



## مدل سازی دینامیک ربات های پیوسته با المان های انحناء- ثابت و بدون حالات تکین محاسباتی

محمد دهقانی<sup>1</sup>، سید علی اکبر موسویان<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

\* تهران، صندوق پستی 19395-1999، moosavian@kntu.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 تیر 1393

پذیرش: 16 مرداد 1393

ارائه در سایت: 30 مهر 1393

کلید واژگان:

ربات پیوسته

مدل سازی دینامیک

المان انحناء- ثابت

### چکیده

مدل سازی ربات های پیوسته، با دو چالش دقت و زمان محاسبات روبرو است. در واقع، مدل های دقیق دارای مشکل حجم بالای محاسباتی می باشند، که منجر به عدم کارایی آن ها در کاربردهایی مانند کنترل برخط می گردد. این مقاله به ارائه روش جدیدی برای مدل سازی دینامیک بدنه ربات های پیوسته می پردازد. در این روش، شکل ربات با تعداد دلخواهی از المان های انحناء- ثابت (کمان دایروی) تخمین زده شده، معادلات دینامیک از روش انرژی لاگرانژ بدست می آیند. برای این منظور، ابتدا معادلات سینماتیک و دینامیک برای یک المان بدست می آیند. سپس، مدل سینماتیک ربات بصورت یک سری از المان های ذکر شده استخراج می گردد. در نهایت، به مدل سازی دینامیک بدنه ربات، با روش اولر- لاگرانژ پرداخته می شود. در این مقاله، دینامیک بدنه انعطاف پذیر ربات مورد توجه بوده، و مدل ارائه شده مستقل از نوع سیستم عملگری می باشد. علاوه بر آن، از مشکل حالات تکین محاسباتی، که در حالت صاف بودن المان های انحناء- ثابت اتفاق می افتد، اجتناب شده است. در پایان نیز، داده های حاصل از شبیه سازی مدل توسط نتایج حاصل از آزمون های تجربی صحت گذاری می شوند. نتایج نشان دهنده دقت مناسب مدل در پیش بینی رفتار دینامیک ربات های پیوسته می باشند. همچنین، مدل ارائه شده از لحاظ حجم محاسباتی مناسب بوده، برای کاربردهایی مانند کنترل برخط قابل استفاده است.

## Dynamics Modeling of Continuum Manipulators by Constant-Curvature Elements without Numerical Singularities

Mohammad Dehghani<sup>1</sup>, Seyed Ali Akbar Moosavian<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Khajeh nasir toosi University, Tehran, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Khajeh nasir toosi University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, moosavian@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 10 July 2014  
Accepted 07 August 2014  
Available Online 22 October 2014

Keywords:  
Continuum Robots  
Dynamics Modeling  
Constant-Curvature Elements

### ABSTRACT

Accuracy and numerical calculation time are the two main challenges of continuum robots dynamics modeling. In fact, the numerical calculation times of exact models are so long, that they are not practical in applications such as real-time control. This paper presents a new method for dynamics modeling of continuum robot backbones. In this method, the backbone shape is considered as an arbitrary number of constant-curvature (circular arc) elements, and the dynamics model is derived using Lagrange energy methods. First, kinetics and kinematics of one element are derived. Then, the robot kinematics is obtained as a series of such elements. Finally, the robot dynamics model is derived using Euler-Lagrange method. This paper is focused on dynamics of the flexible body of continuum robots, and the proposed model is independent of actuation systems. Besides, the numerical singularity of the constant-curvature elements is avoided, which occurs when an element is straight. The model is validated using experimental results. Comparison of simulation and experimental results shows the accuracy of the proposed method on dynamics modeling. Furthermore, the calculation time of the model is short enough to make it practical for applications such as real-time control.

### 1- مقدمه

عملیات جراحی [2,3] و گیرش اجسام مختلف [4] برای ربات های پیوسته در نظر گرفته شده اند. در این مکانیزم ها، بر خلاف ربات های معمولی و یا ابرافزونه [5,6]، حرکت بر اساس مفاصل انجام نمی شود [7]. در واقع، حرکت مکانیزم های پیوسته بر مبنای تغییر شکل اجزاء آن انجام می گردد. برای نمونه، تصویری از بازوی پیوسته آزمایشگاه آرس در شکل 1 نشان

ربات های پیوسته نسل جدیدی از ربات ها هستند، که در دو دهه اخیر مورد توجه واقع شده اند. ساختار بدون مفصل این ربات ها الهام گرفته از اندام برخی موجودات زنده، مانند خرطوم فیل و پاهای هشت پا می باشد [1]. با توجه به خصوصیات ویژه مکانیزم های پیوسته، کاربردهای متنوعی همچون اجرای

بسیار سنگین و زمان بر بوده، و یا با مشکل ناپایداری عددی مواجه اند. به این ترتیب، در عمل امکان استفاده از این مدل ها در کاربردهایی مانند کنترل برخط وجود ندارد.

با توجه به حجم سنگین محاسبات در روش های مدل سازی دقیق، می توان روش های تقریبی را برای مدل سازی بکار برد. در [21]، برای مدل سازی عضلات و هیدرودینامیک بازوی هشت پا، از مدلی شامل تعداد زیاد المان های جرم، فنر و دمپر خطی استفاده شد. در [22]، ربات بر اساس گشتاورهای عملگری به چند بخش تقسیم شده، و هر بخش با یک منحنی انحاء ثابت تقریب زده شد. در مواردی که نیروهای بزرگی به بدنه ربات های پیوسته اعمال نمی شود، این تقریب از دقت مناسبی برخوردار است. از این روش بارها برای تخمین سینماتیک ربات های پیوسته، بدون حضور نیروهای خارجی، استفاده شده است [3]. در [23] برای اولین بار، از این تقریب با رویکرد المانی برای مدل سازی استاتیک ربات استفاده شد. در [24]، این تقریب برای تعیین فاصله بین دو صفحه راهنمای مجاور (شکل 1) بکار گرفته شده، سپس، با صرف نظر از دینامیک هسته مرکزی، دینامیک صفحات راهنما توسط روش کین 3 بدست آمده است. از لحاظ زمان محاسباتی، هیچ یک از مدل های فوق قابلیت استفاده در محاسبات برخط برای کاربردهایی مانند کنترل برخط را ندارند. در [25]، مدلی تقریبی ارائه شده، تا بتوان از آن برای تخمین از دینامیک ربات در یک حلقه کنترل برخط استفاده نمود. در این مدل، کل بازوی ربات پیوسته بصورت یک کمان انحاء- ثابت، با یک گشتاور عملگری، فرض شده است. سپس، با تعریف برخی توابع شکلی 4، معادلاتی برای تقریب دینامیک سیستم ارائه شده، تا در یک حلقه کنترلی مورد استفاده قرار گیرد. هرچند تقریب کل بدنه ربات بصورت یک کمان انحاء- ثابت تقریب ضعیفی است، مدل فوق برای فراهم کردن تخمینی از دینامیک در حلقه کنترلی یک ربات بکار گرفته شد.

