

## اثر تنش‌های کوپل در میدان الاستودینامیک ناشی از موج الاستیک پراکنده شده توسط نانو حفره محصور در محیط بی نهایت

آزاده گودرزی<sup>1</sup>، حسین محمدی شجاع<sup>2\*</sup>، بهداد هاشمیان<sup>3</sup>

۱- دانشجوی دکترا، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

۲- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

\* تهران، صندوق پستی 11155-4313، shodja@sharif.edu

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 22 فروردین 1394

پذیرش: 02 خرداد 1394

ارائه در سایت: 30 خرداد 1394

کلید واژگان:

نانو حفره

تنش‌های کوپل

انتشار موج

طول مشخصه

در مطالعه حاضر، میدان الاستودینامیک ناشی از تفرق موج برشی الاستیک برون صفحه‌ای با فرکانس بالا توسط نانو حفره استوانه‌ای محصور در محیط الاستیک بی‌نهایت، با در نظر گرفتن اثر تنش‌های کوپل به دست آمده است. در تئوری‌هایی که اثر تنش‌های کوپل را در معادلات پایه‌ای در نظر می‌گیرند، پارامتری از جنس طول به نام طول مشخصه ماده وارد محاسبات می‌شود و به این ترتیب این تئوری‌ها توانایی توصیف تأثیر سائز در مقیاس‌های میکرو و نانو را دارند. همچنین، برخلاف تئوری کلاسیک الاستیسیته که قادر به توصیف پراکنش موج در فرکانس‌های بالا نیست، پراکنش‌های مشاهده شده در آزمایش‌های عملی در این تئوری‌ها قابل توصیف است. در این مطالعه، میدان الاستودینامیک اطراف حفره با در نظر گرفتن معادله حرکت و رابطه پراکنش موج و همچنین شرایط مرزی مناسب در دو تئوری‌ای که اثر تنش‌های کوپل را لحاظ کرده‌اند، به صورت تحلیلی به دست آمده است. همچنین ضریب تمرکز تنش دینامیکی اطراف حفره در این تئوری‌ها ارائه شده است و به عنوان موردهای خاص، نتایج حاصل از تحلیل دینامیکی در تئوری کلاسیک الاستیسیته و ضریب تمرکز تنش استاتیکی در تئوری‌های تنش کوپل به دست آمده است. با نمونه‌های ارائه شده در این تئوری‌ها، تأثیر فرکانس موج ورودی و همچنین نسبت طول مشخصه تنش کوپل به سائز سطح مقطع حفره روی میدان تنش، میدان جابه‌جایی و ضریب تمرکز تنش دینامیکی در اطراف حفره بررسی شده و با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک الاستیسیته مقایسه شده است.

## The effect of couple-stresses on the elastodynamic field of a diffracted wave by an embedded nano-cavity in an infinite medium

Azadeh Goodarzi, Hosein Mohammadi Shodja\*, Behdad Hashemian

- Department of Civil Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

\*P.O.B. 11155-4313 Tehran, Iran, shodja@sharif.edu

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 April 2015  
Accepted 23 May 2015  
Available Online 20 June 2015

Keywords:  
Nano cavity  
Couple-stresses  
Wave propagation  
Characteristic length

### ABSTRACT

In the present work, the elastodynamic field of the scattering of an anti-plane high frequency elastic shear wave due to an embedded nano cylindrical cavity in an infinite elastic medium is obtained by considering the effects of couple-stresses. In the theories accounting the effects of couple-stresses in their formulations, a new characteristic length of material is introduced into the formulations which enables them to capture size effect at micro and nano scale. Also, contrary to classical continuum theory which has difficulties in describing dispersion of wave at high frequencies, observed dispersive wave in experiments can be explained in the framework of these theories. In this work, the analytical expressions of elastodynamic fields around the cavity are obtained by considering equation of motion, dispersion relation and appropriate boundary conditions in the framework of two theories considering couple-stresses. Also, the dynamic stress concentration factor around the cavity within these theories is obtained, and, as a limiting case, the results of two cases of dynamic stress concentration factor in classical theory as well as static stress concentration factor in couple stress theories are recovered. In the framework of these theories, by several examples, the effects of frequency of incident wave and the ratio of couple stress characteristic length to the size of the cross section of the cavity on the displacement field, stress field and dynamic stress concentration factor around the cavity are studied, and the results are compared with the corresponding classical solutions.

### 1 - مقدمه

موج با طول میکرو ساختار مواد قابل مقایسه می‌شود، به خوبی شناخته شده است. از جمله ضعف‌های تئوری کلاسیک الاستیسیته می‌توان به فقدان توانایی توصیف تأثیر سائز در خصوصیات مواد در مقیاس‌های کوچک اشاره

ضعف تئوری کلاسیک الاستیسیته در بررسی رفتار مواد در مقیاس میکرو و نانو، و همچنین پدیده‌ی انتشار موج در فرکانس‌های بالا هنگامی که طول

Please cite this article using:

A. Goodarzi, H. Mohammadi Shodja, B. Hashemian, The effect of couple-stresses on the elastodynamic field of a diffracted wave by an embedded nano-cavity in an infinite medium, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 1-9, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کرد. در بسیاری از آزمایش‌های عملی مشاهده شده است که خصوصیات ذاتی مواد در مقیاس‌های میکرو و نانو تابع اندازه آن نمونه از ماده است، [1]،

همچنین پراکنش موج در فرکانس‌های بالا که در آزمایش‌های عملی دیده شده‌اند [۳۲] در تئوری کلاسیک الاستیسیته قابل توصیف نیست. تئوری‌های مرتبه بالاتر محیط پیوسته با وارد کردن ثوابتی جدیدی از جنس طول در فرمولاسیون، قادر به توصیف رفتار مواد در مقیاس میکرو و نانو و همچنین پراکنش موج در فرکانس‌های بالاست. در تئوری ارائه‌شده توسط برادران کسرات [4]، در هر نقطه از ماده علاوه بر سه درجه آزادی انتقالی، سه درجه آزادی چرخشی نیز در نظر گرفته شده است و به این ترتیب علاوه بر ماکرو چرخش، میکرو چرخش نیز وارد فرمولاسیون می‌شود.

