6 می توان گفت که تاثیر سختی های بستر وینکلر و پاسترناک بر روی افزایش فرکانس های بی بعد طبیعی پوسته مخروطی یکسان است.

### 6- نتیجه گیری

در این تحقیق ارتعاش آزاد پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله های کربنی تک جداره با توزیع یکنواخت و مستقر بر بستر الاستیک، بر اساس تئوری مرتبه اول برشی مورد بررسی قرار گرفته است. جهت اعمال خواص مکانیکی نانولوله ها از قانون مخلوطها استفاده شده است. از روش ریتز و اعمال شرایط مرزی ساده، فرکانس های پوسته مخروطی ناقص به دست آمده اند.

نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان می دهد که با تقویت پوسته مخروطی با نانولوله های کربنی می توان سختی آن را به میزان دلخواهی افزایش داد. در واقع با تغییر کسر حجمی نانولوله های استفاده شده، فرکانس های ارتعاش آن را به میزان دلخواه تغییر داد. تأثیر نانولوله ها در افزایش فرکانس پوسته با افزایش زاویه رأس مخروط افزایش می یابد. افزایش نسبت ضخامت به شعاع سر بزرگ پوسته باعث افزایش فرکانس های ارتعاش آن می گردد و تأثیر این عامل در افزایش فرکانس ها با افزایش زاویه رأس مخروط افزایش می یابد. همچنین احاطه نمودن پوسته مورد نظر با بستر الاستیک باعث افزایش مقادیر فرکانس های طبیعی ارتعاش آن می گردد.

7- پیوست

$$S_{44} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (2l^2 h^2 \sin \alpha + 4h^2 a) - \frac{1}{8\pi R^2 l} (4\pi^3 C_{11} a R^2 + 4A_{35} a l^2 R^2 \pi - 4l^2 C_{12} R \pi \cos^2 \alpha - 2l^3 C_{22} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4l^2 C_{22} a \pi \cos^2 \alpha + 2\pi^3 C_{11} R^2 l \sin \alpha + 4C_{66} n^2 a l^2 \pi + 4l^2 C_{12} R \pi + 4l^2 C_{22} a \pi + 2l^3 C_{22} \pi \sin \alpha + 2l^3 A_{55} R^2 \pi \sin \alpha + 2l^3 C_{66} n^2 \pi \sin \alpha)$$

$$S_{45} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (-2C_{66} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha - 2C_{12} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha + 2l^3 C_{66} n \cos^2 \alpha + 2l^3 C_{22} n \cos^2 \alpha - 4\pi^2 C_{66} n a l R - 4\pi^2 C_{12} n a l R - 2l^3 C_{66} n - 2l^3 C_{22} n)$$

$$S_{51} = 0, S_{52} = 0$$

$$S_{53} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (-2l^3 A_{44} n R \pi \sin \alpha - 4A_{44} n a l^2 R \pi)$$

$$S_{54} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (2l^3 C_{66} n \cos^2 \alpha - 2C_{66} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha - 2C_{12} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha + 2l^3 C_{22} n \cos^2 \alpha - 4\pi^2 C_{66} n a l R - 4\pi^2 C_{12} n a l R - 2l^3 C_{66} n - 2l^3 C_{22} n)$$

$$S_{55} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (2l^2 h^2 \sin \alpha + 4h^2 a) - \frac{1}{8\pi R^2 l} (4\pi^3 C_{66} a R^2 + 2l^3 C_{22} n^2 \pi \sin \alpha - 4l^2 C_{66} R \pi \cos^2 \alpha - 2l^3 C_{66} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4l^2 C_{66} a \pi \cos^2 \alpha + 2\pi^3 C_{66} \sin \alpha R^2 l + 4A_{44} a l^2 R^2 \pi + 4C_{22} n^2 a l^2 \pi + 4l^2 C_{66} R \pi + 4l^2 C_{66} a \pi + 2C_{66} l^3 \pi \sin \alpha + 2l^3 A_{44} R^2 \pi \sin \alpha)$$

که در آن  $A_{ij}$ ،  $B_{ij}$  و  $C_{ij}$  طبق رابطه زیر تعریف شده اند.