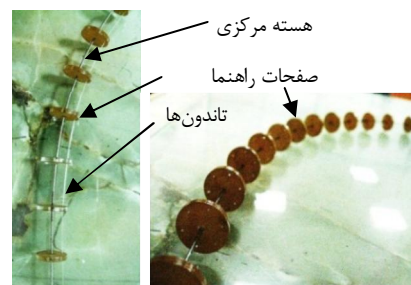
در این مقاله، به مدل سازی دینامیک بدنه بازوی پیوسته با استفاده از تعداد دلخواه المان انحاء- ثابت پرداخته می شود. هندسه این المان ها، مطابق آنچه در [23] برای مدل استاتیکی معرفی کردیم، به صورت کمانی از دایره است، که شعاع انحاء در تمام نقاط آن یکسان است. به این ترتیب، در تحلیل دینامیکی، مقدار انحاء در طول المان ثابت است، و این مقدار می تواند با گذشت زمان تغییر کند. به این ترتیب، بدنه ربات بصورت زنجیره ای از المان ها در نظر گرفته می شود. پس از مدل سازی دینامیک یک المان، به مدل سازی ربات به صورت ترکیبی المان ها پرداخته می شود. در این مقاله، دینامیک بدنه انعطاف پذیر ربات مورد توجه است، و مدل ارائه شده مستقل از عواملی مانند نوع برهمکنش با محیط و یا نوع سیستم عملگری و عواملی مانند نحوه توزیع نیروی اصطکاک تاندون ها می باشد. بنابراین، مقدار نهایی گشتاورهای ناشی از سیستم عملگری، بصورت داده شده فرض شده اند. علاوه بر این، برای اجتناب از برخی حالات منفرد عددی، از بسط تیلر معادلات استفاده شده است. پس از مدل سازی ربات، به راست آزمایی مدل توسط آزمون های تجربی پرداخته شده است. برای این منظور، نمودار جابجایی آزمون تجربی و شبیه سازی مدل با هم مقایسه شده اند. نتایج حاصل از آزمون های تجربی، نشان دهنده دقت مناسب مدل ارائه شده می باشند. لازم به ذکر است که در هیچ یک از مقالاتی که اشاره شد، از داده های آزمون تجربی برای صحت گذاری مدل دینامیک استفاده نشده، و استفاده از داده های تجربی در حد آزمون های استاتیکی بوده است. همچنین، زمان لازم برای اجرای

داده شده است. این ربات دارای یک هسته مرکزی<sup>1</sup> است، که نقش بدنه انعطاف پذیر بازو را ایفا می نماید. تجهیزات داخل محفظه پایه قرار گرفته، و بدنه بازو در محل پایه ثابت شده است. ربات نشان داده شده مجهز به سیستم عملگری تاندونی است. این سیستم متشکل از تعدادی تاندون (کابل)، صفحه راهنمای تاندون و موتور می باشد. صفحات راهنما تاندون ها را در کنار هسته مرکزی نگه می دارند. با کشش هر تاندون توسط موتور، بدنه به سمت آن خم می شود.

مدل سازی ربات های پیوسته، با توجه به ساختار انعطاف پذیر، پیچیده و غیر خطی آن ها، همواره مسئله ای چالش برانگیز بوده است. در [7-9]، اولین روش های مدل سازی مرتبط با مکانیزم های پیوسته مورد بررسی قرار گرفت. به این ترتیب که، با روش های مودال به تقریبی از دینامیک ربات پیوسته پرداخته شد، و از آن برای مدل سازی ربات های ابرافزونه استفاده شد. در [10-12]، از روش اولر- لاگرانژ برای مدل سازی دقیق دینامیک ربات های پیوسته استفاده شد. ابتدا، بدنه ربات بصورت بینهایت دیسک صلب دیفرانسیلی در نظر گرفته شد؛ سپس، با افزودن اثرات اینرسی، الاستیک و نیروهای داخلی و خارجی، مدلی برای ربات ارائه گشت. در نهایت، مدل ارائه شده بصورت دستگاه معادلات دیفرانسیلی-انگرنالی بدست آمد. در [13,14]، از همان روش قبل برای یک ربات صفحه ای چندبخشی استفاده شد. همچنین از تئوری میله کوسرت<sup>2</sup>، با رویکرد نیوتن- اولر، برای مدل سازی استاتیک [15-17] و دینامیک [18] ربات پیوسته استفاده شده است. برای افزایش سرعت و دقت مدل های استاتیکی، راهکارهایی در [16,19,20] ارائه شده است. اما متأسفانه، کلیه مدل های دینامیکی فوق از لحاظ حجم محاسباتی



(الف)

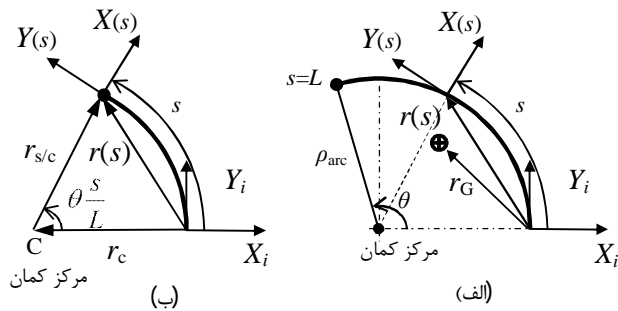


(ب)

شکل 1 یک بازوی ربات پیوسته با سیستم تاندونی. (الف) بازوی ربات. (ب) تاندون ها و صفحات راهنما

3- Kane method  
4- Shape Functions

1- Backbone  
2- The Theory of Cosserat Rod



شکل 2 متغیرهای سینماتیکی المان  $i$ -ام ربات در دستگاه محلی. (الف) دیاگرام کمان؛ (ب) تعیین موقعیت نقاط کمان

باشد، معادلات فوق قابل استفاده نخواهند بود. برای اجتناب از این مشکل محاسباتی، می توان از بسط تیلر معادلات استفاده نمود.

برای اجتناب از حالات تکین، از بسط تیلر معادله 4 استفاده می کنیم. بسته به میزان دقت مورد نیاز، می توان بسط تیلر را تا مرتبه های متفاوتی استخراج نمود. در این مقاله، برای دستیابی به دقت بالا بسط تیلر تا مرتبه پنج مورد استفاده قرار گرفته است. با محاسبه مشتقات  $r(s)$  از معادله 4، بسط تیلر آن به صورت زیر بدست می آید:

$$r(s) \approx \begin{bmatrix} \frac{s^6}{720L^5}\theta^5 + \frac{s^4}{24L^3}\theta^3 - \frac{s^2}{2L}\theta \\ \frac{s^5}{120L^4}\theta^4 - \frac{s^3}{6L^2}\theta^2 + s \end{bmatrix} \quad (5)$$

همچنین، برای محاسبه سرعت ها، می توان مشتق بردار موقعیت بر حسب  $\theta$  را بصورت شکل 3 بدست آورد.

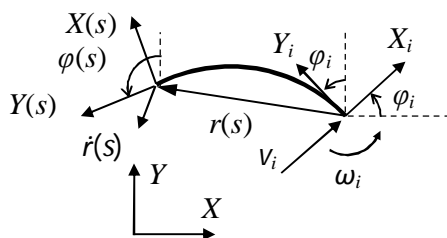
$$\dot{r}_G = \int_0^L \dot{r}(s) ds \quad (6)$$

موقعیت مرکز جرم المان در دستگاه محلی را بدست آورد. برای این منظور، با جایگذاری معادله 5 در 8، بدست می آوریم

$$\dot{r}_{Gi} \approx L \begin{bmatrix} \frac{-1}{5040}\theta^5 + \frac{1}{120}\theta^3 + \frac{-1}{6}\theta \\ \frac{1}{720}\theta^4 + \frac{-1}{24}\theta^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

برای بررسی سرعت مرکز جرم المان، با محاسبه مشتق معادله 9، داریم:

$$\dot{r}'_{Gi} \approx L \begin{bmatrix} \frac{-1}{1008}\theta^4 + \frac{1}{40}\theta^2 + \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{180}\theta^3 + \frac{-1}{12}\theta^1 + 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$



شکل 3 موقعیت یک المان در دستگاه مرجع

محاسبات مدل مناسب بوده، برای کاربردهایی مانند کنترل برخط مطلوب است.

ساختار مطالب این مقاله به شرح زیر می باشد: در بخش دوم، به معرفی و استخراج مدل سینماتیک یک المان انحاء- ثابت پرداخته می شود. در بخش سوم، انرژی جنبشی و ماتریس اینرسی یک المان بدست می آیند. در بخش چهارم، سینماتیک ربات، بصورت مجموعه ای از تعداد محدودی از المان ها بررسی می شود. بخش پنجم به مدل سازی دینامیک ربات می پردازد. صحت گذاری و نتیجه گیری نیز در بخش ششم ارائه می گردد.