تئوری برادران کسرات پس از حدود نیم قرن توسط ارینگن [5] کامل شد و با عنوان تئوری میکروپولار ارائه شد. در این تئوری‌ها میکرو چرخش و ماکرو چرخش با یکدیگر برابر نیست، به این معنی که میکرو چرخش‌ها مستقل از میدان جابه‌جایی کل در نظر گرفته می‌شوند. در تئوری کسرات یا میکروپولار علاوه بر دو ثابت مواد ایزوتروپیک در تئوری کلاسیک الاستیسیته، تعداد چهار ثابت جدید وارد فرمولاسیون تابع انرژی کرنشی می‌شوند، که گاهی محاسبات و در نتیجه کار کردن با این تئوری را پیچیده می‌کنند.

با یکسان قرار دادن ماکرو چرخش و میکرو چرخش در تئوری کسرات، تئوری تنش کوپل توسط میندلین و تیرستن [6] ارائه شده است. در تئوری تنش کوپل، میکرو چرخش از میدان جابه‌جایی به دست می‌آید. تعداد ثابت‌های اضافی واردشده در این فرمولاسیون به دو عدد کاهش می‌یابد. در این تئوری ثابتی از جنس طول که در این مقاله با عنوان طول مشخصه تنش کوپل نام برده شده است، وارد فرمولاسیون می‌شود. در مرجع [6] روابط مربوط به پراکنش موج در فرکانس‌های بالا ارائه شده است. در واقع برخلاف تئوری کلاسیک الاستیسیته که سرعت موج در مواد همگن همواره، در هر فرکانسی، مقدار ثابتی است، در تئوری تنش کوپل سرعت موج در ماده در فرکانس‌های بالا مقدار ثابتی نداشته و وابسته به فرکانس است. وابستگی سرعت موج به فرکانس، پراکنش موج نامیده می‌شود. در تئوری تنش کوپل انرژی کرنشی علاوه بر کرنش به گرادبان چرخش نیز وابسته است، ولی انرژی جنبشی مانند تئوری کلاسیک در نظر گرفته می‌شود. در تئوری تنش کوپل ارائه‌شده در [6]، تنها قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل وارد فرمولاسیون پایه‌ای می‌شود و قسمت کروی تانسور تنش کوپل نامشخص باقی می‌ماند. به همین دلیل ارینگن [5] آن را تئوری تنش کوپل نامشخص<sup>1</sup> نامیده است. برای نخستین بار یانگ و همکاران [7] تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده<sup>2</sup> را ارائه کردند که در این تئوری تانسور تنش کوپل متقارن است.

در مطالعاتی که به تازگی توسط حاج اسفندیاری و دارگوش [8] انجام شده است، با اثبات این که تانسور تنش کوپل همواره پادمتقارن است، قسمت کروری تانسور تنش کوپل برابر با صفر شده است و به این ترتیب تئوری جدید تنش کوپل ارائه شده است که در رابطه انرژی کرنشی آن برای مواد همگن و ایزوتروپیک فقط یک ثابت اضافه‌تر از ثابت‌های موجود در تئوری کلاسیک الاستیسیته وجود دارد. تئوری ارائه شده در [8] تئوری تنش کوپل سازگار<sup>3</sup> نامیده شده است.

تاکنون مسأله‌های استاتیکی متفاوتی در تئوری‌های مرتبه بالاتر محیط پیوسته بررسی شده است. از جمله آن‌ها می‌توان به مطالعه شجاع و قاضی سعیدی [9] اشاره کرد که در آن، توسط تئوری تنش کوپل [6] ناهمگنی

توسط صادقی و همکاران [12] اثر شدید وابستگی به اندازه روی رفتار استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای با تحریک الکترواستاتیک در تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده مطالعه شده است. در مورد مسأله‌های دینامیکی، انتشار موج رایلی در محیط نیمه بی‌نهایت توسط اوتسون [13] و جورجیادیس و همکاران [14] با استفاده از تئوری تنش کوپل [6] بررسی شده است. با مقایسه نتایج حاصل از این بررسی‌ها با نتایج آزمایشگاهی مشابه، در این مقالات بر لزوم استفاده از تئوری تنش کوپل و فقدان توانایی تئوری کلاسیک الاستیسیته در مسائلی که موج با فرکانس بالا در محیط انتشار می‌یابد، تأکید شده است.

همچنین شجاع و همکاران [15] با اضافه کردن ترم میکرو اینرسی چرخشی به تئوری تنش کوپل [6]، مسأله پراکندگی موج توسط میکرو و نانو فیبر محصور در محیط الاستیک بی‌نهایت را مورد بررسی قرار داده‌اند. با وارد کردن اثر میکرو اینرسی چرخشی در فرمولاسیون، علاوه بر طول مشخصه تنش کوپل یک طول مشخصه دینامیکی جدید مربوط به اینرسی میکرو ذرات وارد فرمولاسیون شده است و به این ترتیب اثر این دو طول مشخصه بر میدان تنش و سطح مقطع تفرق<sup>4</sup> بررسی شده است.

تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های نانو مستطیلی تابعی مدرج در محیط حرارتی با به‌کارگیری تئوری تنش کوپل اصلاح‌شده توسط بخششی و خورشیدی [16] مورد مطالعه قرار گرفته است و تأثیر پارامترهای مخلف از جمله نسبت ضخامت ورق به ثابت طول ماده بر فرکانس‌های طبیعی ورق مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مطالعه حاضر، هدف به‌دست آوردن میدان الاستودینامیک ناشی از پراکندگی موج برشی برون‌صفحه‌ای توسط حفره‌ای استوانه‌ای با مقطع دایروی در مقیاس میکرو و نانو است و موج با فرکانس بالا که طول موج آن در مقیاس میکرو و نانو است، بررسی می‌شود که تئوری کلاسیک الاستیسیته برای توصیف آن کامل نیست. به این منظور، روابط در تئوری‌های تنش کوپل، [۸،۶]، ارائه شده است و در نتیجه طول مشخصه تنش کوپل وارد معادلات حاکم بر مسأله می‌شود.

شایان یاد است که تعیین دقیق طول مشخصه مواد همچنان موضوع بسیاری از تحقیقات در این زمینه است و مقدار آن به طور دقیق برای تمامی مواد محاسبه نشده است. با این حال، آزمایش‌ها و مدل‌سازی‌های عددی که تاکنون انجام گرفته است بیان‌گر این مطلب است که طول مشخصه برای بسیاری از مواد در مقیاس میکرو و نانو است [17]. همان‌طور که در ادامه مطالعه حاضر نشان داده شده است، در روابط استفاده شده و نمودارهای نشان داده شده، پارامتر شعاع حفره توسط پارامتر مقدار طول مشخصه بی‌بعد

1- Indeterminate couple stress theory  
2- Modified couple stress theory  
3- Consistent couple stress theory

4- Scattering cross section

$$\kappa = \frac{1}{2} \nabla \nabla \times u \quad (6-ب)$$

در تئوری تنش کوپل، چگالی انرژی کرنشی علاوه بر کرنش به گرادینان چرخش نیز وابسته است و به صورت رابطه (7) نوشته می‌شود.

$$W = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon : II : \varepsilon + \mu \varepsilon : \varepsilon + 2\eta \kappa : \kappa + \eta' \kappa \cdot \kappa \quad (7)$$

در این روابط  $\mu$  به ترتیب ثابت لمه و مدول برشی موجود در تئوری کلاسیک است، همچنین  $\eta$  و  $\eta'$  ثوابتی هستند که در تئوری تنش کوپل وارد فرمولاسیون شده‌اند. برای مثبت معین بودن انرژی کرنشی، شرایط رابطه (8) باید برای این ثوابت برقرار باشد [6].

$$3\lambda + 2\mu > 0, \mu > 0, \eta > 0, -\eta > \eta' > \eta \quad (8)$$

با استفاده از رابطه مربوط به انرژی کرنشی، روابط بین قسمت متقارن تانسور تنش و تانسور کرنش و همچنین قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل و تانسور انحناء برای مواد ایزوتروپیک خطی به صورت روابط (9) نوشته می‌شوند.

$$\sigma^s = \lambda \varepsilon : II + 2\mu \varepsilon \quad (9-الف)$$

$$m = 4\eta \kappa + 4\eta' \kappa^T \quad (9-ب)$$

در رابطه‌ی (9-ب)،  $\kappa^T$  ترانهاده‌ی تانسور انحناء می‌باشد.

در تئوری تنش کوپل ارائه شده توسط میندلین و تیرستن [6]، در تمامی روابط ارائه شده تنها قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل وارد فرمولاسیون می‌شود و قسمت کروی مربوط به تانسور تنش کوپل نامشخص باقی می‌ماند.

در تئوری تنش کوپل که به تازگی توسط حاج اسفندیاری و دارگوش ارائه شده است [8]، با استفاده از شرایط مرزی و اصل کار مجازی نشان داده شده است که تانسور تنش کوپل تانسوری پادمتقارن است و در نتیجه قسمت کروی تانسور تنش کوپل صفر است. به این ترتیب در تئوری ارائه شده مشکل نامشخص بودن تانسور تنش کوپل دیگر مطرح نیست. در این تئوری، تنها یک ثابت مستقل اضافه بر ثابت‌های تئوری کلاسیک الاستیسیته وارد فرمولاسیون می‌شود.

شایان یاد است که تئوری ارائه شده در [8] می‌تواند با استفاده از شرط  $\eta' = -\eta$  به عنوان حالت خاصی از تئوری تنش کوپل میندلین و تیرستن [6] به دست آید.

روی هر سطح صاف با بردار عمود بر صفحه  $m$ ، میندلین و تیرستن [6] بردارهای تنش کاهش یافته  $\bar{T}$  و تنش کوپل کاهش یافته  $\bar{M}$  را به صورت روابط (10) تعریف کردند.

$$\bar{T} = n \cdot \sigma - \left(\frac{1}{2}\right) n \times \nabla(n \cdot m \cdot n) \quad (10-الف)$$

$$\bar{M} = M - M \cdot n n \quad (10-ب)$$

## 2-2- معادله حرکت در تئوری تنش کوپل

با توجه به روابط ارائه شده و روابط تعادل نیرو (3-الف) و تعادل ممان (3-ب)، معادله حرکت حاکم بر حسب بردار جابه‌جایی در غیاب نیروها و ممان‌های حجمی به صورت رابطه (11) به دست می‌آید.