$$\{A_{ij} \ B_{ij} \ C_{ij}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} \{1 \ z \ z^2\} dz$$

### 8- مراجع

- [1] M. J. Ebrahimi, M. M. Najafizadeh, Free vibration of two-dimensional functionally graded circular cylindrical shells on elastic foundation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 5, pp. 27-38, 2013. (In Persian)
- [2] Sh. Hosseini-Hashemi, K. Khorami, Analysis of free vibrations of moderately thick cylindrical shells made of functionally graded materials using differential quadrature method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 93-106, 2011. (In Persian)
- [3] K. Daneshjou, R. Madoliat, M. Talebitooti, Three-dimensional vibration analysis and critical speed of rotating orthogonally stiffened laminated cylindrical shells under axial load and pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 80-94, 2012. (In Persian)
- [4] A. Arjangpay, R. Ansari, M. Darvazah, Vibration analysis of a FGM cylindrical shell using MLPG Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 93-101, 2012. (In Persian)
- [5] C. H. Sun, F. Li, H. M. Cheng, G. Q. Lu, Axial Young's modulus prediction of single-walled carbon nanotube arrays with diameters from nanometer to meter Scales, *Applied Physics Letters*, Vol. 87, pp. 193101-3, 2005.
- [6] R. Zhu, E. Pan, A. K. Roy, Molecular dynamics study of the stress-strain behavior of carbon-nanotube reinforced Epon 862 composites, *Material Science Engineering A*, Vol. 447, No. 1-2, pp. 51-7, 2007.
- [7] J. D. Fidelus, E. Wiesel, F. H. Gojny, K. Schulte, H. D. Wagner, Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites, *Composites Part A*, Vol. 36, No. 11, pp. 1555-61, 2005.
- [8] M. Griebel, J. Hamaekers, Molecular dynamics simulations of the elastic moduli of polymer-carbon nanotube composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 17-20, pp. 1773-88, 2004.
- [9] Y. S. Song, J. R. Youn, Modeling of effective elastic properties for polymer based carbon nanotube composites, *Polymer*, Vol. 47, No. 5, pp. 1741-8, 2006.

$$S_{11} = \frac{\rho h \omega^2 l}{2} - \frac{1}{8\pi R^2 l} (4\pi^3 A_{11} a R^2 - 4l^2 A_{12} R \alpha \cos^2 \alpha - 2l^3 A_{22} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4l^2 A_{22} a \pi \cos^2 \alpha + 2\pi^3 A_{11} R^2 l \sin \alpha + 4A_{66} n^2 a l^2 \pi + 4l^2 A_{12} R \pi + 4l^2 A_{22} a \pi + 2l^3 A_{22} \sin \alpha \pi + 2l^3 A_{66} n^2 \sin \alpha \pi)$$

$$S_{12} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (-2A_{22} n \sin \alpha l^2 R \pi^2 + 2l^3 A_{66} n \cos^2 \alpha - 4\pi^2 A_{66} n a l R + 2l^3 A_{22} n \cos^2 \alpha - 4\pi^2 A_{22} n a l R - 2A_{66} n \sin \alpha l^2 R \pi^2 - 2l^3 A_{22} n - 2l^3 A_{66} n)$$

$$S_{13} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (-4\pi^2 A_{12} \cos \alpha a l R - 2A_{22} \cos \alpha \sin \alpha l^2 R \pi^2 + 2l^3 A_{22} \cos^3 \alpha - 2l^3 A_{22} \cos \alpha)$$

$$S_{14} = 0, S_{15} = 0$$

$$S_{21} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (-2A_{22} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha + 2l^3 A_{66} n \cos^2 \alpha - 4\pi^2 A_{66} n a l R + 2l^3 A_{22} n \cos^2 \alpha - 4\pi^2 A_{22} n a l R - 2A_{66} n l^2 R \pi^2 \sin \alpha - 2l^3 A_{22} n - 2l^3 A_{66} n)$$