## 2- سینماتیک یک المان

در این بخش، معادلات سینماتیک یک المان مورد بررسی قرار می گیرید. ابتدا معادلات دقیق هندسی معرفی شده، و حالات تکین محاسباتی در آن ها معرفی می شود. سپس به منظور اجتناب از حالات تکین، به تقریب معادلات با بسط تیلر آن ها پرداخته می شود.

المان مورد نظر، دارای انحاء ثابت بوده و بنابراین، هندسه آن به صورت یک کمان دایروی می باشد. مشخصه های این المان در شکل 2 و همچنین شکل 3 نشان داده شده اند. این المان به عنوان  $i$ -آمین المان از یک ربات پیوسته در نظر گرفته شده، که طرح کلی آن در شکل 4 قابل مشاهده است. در این مقاله، از تغییر طول بدنه ربات صرف نظر شده است. بنابراین، طول المان،  $L$ ، ثابت در نظر گرفته می شود. مطابق شکل 2، موقعیت هر نقطه از المان با  $s$  مشخص شده، که معرف فاصله طولی آن نقطه تا ابتدای المان است. المان دارای زاویه خم  $\theta$  می باشد. در محل ابتدایی المان، دستگاه مختصات  $X_i Y_i$  به عنوان دستگاه محلی المان تعریف شده است، بطوری که محور  $Y_i$  مماس بر منحنی المان است. بردار موقعیت نقاط المان بصورت  $r(s)$  نشان داده شده است. لازم به ذکر است که کلیه معادلات این بخش در دستگاه محلی متصل به پایه المان نوشته شده اند.

## 2-1- معادلات اصلی

برای کمان دایره با شعاع  $\rho_{arc}$  و طول  $L$  و زاویه  $\theta$  داریم

$$\rho_{arc} = \frac{L}{\theta} \quad (1)$$

مطابق شکل 2 (الف) و (ب)، موقعیت مرکز کمان در دستگاه محلی برابر

$$r_c = [-\rho_{arc} \quad 0]^T = \left[-\frac{L}{\theta} \quad 0\right]^T \quad (2)$$

و موقعیت نقطه  $s$  نسبت به مرکز کمان به صورت زیر بدست می آید [23]:

$$r_{s/c} = \frac{L}{\theta} \left[ \cos\left(\frac{s}{L}\theta\right) \quad \sin\left(\frac{s}{L}\theta\right) \right]^T \quad (3)$$

به این ترتیب، برای موقعیت نقطه  $s$  در دستگاه محلی داریم

$$r(s) = r_c + r_{s/c} = \frac{L}{\theta} \left[ \cos\left(\frac{s}{L}\theta\right) - 1 \quad \sin\left(\frac{s}{L}\theta\right) \right]^T \quad (4)$$

## 2-2- سینماتیک با اجتناب از حالات تکین

همان طور که ملاحظه می گردد، زاویه خم  $\theta$  در مخرج معادلات فوق ظاهر می شود. بنابراین، هنگامی که زاویه خم المان برابر صفر باشد، معادلات قابل حل نبوده، حالت تکین (منفرد) محاسباتی ایجاد می گردد. به عبارت دیگر، هرگاه که المانی از ربات در حالت مستقیم (خطی) و بدون خم

که  $k$  معرف بردار یکه محور  $Z$  (عمود بر صفحه) می باشد. از آنجا که شکل و وضعیت المان  $i$ -ام، با وضعیت دستگاه  $X_i Y_i$  و زاویه خمش آن،  $\theta_i$ ، قابل بیان است، مختصات عام المان  $i$ -ام را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$q_{elm,i} = [\varphi_i \quad \theta_i \quad x_i \quad y_i]^T \quad (14)$$

سرعت مطلق نقطه  $s$  المان را می توان با استفاده از روش سرعت نسبی بدست آورد. برای این منظور، از معادلات 6 و 7 برای سرعت و موقعیت در دستگاه  $X_i Y_i$  استفاده می کنیم. سپس، به کمک مقادیر سرعت خطی و دورانی دستگاه  $X_i Y_i$  در معادله 13، سرعت مطلق نقطه  $s$  به صورت زیر بدست می آید:

$$v(s) = v_i + \omega_i \times r(s) + \dot{r}(s) \quad (15)$$

مطابق شکل 3، برای زاویه المان در نقطه  $s$  داریم

$$\varphi(s) = \varphi_i + \frac{s}{L} \theta \quad (16)$$

با مشتق گرفتن از رابطه فوق، سرعت زاویه در نقطه  $s$  نیز بدست می آید:

$$\omega(s) = \omega_i + \frac{s}{L} \dot{\theta} \hat{k} \quad (17)$$

بنا به تعریف، برای انرژی جنبشی المان می توان از رابطه زیر استفاده نمود:

$$T_{elm} = \int \frac{1}{2} v^2(s) dm + \int \frac{1}{2} \omega^2(s) dI \quad (18)$$

که در آن،  $dm$  جرم یک جزء دیفرانسیلی، و  $dI$  ممان اینرسی جزء دیفرانسیلی از المان می باشند. در صورتی که توزیع جرمی المان یکنواخت باشد، می توان مقادیر فوق را بر حسب  $ds$  به این صورت بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} dm &= \rho A ds \\ dI &= \rho I_c ds \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن  $\rho$  چگالی،  $A$  سطح مقطع و  $I_c$  ممان دوم سطح مقطع می باشند. برای محاسبه انرژی جنبشی، می توان معادلات 6، 7، 15، 17 و 19 را در معادله 18 جایگذاری نمود، و انتگرال مربوطه را حل کرد. با حل انتگرال مذکور، مقدار انرژی جنبشی بر حسب سرعت های عام المان، 14، بدست می آید. مقدار بدست آمده می تواند به صورت ماتریسی زیر نوشته شود:

$$T_{elm,i} = \frac{1}{2} \dot{q}_{elm,i}^T M_{elm,i} \dot{q}_{elm,i} \quad (20)$$

که در آن،  $M_{elm,i}$  ماتریس اینرسی المان بوده، که همواره ماتریسی مثبت معین می باشد. با حل معادلات اشاره شده، برای ماتریس اینرسی داریم:

$$M_{elm,i} = M \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (21)$$

که در آن

همان طور که ذکر شد، مطابق شکل 2، ابتدای المان  $i$ -ام با دستگاه مختصات  $X_i Y_i$  مشخص شده است. بطور مشابه، مطابق شکل 4، انتهای المان  $i$ -ام برابر با پایه المان  $i+1$ -ام می باشد. با جایگذاری مقدار  $s=L$  در (5) و (6)، می توان موقعیت پایه المان  $i+1$ -ام را در دستگاه محلی المان  $i$ -ام بدست آورد. برای این منظور، با نمایش موقعیت پایه المان  $i+1$ -ام با  $r_{i+1}$  داریم

$$r_{i+1} = r(L) \square L \begin{bmatrix} \frac{1}{720} \theta^5 + \frac{1}{24} \theta^3 - \frac{1}{2} \theta \\ \frac{1}{120} \theta^4 - \frac{1}{6} \theta^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

و

$$r'_{i+1} = r'(L) \square L \begin{bmatrix} \frac{1}{144} \theta^4 + \frac{1}{8} \theta^2 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{30} \theta^3 - \frac{1}{3} \theta + 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

همان طور که ذکر شد، مطابق شکل 2، ابتدای المان  $i$ -ام با دستگاه مختصات  $X_i Y_i$  مشخص شده است. بطور مشابه، مطابق شکل 4، انتهای المان  $i$ -ام برابر با پایه المان  $i+1$ -ام می باشد. با جایگذاری مقدار  $s=L$  در (5) و (6)، می توان موقعیت پایه المان  $i+1$ -ام را در دستگاه محلی المان  $i$ -ام بدست آورد. برای این منظور، با نمایش موقعیت پایه المان  $i+1$ -ام با  $r_{i+1}$  داریم

$$r_{i+1} = r(L) \square L \begin{bmatrix} \frac{1}{720} \theta^5 + \frac{1}{24} \theta^3 - \frac{1}{2} \theta \\ \frac{1}{120} \theta^4 - \frac{1}{6} \theta^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