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 u + \left(\frac{1}{1-2\nu} + l^2 \nabla^2\right) \nabla \nabla \cdot u = \frac{\rho}{\mu} \ddot{u} \quad (11)$$

در معادله حرکت ارائه شده  $\nu$  ضریب پواسون ماده است. همچنین  $l = \sqrt{\eta/\mu}$  طول مشخصه تنش کوپل نامیده می‌شود که در تئوری حاضر وارد فرمولاسیون شده است. پارامتر طول مشخصه،  $l$ ، این تئوری را قادر می‌سازد که اثر سایز در خصوصیات و رفتار مواد در مقیاس‌های کوچک و همچنین تفرق موج در فرکانس‌های بالا، هنگامی که طول موج به میکرو ساختارهای ماده نزدیک می‌شود، را بتواند توصیف کند. به طور کلی، ثابت‌های از جنس طول که در تئوری‌های مختلف مرتبه بالاتر محیط پیوسته وارد فرمولاسیون

می‌شود و به این ترتیب شعاع حفره در حدود طول مشخصه تنش کوپل که در مقیاس میکرو و یا نانو است، در نظر گرفته شده است. همچنین برای آن که حفره بتواند موجب پراکندگی موج ورودی منتشر شده در محیط بی‌نهایت شود، طول موج باید در حدود شعاع حفره (در مقیاس میکرو و یا نانو) باشد. به این ترتیب موج باید با فرکانس بالا در محیط انتشار یابد.

در این مطالعه، معادله حرکت و رابطه پراکنش موج برشی ارائه شده است و میدان جابه‌جایی موج متفرق شده توسط حفره محصور در محیط الاستیک بی‌نهایت با استفاده از تئوری تنش کوپل نامشخص [6] و تئوری تنش کوپل سازگار [8] به صورت تحلیلی به دست آمده است. همچنین، تأثیر طول مشخصه تنش کوپل بر میدان تنش در اطراف حفره و ضریب تمرکز تنش دینامیکی در تئوری تنش کوپل [6] و همچنین تئوری ارائه شده در [8] بررسی شده است. در مثال‌های ارائه شده، نتایج حاصل از این تحقیق برای دو مورد خاص نیز بررسی شده‌اند. در حالت نخست فرکانس خیلی کوچک در نظر گرفته می‌شود و بارگذاری به حالت استاتیکی نزدیک می‌شود، و نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از مسأله استاتیکی تحقیق لوباردا [10] در تئوری تنش کوپل [6] مقایسه می‌شود. همچنین برای حالت دوم، شعاع حفره نسبت به طول مشخصه تنش کوپل بسیار بزرگ‌تر در نظر گرفته می‌شود و نتایج حاصل با نتایج حاصل از مسأله دینامیکی مشابه در تئوری کلاسیک که توسط ارینگن [18] ارائه شده است، مقایسه می‌شوند.

## 2- فرمولاسیون تئوری تنش کوپل

### 2-1- روابط پایه‌ای در تئوری تنش کوپل

در ابتدا فرمولاسیون تئوری تنش کوپل [6] به طور خلاصه ارائه می‌شود. در این تئوری، میکرو چرخش و ماکرو چرخش  $\phi$ ، با هم مساوی و برابر کرل میدان جابه‌جایی  $u$ ، در رابطه (1)، در نظر گرفته می‌شوند، [6].

$$\phi = \frac{1}{2} \nabla \times u \quad (1)$$

همان‌طور که در روابط (2) مشخص است بردار کششی،  $T$  و بردار ممان کششی  $M$  بر یک سطح با بردار عمود بر سطح  $n$  به صورت روابط کوشی به ترتیب با تانسور تنش،  $\sigma$  و تانسور تنش کوپل  $m$  در ارتباط است.

$$T = n \cdot \sigma \quad (2-الف)$$

$$M = n \cdot m \quad (2-ب)$$

معادلات تعادل نیرو و ممان در تئوری تنش کوپل در غیاب نیرو و ممان‌های حجمی به ترتیب به صورت روابط (3) است.

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \ddot{u} \quad (3-الف)$$

$$\nabla \cdot m + \sigma \times I = 0 \quad (3-ب)$$

در روابط (3-الف و ب)،  $I$  و  $\rho$  به ترتیب تانسور واحد و چگالی ماده است، همچنین عملگر « $\times$ » بین دو تانسور نوعی  $X$  و  $Y$  به صورت رابطه (4) تعریف می‌شود.

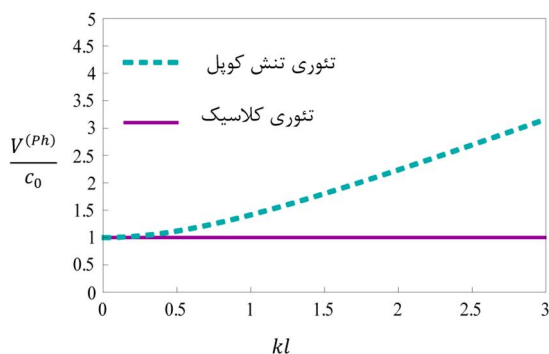
$$X \times Y = X_{ij} Y_{kj} e_i \times e_k \quad (4)$$

در رابطه بالا  $e$  بردار واحد است. برخلاف تئوری کلاسیک الاستیسیته، تانسور تنش در این تئوری متقارن نبوده و می‌تواند به صورت مجموع دو تانسور متقارن  $\sigma^s$  و پادمتقارن  $\sigma^a$  نوشته شود. با استفاده از روابط (3-الف و ب)، قسمت پادمتقارن تنش به صورت رابطه (5) نوشته می‌شود.