$$S_{22} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (48a + 24l \sin \alpha) - \frac{1}{8\pi R l} (4\pi^3 A_{66} a R^2 + 2l^3 A_{22} n^2 \sin \alpha \pi - 4l^2 A_{66} R \pi \cos^2 \alpha - 2l^3 A_{66} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4l^2 A_{66} a \cos^2 \alpha \pi + 2\pi^3 A_{66} \sin \alpha R^2 l + 4A_{22} n^2 a l^2 \pi + 4l^2 A_{66} R \pi + 4l^2 A_{66} a \pi + 2A_{66} l^3 \sin \alpha \pi)$$

$$S_{23} = -\frac{1}{8\pi R l} (2l^3 A_{22} n \cos \alpha \sin \alpha \pi + 4A_{22} n \cos \alpha a l^2 \pi)$$

$$S_{24} = 0, S_{25} = 0$$

$$S_{31} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (-4\pi^2 A_{12} a l R \cos \alpha - 2A_{12} l^2 R \pi^2 \cos \alpha \sin \alpha + 2l^3 A_{22} \cos^3 \alpha - 2l^3 A_{22} \cos \alpha)$$

$$S_{32} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (2l^3 A_{22} n \cos \alpha \pi \sin \alpha + 4A_{22} n a l^2 \pi \cos \alpha)$$

$$S_{33} = \frac{\rho h \omega^2 l}{96} (48a + 24l \sin \alpha) - \frac{1}{8\pi R^2 l} (4\pi^3 A_{55} a R^2 + 2\pi^3 A_{55} R^2 l \sin \alpha + 4l^2 A_{22} a \pi \cos^2 \alpha + 4A_{44} n^2 a l^2 \pi + 2l^3 A_{22} \pi \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2l^3 A_{44} n^2 \pi \sin \alpha) - \frac{\omega^2}{4l} (2k_p \pi a \sin 2\pi - 2k_p \pi^2 a - 2k_w l^2 - k_p \pi^2 l \sin \alpha)$$

$$S_{34} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (2A_{55} l^2 R^2 \pi^2 \sin \alpha + 4\pi^2 A_{55} a l R^2)$$

$$S_{35} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (-2l^3 A_{44} n R \pi \sin \alpha - 4A_{44} n a l^2 R \pi)$$

$$S_{41} = 0, S_{42} = 0$$

$$S_{43} = -\frac{1}{8\pi R^2 l} (2A_{55} l^2 R^2 \pi^2 \sin \alpha + 4\pi^2 A_{55} a l R^2)$$