و

$$r'_{i+1} = r'(L) \square L \begin{bmatrix} \frac{1}{144} \theta^4 + \frac{1}{8} \theta^2 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{30} \theta^3 - \frac{1}{3} \theta + 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 3- سینتیک المان

در این بخش، حرکت المان در دستگاه مختصات مرجع بررسی می گردد. یک مجموعه مختصات عام برای المان انتخاب می شود. در نهایت، براساس مختصات انتخابی، انرژی جنبشی و ماتریس اینرسی المان بدست می آیند. در شکل 3، موقعیت کلی المان نسبت به دستگاه مرجع  $XY$  نشان داده شده است. زاویه دوران دستگاه محلی نسبت به دستگاه مرجع در نقطه  $s$  با  $\varphi(s)$  مشخص شده است. این زاویه معادل با زاویه خط مماس بر منحنی (محور  $Y_i$ ) با خط عمودی (محور  $Y$ )، و همچنین برابر زاویه عمود بر مماس (محور  $X_i$ ) و خط افقی (محور  $X$ ) می باشد. این مقدار برای پایه ربات، در موقعیت دستگاه محلی  $X_i Y_i$ ،  $\varphi_i$  نشان داده می شود. مطابق شکل، برای مقادیر سرعت خطی و سرعت زاویه ای دستگاه  $X_i Y_i$  داریم:

$$\begin{aligned} v_i &= [\dot{x}_i \quad \dot{y}_i]^T \\ \omega_i &= \dot{\varphi}_i \hat{k} \end{aligned} \quad (13)$$

مقدار  $r_{ij}$  در دستگاه مرجع بصورت زیر بدست می آید:

$$r_{ij} = R_j r'_{ij} \quad (25)$$

به این ترتیب، برای موقعیت پایه المان  $j$  ام، داریم

$$r_{j+1} = \sum_{i=1}^j R_i r'_{ji} + r_i \quad (26)$$

بطور مشابه، برای سرعت هر المان، از معادلات 7، 12 و 24، داریم

$$r'_{ij} = L_j R_j \begin{bmatrix} \frac{1}{144} \theta_j^4 + \frac{1}{8} \theta_j^2 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{30} \theta_j^3 - \frac{1}{3} \theta_j + 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\dot{r}_{ij} = r'_{ij} \dot{\theta}_j$$

برای انتقال سرعت از دستگاه مختصات محلی به دستگاه مرجع، داریم

$$v_{j+1} = v_j + r'_{ij} \dot{\theta}_j + \omega_j \times r_{ij} \quad (28)$$

با استفاده از 28، بصورت بازگشتی، سرعت خطی هر المان بدست می آید:

$$v_{j+1} = v_1 + \sum_{i=1}^j (r'_{ii} \dot{\theta}_i + \omega_i \times r_{ii}) \quad (29)$$

برای مقدار و سرعت زاویه ای نیز، از معادلات 16 و 17، داریم

$$\varphi_{j+1} = \varphi_1 + \sum_{i=1}^j \theta_i \quad (30)$$

$$\omega_{j+1} = \dot{\varphi}_{j+1} = \omega_1 + \sum_{i=1}^j \dot{\theta}_i$$

در صورت مشخص بودن زاویه خمش کلیه المان های ربات، و با فرض معلوم و ثابت بودن وضعیت پایه آن، شکل ربات بطور کامل تعیین می شود. بنابراین، مختصات عام ربات را بصورت بردار  $q$  تعریف می نماییم:

$$q = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n]^T \quad (31)$$

با استفاده از تعریف مختصات عام  $q$ ، ماتریس های ژاکوبی برای مقادیر سرعت های ربات را بدست می آوریم. برای سرعت زاویه ای المان  $j$  ام، با استفاده از 30 و 31، داریم

$$\omega_j = J_{\omega_j} \dot{q} \quad (32)$$

$$J_{\omega_j} = \begin{bmatrix} 1_{1 \times j-1} & 0_{1 \times (n+1-j)} \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

و

$$\dot{\theta}_j = [J_{\theta_j}]_{1 \times (n+3)} \dot{q} \quad (33)$$

$$J_{\theta_j}(1, i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

جای گذاری معادله 31 در معادله 29 نیز نتیجه می دهد

$$v_j = [J_{v_j}]_{2 \times (n+3)} \dot{q} \quad (34)$$

$$j=1 \Rightarrow J_{v1} = 0_{2 \times n}$$

$$j>1 \Rightarrow J_{v_j} = \begin{bmatrix} r'_{j1} + r_{j,2} & \dots & r'_{j,j-1} + r_{j,j} & 0_{2 \times (n-j)} \end{bmatrix}_{2 \times n}$$

که در آن برای جای گذاری جملات ضرب خارجی معادله 29، از مقدار زیر استفاده شده:

$$\begin{aligned} m_{11} &= ML^2 \left( \frac{1}{2520} \theta^4 + \frac{-1}{60} \theta^2 + \frac{1}{3} \right) + \rho L I_C \\ m_{12} &= ML^2 \left( \frac{1}{5760} \theta^4 + \frac{-1}{144} \theta^2 + \frac{1}{8} + \frac{I_C}{2AL^2} \right) \\ m_{13} &= ML \left( \frac{-1}{720} \theta^4 + \frac{1}{24} \theta^2 + \frac{-1}{2} \right) \\ m_{14} &= ML \left( \frac{-1}{5040} \theta^5 + \frac{1}{120} \theta^3 + \frac{-1}{6} \theta \right) \\ m_{22} &= ML^2 \left( \frac{1}{25920} \theta^4 + \frac{-1}{504} \theta^2 + \frac{1}{20} + \frac{I_C}{6AL^2} \right) \\ m_{23} &= ML \left( \frac{-1}{1008} \theta^4 + \frac{1}{40} \theta^2 + \frac{-1}{6} \right) \\ m_{24} &= ML \left( \frac{-1}{6720} \theta^5 + \frac{1}{180} \theta^3 + \frac{-1}{12} \theta \right) \\ m_{33} &= M \\ m_{34} &= 0 \\ m_{44} &= M \\ M &= \rho AL \end{aligned} \quad (22)$$

#### 4- سینماتیک ربات

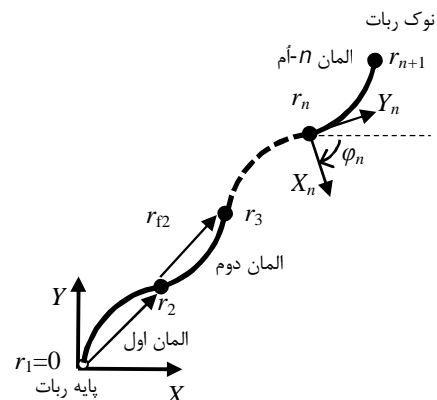
در این بخش، بردارهای موقعیت، سرعت ها و ماتریس های ژاکوبی برای المان های ربات بدست می آیند. همان طور که ذکر شد، ربات بصورت  $n$  المان انحناء- ثابت در نظر گرفته می شود، که دیاگرامی از آن در شکل 4 نشان داده شده است.