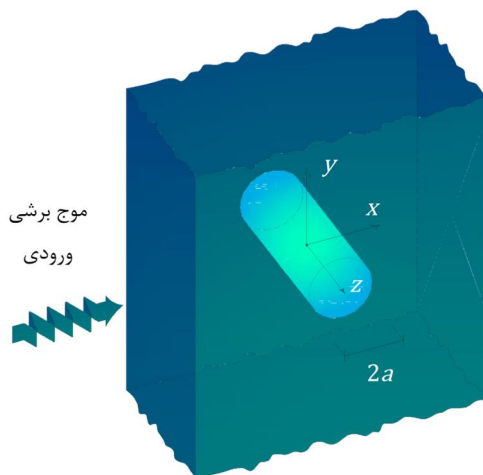
$$\sigma^a = \frac{1}{2} I \times (\nabla \cdot m) \quad (5)$$

برای تغییر شکل‌های کوچک، تانسور کرنش و تانسور انحناء (گرادینان چرخش)، به ترتیب، توسط روابط (6) از بردار جابه‌جایی به دست می‌آیند.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + u \nabla) \quad (6-الف)$$



شکل 1 منحنی سرعت فازی - فرکانس موج برشی در تئوری تنش کوپل و تئوری کلاسیک



شکل 2 انتشار موج برشی برون صفحه‌ای در محیط الاستیک دارای حفره استوانه‌ای

### 3- میدان الاستودینامیک اطراف حفره استوانه‌ای

در این قسمت فرض می‌شود که موج ورودی (13) که در محیط الاستیک با ابعاد بی‌نهایت انتشار دارد، به حفره محصور در محیط الاستیک برخورد کرده و پراکنده شود.

همان‌طور که در شکل 2 نشان داده شده است، حفره به شکل استوانه‌ای که محور آن هم راستا با محور  $z$  قرار گرفته است و با مقطع دایره‌ای شکل به شعاع  $a$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین موج ورودی در راستای محور  $x$  انتشار می‌یابد و جابه‌جایی‌هایی در راستای محور  $z$  ایجاد می‌کند. به دلیل آن که می‌خواهیم سازه حفره در مقیاس میکرو و یا نانو باشد، موج ورودی باید با فرکانس بالا انتشار داشته باشد تا طول موج مقدار بسیار کوچکی باشد و موج بتواند وجود حفره را حس کرده و متفرق شود. به دلیل انتشار موج در فرکانس بالا و عدم توانایی تئوری کلاسیک در توصیف موج در این محدوده فرکانسی، از تئوری‌های تنش کوپل استفاده می‌کنیم.

### 3-1- میدان جابه‌جایی اطراف حفره

از آن‌جا که موج ورودی به صورت موج برشی برون صفحه‌ای است، موج پراکنده‌شده از ناهمگنی نیز به صورت موج برشی برون صفحه‌ای می‌شود [18]. در صورتی که  $u_z^i$  موج پراکنده‌شده از حفره باشد، با استفاده از معادله حرکت کلی (11)، معادله حرکت حاکم بر محیط اطراف حفره برای مسأله‌های برون صفحه‌ای به صورت رابطه (16) می‌شود.

$$(1 - l^2 \nabla^2) \nabla^2 u_z^e = \frac{\rho}{\mu} \ddot{u}_z^e \quad (16)$$

با حل معادله (16) در دستگاه مختصات قطبی  $(r, \theta)$ ، موج پراکنده شده  $u_z^e$  در اطراف حفره به صورت رابطه (17) به دست می‌آید.

می‌شوند سبب وابسته به اندازه بودن خصوصیات مکانیکی و دینامیکی در مقیاس‌های بسیار کوچک می‌شود [20,19].

با صرف نظر از تنش‌های کوپل، تمامی روابط ارائه‌شده به صورت روابط تئوری کلاسیک تبدیل می‌شوند. در صورتی که در رابطه معادله حرکت به دست آمده در تئوری تنش کوپل، رابطه (11)، از طول مشخصه تنش کوپل صرف نظر شود،  $(l=0)$  معادله حرکت در تئوری کلاسیک به صورت رابطه (12) به دست می‌آید [18].

$$\nabla^2 u + \left( \frac{1}{1-2\nu} \right) \nabla \nabla \cdot u = \frac{\rho}{\mu} \ddot{u} \quad (12)$$

### 2-3- روابط پراکنش موج برشی در تئوری تنش کوپل

در این مطالعه، موج برشی برون صفحه‌ای ورودی  $u_z^i$  در محیط بی‌نهایت الاستیک در فضای  $(x, y, z)$  به صورت موج SH در رابطه (13) در نظر گرفته می‌شود.

$$u_z^i = u_0 \exp[i(kx - \omega t)] \quad (13)$$

این موج در راستای محور  $x$  انتشار می‌یابد، و  $u_0$  و  $\omega$  به ترتیب دامنه و فرکانس زاویه‌ای موج است. همچنین  $k$  عدد موج در این تئوری که با استفاده از معادله حرکت (11)، رابطه آن با فرکانس موج به صورت رابطه (14) نشان داده می‌شود.

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}l} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2\omega l}{c_0} \right)^2}} \quad (14)$$

رابطه (14)، رابطه پراکنش «عدد موج-فرکانس» موج برشی در تئوری تنش کوپل است. در این رابطه  $c_0 = \sqrt{\mu/\rho}$  سرعت موج برشی در تئوری کلاسیک است که همواره در هر فرکانسی مقدار ثابتی دارد که تنها وابسته به خصوصیات ماده‌ای است که موج در آن انتشار می‌یابد و از فرکانس موج ورودی مستقل است. به این ترتیب در تئوری کلاسیک الاستیسیته، موج برشی در هر فرکانسی غیرپراکنشی است. در صورتی که با تغییرات فرکانس، سرعت موج ثابت نماند و افزایش یا کاهش یابد موج پراکنشی نامیده می‌شود که در بسیاری از آزمایش‌های عملی این خاصیت در فرکانس‌های بالا از موج دیده شده است [2,3]. سرعت فازی موج برشی در مواد، در تئوری تنش کوپل با استفاده از رابطه (14) به صورت رابطه (15) به دست می‌آید.

$$V^{(Ph)} = c_0 \sqrt{1 + (kl)^2} \quad (15)$$

همان‌طور که مشخص است، سرعت موج برشی در این تئوری علاوه بر خصوصیات ماده  $(\mu, \rho, l)$  به فرکانس موج ورودی (عدد موج) نیز وابسته است و رابطه (15)، رابطه پراکنش «سرعت موج-فرکانس» در تئوری تنش کوپل است.