- [28] X. Zhao, K. M. Liewa, Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a meshless method, *composite structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 649-664, 2011.
- [29] H. Shen Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2096-2108, 2011.
- [30] H. Shen Shen, Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 10, pp. 2496-2503, 2011.
- [32] R. Moradi-Dastjerdi, M. Foroutan, A. Pourasghar, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method, *Materials & Design*, Vol. 44, No. 1, pp. 256-266, 2013.
- [33] M. H. Yas, A. Pourasghar, S. Kamarian, M. Heshmati, Three-dimensional free vibration of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Materials & Design*, Vol. 49, No. 1, pp. 583-590, 2013.
- [34] H. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 111, pp. 291-300, 2014.
- [35] P. Malekzadeh, A. R. Fiouz, M. Sobhrouyan, Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 89, No. 1, pp. 210-221, 2012.
- [36] M. M. Fotouhi, R. D. Firouz-Abadi, H. Haddadpour, Free vibration analysis of nanocones embedded in an elastic medium using a nonlocal continuum shell model, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 64, No. 1, pp. 14-22, 2013.
- [37] R. D. Firouz Abadi, M. M. Fotouhi, H. Haddadpour, Stability analysis of nanocones under external pressure and axial compression using nonlocal shell model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 44, No. 9, pp. 1832-1837, 2012.
- [38] R. D. Firouz-Abadi M. M. Fotouhi, H. Haddadpour, Free vibration analysis of nanocones using a nonlocal continuum model, *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 41, pp. 3593-3598, 2011.
- [39] G. D. Seidel, D. C. Lagoudas, Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites, *Mechanics of Materials*, Vol. 38, No. 8-10, pp. 884-907, 2006.
- [40] V. Anumandla, R. F. Gibson, A comprehensive closed form micromechanics model for estimating the elastic modulus of nanotube-reinforced composites, *Composites Part A*, Vol. 37, No. 12, pp. 2178-85, 2006.
- [41] H. Shen Shen, Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 1, pp. 9-19, 2009.
- [42] M. E. Fares, Y. G. Youssif, A. E. Almir, Design and control optimization of composite laminated truncated conical shells for minimum dynamic response including transverse shear deformation, *Composite Structures*, Vol. 64, No. 2, pp. 139-150, 2004.
- [43] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- [44] A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu, Natural frequency of laminated orthotropic shells with different boundary conditions and resting on the Pasternak type elastic foundation, *Composites: Part B*, Vol. 42, No. 6, pp. 1562-1570, 2011.
- [45] R. Rahmani, A. Qurban Pour, A. Rastgoo, *Introduction to Nanocomposites and Nano-Tubes*, Tehran: Academic book Publication, 2012. (In Persian)
- [46] G. Formica, W. Lacarbonara, R. Alessi, Vibrations of carbon nanotube-reinforced composites, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, No. 10, pp. 1875-1889, 2010.
- [10] Y. Han, J. Elliott, Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/ carbon nanotube composites, *Computational Material Science*, Vol. 39, No. 2, pp. 315-23, 2007.
- [11] P. Bonnet, D. Sireude, B. Garnier, O. Chauvet, Thermal properties and percolation in carbon nanotube-polymer composites, *Journal of Applied Physics*, Vol. 91, pp. 201910-4, 2007.
- [12] P. Joshi, S. H. Upadhyay, Evaluation of elastic properties of multi-walled carbon nanotube reinforced composite, *Computational Materials Science*, Vol. 81, No. 1, pp. 332-338, 2014.
- [13] T. Vodenitcharova, L. C. Zhang, Bending and local buckling of a nanocomposite beam reinforced by a single-walled carbon nanotube, *International Journal of Solid Structures*, Vol. 43, No. 10, pp. 3006-24, 2006.
- [14] J. Wuite, S. Adali, Deflection and stress behaviour of nanocomposite reinforced beams using a multiscale analysis, *Composite Structures*, Vol. 71, No. 3-4, pp. 388-96, 2005.
- [15] M. H. Yas, M. Heshmati, Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite beam reinforced by randomly oriented carbon nanotube under the action of moving load, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 4, pp. 1371-1394, 2012.
- [16] M. H. Yas, N. Samadi, Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 98, No. 1, pp. 119-128, 2012.
- [16] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Free vibration of a conical shell with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 82, No. 1, pp. 83-94, 1982.
- [17] T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko, Natural frequencies of truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 92, No. 3, pp. 447-453, 1984.
- [18] A. W. Leissa, *Vibration of Shells*, New York: Acoustic Society of America, 1993.
- [19] K. R. Sivasdas, N. Ganesan, Free vibration of cantilever conical shells with variable thickness, *Computer and Structures*, Vol. 36, No. 3, pp. 559-566, 1990.
- [20] K. R. Sivasdas, N. Ganesan, vibration analysis of thick composite clamped conical shells of varying thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152, No. 1, pp. 27-37, 1992.
- [21] K. R. Sivasdas, N. Ganesan, Vibration analysis of laminated conical shells with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 148, No. 3, pp. 477-491, 1991.
- [22] L. Hua, Frequency analysis of rotating truncated circular orthotropic conical shells with different boundary conditions, *Composites Science and Technology*, Vol. 60, No. 16, pp. 2945-2955, 2000.
- [23] F. M. Li, K. Kishimoto, W. H. Huang, The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh-Ritz method, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, No. 5, pp. 595-602, 2009.
- [24] F. Tornabene, Free vibration analysis of functionally graded conical shell, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 198, No. 37-40, pp. 2911-2935, 2009.
- [25] A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu, H. M. Halilov, The vibration and stability of non-homogeneous orthotropic conical shells with clamped edges subjected to uniform external pressures, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 34, No. 7, pp. 1807-1822, 2010.
- [26] A. H. Sofiyev, large-amplitude vibration of non-homogenous orthotropic composite truncated conical shells, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 61, pp. 365-374, 2014.
- [27] A. R. Setoodeh, M. Tahani, E. Selahi, Transient dynamic and free vibration analysis of functionally graded truncated conical shells with non-uniform thickness subjected to mechanical shock loading, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, No. 5, pp. 2161-2171, 2012.