در بخش های قبل، موقعیت و سرعت نقاط انتهایی یک المان در دستگاه محلی متصل به پایه آن، مطابق معادلات 11، 12 و 7 بدست آمدند. در شکل 4، موقعیت انتهای المان  $j$  ام نسبت به ابتدای آن، با  $r_{ij}$  نشان داده شده است. با استفاده از معادله 11، در دستگاه محلی پایه المان برابر است با

$$r'_{ij} = L_j \begin{bmatrix} \frac{1}{720} \theta_j^5 + \frac{1}{24} \theta_j^3 - \frac{1}{2} \theta_j \\ \frac{1}{120} \theta_j^4 - \frac{1}{6} \theta_j^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

که در آن، بالا نویسی  $j$  به معنای بیان شدن بردار در دستگاه محلی است. با تعریف ماتریس دوران برای دستگاه پایه، بصورت

$$R_j = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_j) & -\sin(\varphi_j) \\ \sin(\varphi_j) & \cos(\varphi_j) \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (24)$$



شکل 4 سینماتیک یک ربات پیوسته، که بصورت  $n$  المان انحناء- ثابت در نظر گرفته شده است.

$$T = T_{tip} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_{elm,i}^T M_{elm,i} \dot{q}_{elm,i} \quad (43)$$

با جایگذاری 32، 34، 36 و 42، به دست می آید

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_{robot} \dot{q} \quad (44)$$

که در آن

$$M_{robot} = J_{v(n+1)}^T M_{tip} J_{v(n+1)} + J_{\omega(n+1)}^T I_{tip} J_{\omega(n+1)} + \sum_{i=1}^n J_{elm,i}^T M_{elm,i} J_{elm,i} \quad (45)$$

برای بررسی انرژی کشسانی هسته مرکزی، با فرض خطی بودن الاستیسیته، مطابق [23,16,15]، رابطه گشتاور خمشی  $m_b$  و زاویه خمش  $\theta$  برابر است با

$$m_b = -\frac{EI_{ca}}{L} (\theta - \theta^*) \quad (46)$$

که در آن،  $E$  مدول الاستیسیته،  $l_{ca}$  گشتاور دوم سطح مقطع المان،  $L$  طول المان، و  $\theta^*$  مقدار زاویه المان در حالت آزاد (بدون اعمال نیرو یا گشتاور) می باشد. با محاسبه انتگرال  $m_b d\theta$  برای المان  $j$ -ام، انرژی پتانسیل کشسانی ناشی از گشتاور معادله فوق را بصورت زیر بدست می آوریم:

$$V_{ej} = \frac{EI_{ca}}{2L_j} (\theta_j - \theta_j^*)^2 \quad (47)$$

انرژی پتانسیل کل ربات نیز، از حاصل جمع انرژی همه المان ها بدست می آید

$$V_e = \sum_{j=1}^n V_{ej} = \frac{EI_{ca}}{2L} \sum_{j=1}^n (\theta_j - \theta_j^*)^2 \quad (48)$$

با استفاده از تعریف 31، مشتقات معادله فوق را به صورت زیر در بردار  $G_e$  قرار می دهیم:

$$G_e = \left( \frac{\partial V_e}{\partial q} \right)^T = EI_{ca} \left[ \frac{\theta_1 - \theta_1^*}{L_1} \quad \frac{\theta_2 - \theta_2^*}{L_2} \quad \dots \quad \frac{\theta_n - \theta_n^*}{L_n} \right]^T \quad (49)$$

انرژی پتانسیل گرانشی نیز از حاصل جمع انرژی المان ها و نیز نوک ربات بدست می آید

$$V_g = -\sum_{j=1}^n M_j r_{Gj}^T g - M_{tip} r_{n+1}^T g \quad (50)$$

که در آن،  $g$  بردار شتاب جاذبه می باشد، و  $M_j = \rho A L_j$  جرم یک المان می باشد. بطور مشابه با معادله 49، مشتق معادله فوق برابر است با:

$$G_g = \left( \frac{\partial V_g}{\partial q} \right)^T = -\sum_{j=1}^n M_j J_{Gj}^T g - M_{tip} J_{v(n+1)}^T g \quad (51)$$

در شکل 5، نیروها و گشتاورهای اعمال شده به هسته مرکزی ربات نشان داده شده اند. مطابق شکل، فرض می کنیم که به کلیه نقاط ابتدا یا انتهای هر المان، یک گشتاور عملگری اعمال شده باشد. در یک ربات، ممکن است سیستم عملگری تنها برخی از این گشتاورها را ایجاد کند، و بقیه گشتاورها همواره صفر باشند. به عنوان مثال، اگر سیستم عملگری فقط به نوک ربات گشتاور اعمال کند، کلیه گشتاورهای  $\tau_1$  تا  $\tau_n$  برابر صفر خواهند بود، و فقط گشتاور  $\tau_{n+1}$  مقدار خواهد داشت. در قست نوک ربات نیز، یک نیروی خارجی، بصورت  $F_{tip}$  اعمال می شود. به این ترتیب، کل کار انجام شده روی هسته

$${}^{\times} r_{j,i} = \hat{k} \times (r_j - r_i) = \begin{bmatrix} y_i - y_j \\ x_j - x_i \end{bmatrix} \quad (35)$$

برای مختصات عام هر المان، مطابق 14، داریم

$$\dot{q}_{elm,j} = J_{elm,j} \dot{q} \quad (36)$$

که از جایگذاری ژاکوبین های 32 تا 34 بدست می آید

$$[J_{elm,j}]_{4 \times n} = [J_{\omega_j}^T \quad J_{\theta_j}^T \quad J_{v_j}^T]^T \quad (37)$$

بطور مشابه، برای مرکز جرم المان ها، از معادلات 9 و 25، موقعیت مرکز جرم المان  $j$ -ام نسبت به پایه المان،  $r_{Gj/j}$ ، برابر است با

$$r_{Gj/j} = R_j r'_{Gj/j} = L_j R_j \begin{bmatrix} -\frac{1}{5040} \theta_j^5 + \frac{1}{120} \theta_j^3 + \frac{-1}{6} \theta_j \\ \frac{1}{720} \theta_j^4 + \frac{-1}{24} \theta_j^2 + 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

برای سرعت مرکز جرم المان نسبت به پایه،  $r'_{Gj/j}$  از معادلات 10 و 25 بدست می آید

$$r'_{Gj/j} = R_j r''_{Gj/j} = L_j R_j \begin{bmatrix} -\frac{1}{1008} \theta_j^4 + \frac{1}{40} \theta_j^2 + \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{180} \theta_j^3 + \frac{-1}{12} \theta_j^1 + 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

با استفاده از 38 و 39، برای سرعت مرکز جرم المان داریم

$$v_{Gj} = v_j + r'_{Gj/j} \dot{\theta}_j + \omega_j \times r_{Gj/j} \quad (40)$$

در نهایت، با استفاده از معادلات 17، 34 و 38-40 ماتریس ژاکوبین برای سرعت مراکز جرم را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$J_{Gj} = \begin{bmatrix} J_{Gj} ]_{2 \times (n+3)} \dot{q} \\ r'_{j1} + r_{Gj2} \quad \dots \quad r'_{j(n-1)} + r_{Gj,n} \quad r'_{Gj/j} \quad 0_{2 \times (n-j-1)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

## 5- مدل سازی ربات

در این بخش، مدل دینامیک ربات بدست می آید. برای این منظور، ابتدا مقادیر انرژی جنبشی، پتانسیل گرانشی، پتانسیل کشسانی و کار انجام شده روی ربات محاسبه می گردند. سپس، با استفاده از روش اولر- لاگرانژ، معادلات حرکت ربات استخراج خواهند شد.

### 1-5- مقادیر کار و انرژی

در حالت کلی، می توان توزیع جرم ربات یا المان ها را یکنواخت فرض کرد. این حال، در بسیاری موارد، یک جرم اضافه به نوک ربات متصل می شود. این جرم می تواند ناشی از تجهیزاتی مانند ابزار گیرنده و یا حسگر باشد. به این ترتیب، انرژی جنبشی ربات را برابر با حاصل جمع انرژی جنبشی کلیه المان ها و نیز انرژی جنبشی نوک ربات در نظر می گیریم. با فرض آنکه جرم  $M_{tip}$  و ممان اینرسی  $I_{tip}$  به نوک ربات متصل باشند، انرژی جنبشی نوک ربات برابر با مقدار زیر خواهد بود:

$$T_{tip} = \frac{1}{2} v_{n+1}^T M_{tip} v_{n+1} + \frac{1}{2} \omega_{n+1}^T I_{tip} \omega_{n+1} \quad (42)$$

انرژی جنبشی کل ربات نیز، به صورت حاصل جمع انرژی المان ها و انرژی نوک ربات می باشد. به این ترتیب، داریم

است.