منحنی پراکنش سرعت فازی-فرکانس موج در تئوری تنش کوپل در شکل 1 نشان داده شده و با حالت کلاسیک مقایسه شده است. همان‌طور که مشخص است برخلاف سرعت ثابت موج در تئوری کلاسیک الاستیسیته برای هر فرکانسی، در تئوری تنش کوپل با افزایش فرکانس، به طوری که طول موج با طول مشخصه ماده قابل مقایسه شود، سرعت موج افزایش می‌یابد. افزایش سرعت موج در فرکانس‌های بالا در بسیاری از آزمایش‌های عملی برای مواد کامپوزیتی [21] و همچنین بتن [22] دیده شده است. در کتاب اروفویو [23] مراجع زیادی در ارتباط با پراکنش موج در مواد مختلف ارائه شده است.

اگر در رابطه‌های پراکنش از طول مشخصه تنش کوپل صرف نظر شود، سرعت موج مستقل از فرکانس ارائه‌شده در تئوری کلاسیک الاستیسیته به دست می‌آید و سرعت موج برشی برای هر ماده با توجه به خصوصیات آن همواره مقدار ثابت  $c_0$  است [18].

$$\alpha_2 = k'a \left[ k^2 a^2 \left[ (1 - k^2 l^2) a^2 + n(n+1) \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) l^2 \right] - n \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) \left[ \frac{(n - (n+1)k^2 l^2) a^2 + n(n^2 - 1)}{\left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) l^2} \right] \right] \quad (24-ب)$$

$$\alpha_3 = ka \left[ k^2 a^2 \left[ (1 - k^2 l^2) a^2 + n(n+1) \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) l^2 \right] + n \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) \left[ \frac{(n + (n+1)k^2 l^2) a^2 + n(n^2 - 1)}{\left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) l^2} \right] \right] \quad (24-ج)$$

$$\alpha_4 = -kk'(k^2 + k'^2) a^4 l^2 \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) \quad (24-د)$$

$$\alpha_5 = ka \left[ k^2 a^2 (1 + k^2 l^2) a^2 - n^2 \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) \left[ a^2 + (n^2 - 1) \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) l^2 \right] \right] \quad (24-ه)$$

با جای‌گذاری این ضرایب در رابطه (21)، میدان جابه‌جایی الاستودینامیک به‌صورت رابطه تحلیلی به‌دست می‌آید.

در شرایطی که همین مسأله را با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار ارائه‌شده در [8] بررسی کنیم، با حل معادله حاکم بر مسأله و صفر بودن بردار تنش و تنش کوپل روی مرز حفره، ضرایب  $A_n$  و  $B_n$  در رابطه (21) به صورت روابط (25) به‌دست می‌آید.

$$A_n = -i^n \zeta_n u_0 \left[ \beta_1 J_n(ka) K_n(k'a) - \beta_2 J_n(ka) K_{n-1}(k'a) + \beta_3 J_{n-1}(ka) K_n(k'a) \right] \times \left[ \beta_1 H_n^{(1)}(ka) K_n(k'a) - \beta_2 H_n^{(1)}(ka) K_{n-1}(k'a) + \beta_3 H_{n-1}^{(1)}(ka) K_n(k'a) \right]^{-1} \quad (25-الف)$$

$$B_n = -i^n \zeta_n u_0 \left[ \beta_4 J_{n-1}(ka) H_n^{(1)}(ka) - \beta_4 J_n(ka) H_{n-1}^{(1)}(ka) \right] \times \left[ \beta_1 H_n^{(1)}(ka) K_n(k'a) + \beta_2 H_n^{(1)}(ka) K_{n-1}(k'a) + \beta_3 H_{n-1}^{(1)}(ka) K_n(k'a) \right]^{-1} \quad (25-ب)$$

در روابط (25-الف و ب)،  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  و  $\beta_4$  به‌صورت روابط (26) تعریف می‌شوند.

$$\beta_1 = -n(k^2 + k'^2) a^4 \quad (26-الف)$$

$$\beta_2 = k'k^2 a^5 (1 - k^2 l^2) \quad (26-ب)$$

$$\beta_3 = kk^2 a^5 (1 - k^2 l^2) \quad (26-ج)$$

$$\beta_4 = k^3 a^5 (1 + k^2 l^2) \quad (26-د)$$

اگر در روابط به‌دست آمده، از طول مشخصه تنش کوپل صرف‌نظر کنیم، ضرایب  $A_n$  و  $B_n$  به صورت روابط (27) ساده می‌شوند.

$$A_n = -i^n \zeta_n u_0 \frac{k_0 a J_{n-1}(k_0 a) - n J_n(k_0 a)}{k_0 a H_{n-1}^{(1)}(k_0 a) - n H_n^{(1)}(k_0 a)} \quad (27-الف)$$

$$B_n = 0 \quad (27-ب)$$

با جای‌گذاری ضرایب (27-الف و ب) در رابطه (21)، میدان الاستودینامیک تفرق موج برشی برون صفحه‌ای توسط حفره در تئوری کلاسیک الاستیسیته به‌دست می‌آید [18].