برای اندازه‌گیری دقیق موقعیت، یک صفحه اندازه‌گیری در زمینه پشت میله نصب شده است. با توجه به محدودیت‌های اندازه‌گیری، از بکارگیری سیستم عملگری تاندونی شکل 1 صرف‌نظر شده است. در عوض، برای بررسی حرکت در شرایط متفاوت، وزنه‌های مختلفی به نوک میله متصل می‌شوند. پایه میله به صورت افقی نگهداشته شده است. برای بررسی حرکت، میله از یک حالت اولیه رها می‌شود، و حرکت نوک آن اندازه‌گیری می‌گردد.

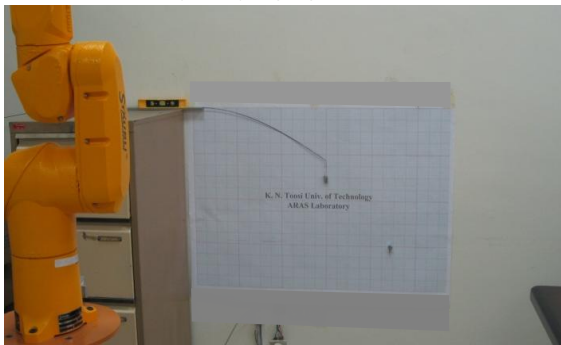
برای اندازه‌گیری نوک میله، از روش‌های تصویری بهره گرفته شده است. برای این منظور، حرکت میله توسط یک دوربین فیلم‌برداری با سرعت 59/98 فریم در ثانیه ثبت می‌گردد. برای نمونه، تصویری از یک ویدئو در شکل 6 آمده است. محدوده حرکتی نوک میله در کادری با ابعاد تقریبی 20 در 20 سانتیمتر جای می‌گیرد. بنابراین، کادر فیلم‌برداری کمی بزرگ‌تر از این محدوده انتخاب شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، یک شاخص رنگی در نوک میله قرار گرفته، تا تشخیص موقعیت دقیق آن را آسان کند. همچنین، برای کاهش نویزهای تصویری، کاغذ سفیدی در زمینه پشت شاخص گذاشته شده است.

برای پردازش فیلم ویدئویی، ابتدا تمامی فریم‌های ویدئو به صورت عکس از آن استخراج می‌شوند. سپس، با پردازش فریم‌ها در نرم‌افزار متلب<sup>3</sup>، محل شاخص نوک ربات در عکس تشخیص داده می‌شود. سپس، با مقایسه موقعیت شاخص با خطوط اندازه‌گیری که در پس زمینه میله قرار دارد، موقعیت دقیق شاخص در فضای آزمایشگاه مشخص می‌گردد. از کنار هم قرار دادن اطلاعات حاصل از کلیه فریم‌ها، نمودار حرکت شاخص به دست می‌آید. با توجه به واضح بودن تصاویر، اندازه‌گیری موقعیت شاخص بدون نیاز به مباحث فیلترینگ و پردازش داده و روش‌های آماری صورت گرفته است.

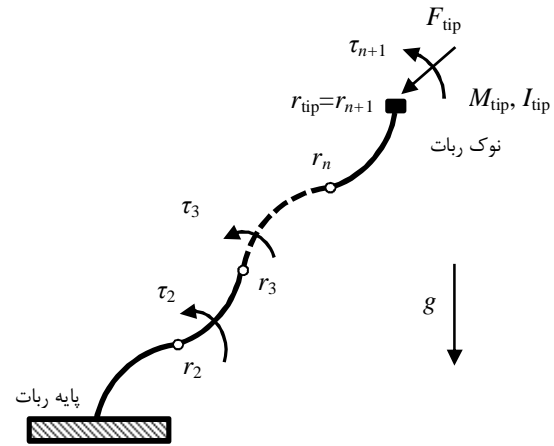
از عوامل ایجاد خطا در آزمون، دو مورد از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. مورد اول مربوط به اندازه‌گیری موقعیت شاخص، و خطای آن نسبت به موقعیت واقعی نوک میله می‌باشد. محل نصب شاخص، می‌تواند اندکی



شکل 6 اندازه‌گیری موقعیت نوک میله



شکل 7 مجموعه آزمایشگاهی برای آزمون نتایج



شکل 5 نیروهای اعمالی به بدنه ربات

مرکزی ربات، برابر با کار ناشی از گشتاورها، و نیز کار نیروی  $F_{tip}$  است:

$$W = F_{tip}^T r_{tip} + \sum_{i=1}^n \tau_i \varphi_i \quad (52)$$

با جایگذاری مقادیر ژاکوبین‌ها از معادلات 32 و 34 و مشتق‌گیری از معادله فوق، بردار نیروهای عام  $Q$  بدست می‌آید:

$$Q = \frac{\partial W^T}{\partial q} = \sum_{i=1}^n J_{oi}^T \tau_i + J_{v(n+1)}^T F_{tip} \quad (53)$$

## 5-2- معادلات حرکت

برای بدست آوردن معادلات حرکت، ابتدا اثرات کریولیس و جانب مرکز را با مشتق‌گیری از مقادیر ماتریس اینرسی 45، از روش عبارات کریستوفل<sup>1</sup>، بدست می‌آوریم. برای این منظور، داریم

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n]^T \quad (54)$$

$$C_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ijk}^* \dot{q}(j) \dot{q}(k)$$

که در آن

$$m_{ijk}^* = \frac{\partial M_{robot}(i, j)}{\partial q(k)} - \frac{\partial M_{robot}(j, k)}{2 \partial q(i)} \quad (55)$$

به این ترتیب، با جایگذاری معادلات 49، 51، 53 و 54 در فرمولاسیون اولر-لاگرانژ، معادله حرکت به صورت زیر بدست می‌آید.

$$M_{robot} \ddot{q} + C + G_e + G_g = Q \quad (56)$$

## 6- صحنه‌گذاری و نتیجه‌گیری

در این بخش، مدل ارائه شده به وسیله داده‌های آزمایشگاهی صحنه‌گذاری شده، کارایی مدل مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. همچنین، ضمن نتیجه‌گیری، اشاره‌ای به مباحث پیش‌رو و کارهای آینده خواهد شد.

برای آزمون نتایج، حرکت دینامیکی یک میله سوپر-الاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. با صرف‌نظر از اثرات سیستم عملگری، این میله نشان‌دهنده رفتار هسته مرکزی یک ربات پیوسته می‌باشد. در شکل 7، تصویری از مجموعه آزمایشگاهی مورد استفاده نشان داده شده است. میله مورد نظر دارای طول 60 سانتیمتر بوده، و از جنس آلایژ حافظه‌دار نایتینول<sup>2</sup>

1- Christoffel Symbols

2- Nitinol

3- MATLAB

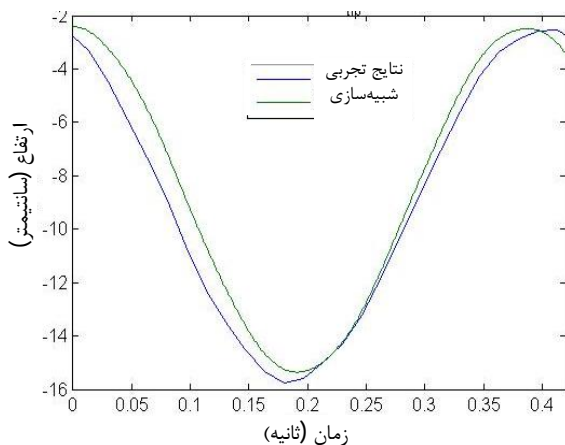
جدول 1 زمان لازم برای شبیه‌سازی یک ثانیه از حرکت میله.