### 2-3- میدان تنش و ضریب تمرکز تنش دینامیکی اطراف حفره

میدان تنش اطراف حفره برابر با حاصل‌جمع قسمت متقارن (9-الف) و

$$u_z^s = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n H_n^{(1)}(kr) + B_n K_n(k'r)) \cos(n\theta) \quad (17)$$

در رابطه (17)،  $H_n^{(1)}$  و  $K_n$  به ترتیب توابع هنکل نوع اول و بسل تعمیم‌یافته نوع دوم از مرتبه  $n$  است. همچنین زاویه  $\theta$  از محور  $x$  اندازه‌گیری می‌شود. ضرایب  $A_n$  و  $B_n$  ثوابتی هستند که با استفاده از شرایط مرزی مسأله به‌دست می‌آیند. در این رابطه  $k$  از رابطه (14) به‌دست می‌آید و  $k'$  به‌صورت رابطه (18) تعریف می‌شود.

$$k' = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2\omega l}{c_0} \right)^2}} \quad (18)$$

درون حفره میدان جابه‌جایی نداریم و میدان جابه‌جایی بیرون آن به دلیل برون صفحه‌ای بودن فقط مؤلفه  $z$  دارد و تابع  $r$  و  $\theta$  و برابر است با حاصل‌جمع موج ورودی و موج متفرق‌شده به‌صورت رابطه (19).

$$u_z = u_z^i + u_z^s \quad (19)$$

برای این‌که بتوانیم موج ورودی و متفرق‌شده را با هم جمع کنیم، موج ورودی (13) را به‌صورت رابطه (20) می‌نویسیم [18].

$$u_z^i = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \zeta_n J_n(kr) \cos(n\theta) \quad (20)$$

در رابطه بالا  $J_n$  تابع بسل نوع اول از مرتبه  $n$  و  $\zeta_n$  تابع نیومن است که مقدار آن به‌ازای  $n=0$  برابر با 1 و برای دیگر مقادیر  $n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) برابر با 2 است.

با استفاده از روابط (20, 19, 17)، میدان جابه‌جایی الاستودینامیک اطراف حفره دایروی به صورت رابطه (21) می‌شود.

$$u_z^s = \sum_{n=0}^{\infty} (i^n \zeta_n J_n(kr) + A_n H_n^{(1)}(kr) + B_n K_n(k'r)) \cos(n\theta) \quad (21)$$

از آن‌جا که ناهمگنی به‌صورت حفره در نظر گرفته شده است، صفر بودن تنش کاهش‌یافته و تنش کوپل کاهش‌یافته روی سطح حفره ( $r=a$ ) به‌عنوان شرایط مرزی مسأله به‌صورت روابط (22) اعمال می‌شوند.

$$\bar{T} = \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} (1 - l^2 \nabla^2) - \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) l^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] u_z \Big|_{r=a} = 0 \quad (22-الف)$$

$$\bar{M} = 2\mu l^2 \left[ \frac{\eta'}{\eta} \nabla^2 - \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] u_z \Big|_{r=a} = 0 \quad (22-ب)$$

شرایط مرزی صفر بودن تنش کاهش‌یافته و تنش کوپل کاهش‌یافته روی مرز حفره در مسأله‌های استاتیکی و دینامیکی بررسی‌شده توسط هفت برادران و شجاع [11]، شجاع و همکاران [15] و همچنین لوباردا [10] برای محاسبه ضرایب میدان الاستوستاتیکی و الاستودینامیک اطراف حفره استوانه‌ای محصور در محیط الاستیک بی‌نهایت تحت بار استاتیکی برون صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. با استفاده از این شرایط مرزی، ضرایب  $A_n$  و  $B_n$  در رابطه (21) به صورت روابط (23) به‌دست می‌آید.

$$A_n = -i^n \zeta_n u_0 \left[ \alpha_1 J_n(ka) K_n(k'a) - \alpha_2 J_n(ka) K_{n-1}(k'a) + \alpha_3 J_{n-1}(ka) K_n(k'a) - \alpha_4 J_{n-1}(ka) K_{n-1}(k'a) \right] \times \left[ \alpha_1 H_n^{(1)}(ka) K_n(k'a) - \alpha_2 H_n^{(1)}(ka) K_{n-1}(k'a) + \alpha_3 H_{n-1}^{(1)}(ka) K_n(k'a) - \alpha_4 H_{n-1}^{(1)}(ka) K_{n-1}(k'a) \right]^{-1} \quad (23-الف)$$

$$B_n = -i^n \zeta_n u_0 \left[ \alpha_5 J_{n-1}(ka) H_n^{(1)}(ka) - \alpha_5 J_n(ka) H_{n-1}^{(1)}(ka) \right] \times \left[ \alpha_1 H_n^{(1)}(ka) K_n(k'a) + \alpha_2 H_n^{(1)}(ka) K_{n-1}(k'a) + \alpha_3 H_{n-1}^{(1)}(ka) K_n(k'a) - \alpha_4 H_{n-1}^{(1)}(ka) K_{n-1}(k'a) \right]^{-1} \quad (23-ب)$$

در روابط (24, 23)،  $\alpha_5 - \alpha_1$  به‌صورت روابط (24) تعریف می‌شوند.

$$\alpha_1 = -n(k^2 + k'^2) a^2 \left[ a^2 + 2n(n+1) \left( 1 + \frac{\eta'}{\eta} \right) l^2 \right] \quad (24-الف)$$