تعداد المان	زمان انجام محاسبات	گام انتگرال‌گیری عددی
$n=1$	ثانیه 0/05	ثانیه 0/01
$n=2$	ثانیه 0/12	ثانیه 0/01
$n=3$	ثانیه 0/41	ثانیه 0/005
$n=4$	ثانیه 6/5	ثانیه 0/0005

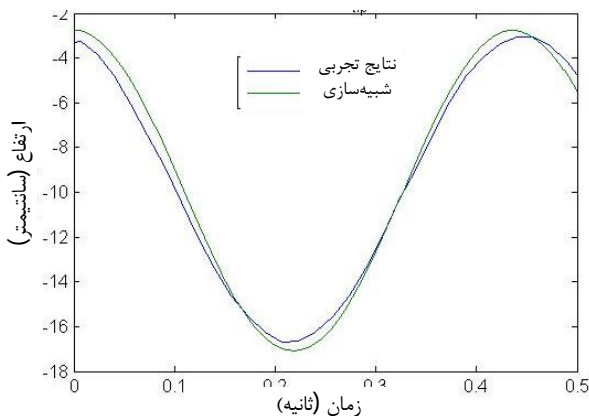
استفاده از تعداد المان‌های زیاد وجود ندارد. این ویژگی منجر به کاهش زمان محاسبات می‌گردد.

همان‌طور که در نتایج آزمون‌ها مشاهده شد، مدل ارائه شده در این مقاله از دقت مناسبی برای اهداف کنترلی برخوردار است. این مدل، که ربات پیوسته را به صورت مجموعه‌ای از المان‌های دایوری مدل می‌کند، با مشکل حالات تکین محاسباتی نیز مواجه نمی‌شود. حجم محاسباتی مدل نیز قابل قبول بوده، زمان لازم برای اجرای آن برای کاربردهایی مانند کنترل برخط مناسب است.

در آینده، دینامیک سیستم عملگری نیز به تفصیل مورد بررسی واقع خواهد شد، و رفتار آن به مدل دینامیک ارائه شده در این مقاله افزوده خواهد شد. سپس، از مدل بدست آمده برای کنترل بازوی پیوسته استفاده خواهد شد. همچنین، به مدل‌سازی ربات در حالت سه‌بعدی پرداخته خواهد شد.



شکل 8 مقایسه نتایج تجربی و شبیه‌سازی با جرم 0/6 گرم در نوک میله



شکل 9 مقایسه نتایج تجربی و شبیه‌سازی با جرم 1/3 گرم در نوک میله

نسبت به موقعیت دقیق نوک میله خطا داشته باشد. همچنین، در پردازش تصویر، همواره خطایی در تشخیص دقیق محل مرکز شاخص متحرک وجود دارد. عامل دیگر خطا، می‌تواند مربوط به لحظه رهاسازی میله باشد. در شبیه‌سازی، فرض بر آن است که سرعت میله در لحظه شروع حرکت دقیقاً برابر صفر باشد. اما در عمل، در هنگام رها کردن فیزیکی میله (زمان صفر)، ممکن است حرکت با یک سرعت اولیه آغاز شود. در واقع، رها شدن میله مانند یک ضربه در رفتار دینامیکی ظاهر می‌شود، که خطایی در پیش‌بینی مقدار و زمان آن می‌تواند وجود داشته باشد. با این حال، با توجه به مناسب بودن نتایج نهایی، واضح است که خطاهای فوق در محدوده‌های قابل قبول بوده‌اند. براساس این نتایج، از مدل ارائه شده می‌توان بخوبی در کاربردهایی مانند کنترل استفاده نمود.

در شکل 8، شکل 9 و شکل 10، به مقایسه نتایج تجربی و نتایج حاصل از شبیه‌سازی با مدل، در سه نمونه از آزمون‌های مختلف پرداخته شده است. در هر نمودار، مقدار جابجایی عمودی نوک میله در طول زمان آزمایش رسم شده است. همان‌طور که در ابتدای این بخش ذکر شد، در هر یک از آزمون‌ها، وزنه‌های متفاوت به نوک میله متصل شده است. در این آزمون‌ها، با توجه به عدم وجود پیچیدگی‌های غیر ضروری سیستم عملگری، شبیه‌سازی با دو المان، و انتگرال‌گیری با روش رونگ کوتاه مرتبه چهار انجام شده است. لازم به ذکر است که در بررسی‌های مختلف، افزایش بیش از حد تعداد المان‌ها منجر به افزایش شدید زمان محاسباتی می‌گردد، درحالی که تاثیر قابل توجهی در دقت مدل مورد آزمایش نخواهد داشت. بررسی خطای نصب در زاویه افقی پایه میله، و نیز مقدار دقیق ضریب الاستیسته آلیاژ فوق الاستیک نایتینول، مطابق [19] مورد تحلیل واقع شده است.

برای پیاده‌سازی معادلات مدل، برنامه‌ای در محیط نرم‌افزار متلب نوشته شد. این برنامه، از لحاظ محاسباتی غیر بهینه بوده، از روش‌هایی مانند پردازش موازی اطلاعات در آن استفاده نشده است. با این حال، زمان لازم برای انجام محاسبات برای کاربردهای برخط مناسب می‌باشد. همچنین، برای اجرای برنامه از یک رایانه دو هسته‌ای 2/8 GHz، با حافظه رم 4GB استفاده شده است.

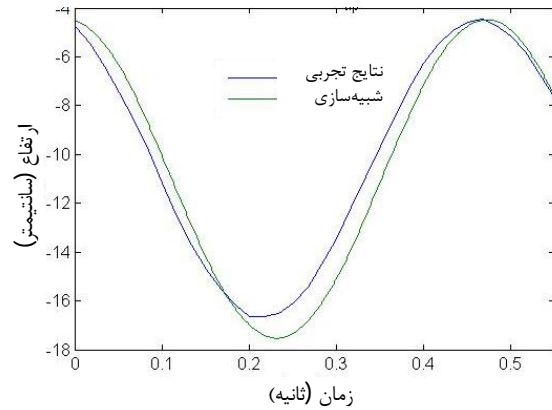
برای بررسی بهتر، مقدار زمان محاسبات با استفاده از تعداد المان‌های مختلف، در جدول 1 آمده است. برای این منظور، زمان لازم برای شبیه‌سازی یک ثانیه از حرکت میله توسط رایانه محاسبه شده است. همان‌طور که در جدول ملاحظه می‌شود، با افزایش تعداد المان‌ها، زمان محاسبات افزایش می‌یابد. یک دلیل افزایش زمان محاسبات، سنگین شدن حجم معادلات مدل می‌باشد. چرا که با افزایش تعداد المان، درجه آزادی مدل، ابعاد ماتریس اینرسی ربات و سایر جملات مربوطه بزرگ خواهند شد. دلیل دیگر، مربوط به ضرورت استفاده از گام‌های انتگرال‌گیری کوچکتر، در صورت استفاده از تعداد المان‌های بیشتر است. با توجه به اینکه، المان‌های بیشتر منجر به معرفی فرکانس‌های بالاتر در دینامیک مدل می‌گردند، در انتگرال‌گیری عددی معادلات ممکن است ناپایداری عددی ایجاد گردد. بنابراین، باید از گام‌های انتگرال‌گیری کوچکتری استفاده کرد. در موارد ذکر شده در جدول 1، مقادیر مناسب این گام‌های انتگرال‌گیری از طریق آزمون و خطا، به منظور جلوگیری از ناپایداری عددی، انتخاب شده‌اند. همان‌طور که در جدول ملاحظه می‌شود، در شبیه‌سازی با تعداد دو المان، زمان محاسبات 0/12 ثانیه بوده، که برای کاربردهای برخط بسیار مناسب است. باید توجه داشت که یک امتیاز مهم مدلی که در این مقاله ارائه شده، این است که برای مدل‌سازی نیازی به



$\theta$	زاویه خمش المان
$\theta'$	زاویه خمش در حالت آزاد
$\varphi$	زاویه خط مماس بر المان
$\omega$	سرعت زاویه‌ای
$\rho$	چگالی
$\rho_{arc}$	شعاع انحناء کمان
$\tau_i$	گشتاور اعمالی به ابتدای المان $i$ -ام
<b>بالانویس‌ها</b>	
$l$	بردار بیان شده در دستگاه محلی

## 8- مراجع

- [1] I. D. Walker, Continuous Backbone "Continuum" Robot Manipulators, *ISRN Robotics*, Vol. 2013, 2013.
- [2] D. Trivedi, C. D. Rahn, W. M. Kier, I. D. Walker, Soft robotics: Biological inspiration, state of the art, and future research, *Applied Bionics and Biomechanics*, Vol. 5, No. 3, pp. 99-117, 2008.
- [3] B. A. J. Robert J Webster III, Design and Kinematic Modeling of Constant Curvature Continuum Robots: A Review, *The International Journal of Robotics Research*, pp. 1661-1683, 2010.
- [4] P. Sabetian, A. Feizollahi, F. Cheraghpour, S. A. A. Moosavian, A compound robotic hand with two under-actuated fingers and a continuous finger, in *Safety, Security, and Rescue Robotics (SSRR), 2011 IEEE International Symposium on*, 2011, pp. 238-244.
- [5] M. Dehghani, M. Mahjoob, A Modified Serpenoid Equation for Snake Robots, in *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2008), Bangkok, Thailand, 2009*, pp. 1647-1652.
- [6] H. Y. S. Hirose, Snake-like robots, *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 16, No. 1, pp. 88-98, 2009.
- [7] G. S. Chirikjian, Hyper-redundant manipulator dynamics: A continuum approximation, *Advanced Robotics*, Vol. 9, No. 3, pp. 217-243, 1995.
- [8] J. W. B. G.S. Chirikjian, A modal approach to hyper-redundant manipulator kinematics, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 10, No. 3, pp. 343-354., 1994.
- [9] G. Chirikjian, A Continuum Approach to Hyper- Redundant Manipulator Dynamics, in *Proceedings of IROS'93 Yokohama*, 1993.
- [10] H. Mochiyama, T. Suzuki, Dynamics modelling of a hyperflexible manipulator, in *Proc. of the 41st SICE Annual Conference, Osaka, Japan, 2002*, pp. 1505-1510.
- [11] H. Mochiyama, T. Suzuki, Kinematics and dynamics of a cable-like hyper-flexible manipulator, in *Proc. IEEE International Conf. Robot. Autom., Taipei, Taiwan, 2003*, pp. 3672-3677.
- [12] H. Mochiyama, Hyper-flexible robotic manipulators, in *Proc. IEEE International Symposium on Micro-NanoMechatronics and Human Science, Nagoya, Japan, 2005*, pp. 41-46.
- [13] I. D. W. E. Tatlicioğlu, D. M. Dawson, New dynamic models for planar extensible continuum robot manipulators, in *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2007*, pp. 1485-1490.
- [14] I. D. W. E. Tatlicioğlu, D.M. Dawson, Dynamic Modeling for Planar Extensible Continuum Robot Manipulators, *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 24, No. 4, 2009.
- [15] M. Dehghani, S. A. A. Moosavian, Modeling and control of a planar continuum robot, in *Advanced Intelligent Mechanisms (AIM), 2011 IEEE/ASME International Conference on*, 2011, pp. 966-971.
- [16] M. Dehghani, S. A. A. Moosavian, Compact modeling of spatial continuum robotic arms towards real-time control, *Advanced Robotics*, Vol. 28, No. 1, pp. 15-26, 2014.
- [17] M. Dehghani, S. A. A. Moosavian, Modeling of continuum robots with twisted tendon actuation systems, in *Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013 First RSI/ISM International Conference on*, Tehran, Iran, 2013, pp. 14-19.
- [18] D. C. Rucker, R. J. Webster, Statics and Dynamics of Continuum Robots With General Tendon Routing and External Loading, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 27, No. 6, pp. 1033-1044, 2011.
- [19] M. Dehghani, S. A. A. Moosavian, Characteristics identification of continuum robots for exact modeling, in *Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013 First RSI/ISM International Conference on*, Tehran, Iran, 2013, pp. 26-31.
- [20] M. Dehghani, S. A. A. Moosavian, A new approach for orientation determination, in *Robotics and Mechatronics (ICRoM), 2013 First RSI/ISM International Conference on*, Tehran, Iran, 2013, pp. 20-25.
- [21] T. Zheng, D. T. Branson, R. Kang, M. Cianchetti, E. Guglielmino, M. Follador, G. A. Medrano-Cerda, I. S. Godage, D. G. Caldwell, Dynamic continuum arm model for use with underwater robotic manipulators inspired by octopus vulgaris, in *Robotics and Automation (ICRA), 2012*



شکل 10 مقایسه نتایج تجربی و شبیه‌سازی با جرم 2/0 گرم در نوک میله.

## 7- فهرست علائم

$A$	سطح مقطع المان
$C$	بردار اثرات کریولیس و گریز از مرکز
$dI$	جزء دیفرانسیلی ممان اینرسی المان
$dm$	جزء دیفرانسیلی جرم المان
$E$	مدول الاستیسیته
$F_{tip}$	نیروی اعمالی به نوک ربات
$G_e$	بردار مشتقات انرژی پتانسیل کشسانی
$G_g$	بردار مشتقات انرژی پتانسیل گرانشی
$I_{ca}$	ممان دوم سطح المان
$I_{tip}$	ممان اینرسی نوک ربات
$J$	ماتریس ژاکوبین
$\hat{k}$	بردار یکه در امتداد محور $Z$ (عمود بر صفحه)
$L$	طول المان
$M_{elm,i}$	ماتریس اینرسی المان
$M_{robot}$	ماتریس اینرسی ربات
$M_{tip}$	جرم نوک ربات
$m_b$	گشتاور خمشی
$Q$	بردار نیروهای عام
$q$	مختصات عام ربات
$q_{elm,i}$	مختصات عام المان
$R$	ماتریس دوران
$r(s)$	بردار موقعیت نقطه $s$
$r_G$	موقعیت مرکز جرم المان
$r_i$	بردار موقعیت پایه المان $i$ -ام
$r_{fi}$	موقعیت نوک المان $i$ -ام نسبت به پایه آن
$s$	فاصله از پایه المان
$T$	انرژی جنبشی
$V$	بردار سرعت خطی
$V_e$	انرژی پتانسیل کشسانی
$V_g$	انرژی پتانسیل گرانشی
$W$	کار
$X_i Y_i$	دستگاه مختصات محلی، واقع در پایه المان $i$ -ام
$XY$	دستگاه مختصات مرجع

- [24] W. S. Rone, P. Ben-Tzvi, Continuum Robot Dynamics Utilizing the Principle of Virtual Power, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 30, No. 1, pp. 275 - 287 FEBRUARY, 2014.
- [25] I. S. Godage, D. T. Branson, E. Guglielmino, G. A. Medrano-Cerda, D. G. Caldwell, Dynamics for biomimetic continuum arms: A modal approach, in *Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, 2011 *IEEE International Conference on*, 2011, pp. 104-109.
- IEEE International Conference on*, 2012, pp. 5289-5294.
- [22] B. A. Jones, I. D. Walker, Kinematics for multisection continuum robots, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 22, No. 1, pp. 43-55, Feb, 2006.
- [23] M. Dehghani, S. A. A. Moosavian, Static Modeling of Continuum Robots by Circular Elements, in *Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE 2013)*, Mashhad, Iran, 2013.