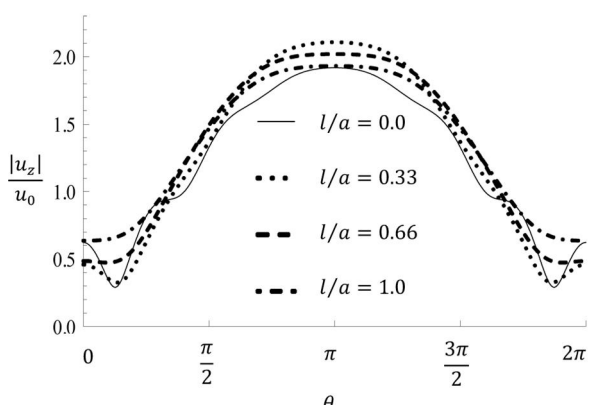
## 4-1- میدان جابه‌جایی اطراف حفره

با توجه به میدان جابه‌جایی به‌دست آمده، تأثیر طول مشخصه تنش کوپل بر مقدار نرمال شده میدان جابه‌جایی  $|u_z|/u_0$  روی سطح حفره داخل محیط الاستیک ( $r = a$ ) برای فرکانس نرمال شده 3، بررسی شده است. مقدار  $|u_z|/u_0$  برای نسبت‌های مختلف  $l/a$ ، برابر با 0.33، 0.66، 1.0 و همچنین حالت کلاسیک در شکل 3 و 4 به ترتیب با استفاده از تئوری‌های ارائه شده در [۸، 6] نشان داده شده است.

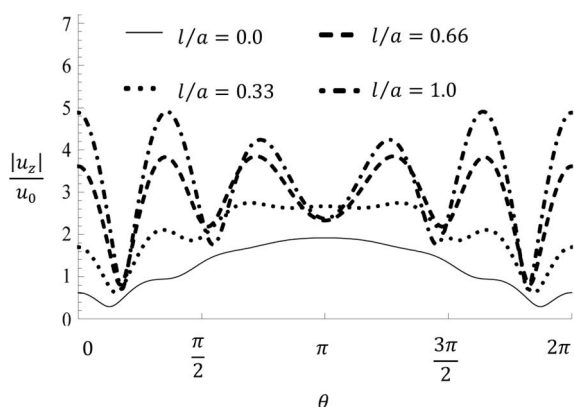
از روی شکل 3 و 4 مشخص است که با افزایش نسبت  $l/a$ ، مقدار جابه‌جایی برون صفحه‌ای در اطراف حفره تغییر می‌کند. مقدار بیشینه جابه‌جایی در حالتی که از تئوری تنش کوپل نامشخص [6] استفاده می‌کنیم با تغییرات نسبت  $l/a$  تغییر نمی‌کند و همواره در زاویه  $\theta = \pi$  اتفاق می‌افتد. در حالتی که از تئوری تنش کوپل سازگار [8] برای حل مسأله استفاده می‌کنیم با تغییر نسبت  $l/a$  علاوه بر تغییرات مقدار جابه‌جایی در اطراف حفره، محل ایجاد جابه‌جایی بیشینه نیز تغییر می‌کند.

همچنین برای مقادیر ارائه‌شده در مثال پیش (فرکانس نرمال شده 3 و نسبت  $l/a$  برابر با 0، 0.33، 0.66، 1.0)، با استفاده از تئوری‌های تنش کوپل [۸، 6] به ترتیب در شکل 5 و 6، مقدار  $|u_z|/u_0$  در راستایی که بیشینه جابه‌جایی اتفاق می‌افتد ( $\theta = \pi$ ) در حدفاصل مرز حفره تا 5 برابر شعاع آن نشان داده شده است.

همان‌طور که از شکل‌های 5 و 6 مشخص است، برای هر دو حالت به‌کارگیری تئوری‌های [۸، 6] مقدار بیشینه میدان جابه‌جایی با فاصله از حفره کاهش می‌یابد.



شکل 3 مؤلفه جابه‌جایی  $|u_z|/u_0$  اطراف حفره در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل نامشخص [6]



شکل 4 مؤلفه جابه‌جایی  $|u_z|/u_0$  اطراف حفره در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار [8]

قسمت پادمتقارن تنش (5) به‌صورت رابطه (28) است.

$$\sigma = \lambda \varepsilon : II + 2\mu \varepsilon + \frac{1}{2} | \nabla \cdot m \quad (28)$$

با توجه به این که روابط بین تانسور کرنش و تانسور تنش کوپل با بردار جابه‌جایی را می‌دانیم و برای مسأله مورد بررسی، میدان جابه‌جایی را در قسمت پیشین به‌دست آورده‌ایم، در نتیجه میدان تنش در محیط را می‌توانیم محاسبه کنیم.

همچنین، ضریب تمرکز تنش دینامیکی به‌صورت رابطه (29) تعریف می‌شود.

$$S_d(\theta, ka) = \frac{|\sigma_{\theta z}^s + \sigma_{\theta z}^i|}{\sigma_0} \quad (29)$$

در این رابطه  $|\sigma_{\theta z}^s + \sigma_{\theta z}^i|$  اندازه مطلق مؤلفه تنش کل  $\sigma_{\theta z}$  در محیط الاستیک روی مرز حفره، همچنین  $\sigma_0$  مقدار مطلق تنش موج ورودی روی مرز حفره در زاویه  $\theta = \pi/2$  است.

با توجه به میدان جابه‌جایی به‌دست‌آمده برای این مسأله در بخش پیشین،  $\sigma_{\theta z}^s$  و  $\sigma_{\theta z}^i$  طبق روابط (30) به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_{\theta z}^s = -\frac{\mu}{a} \sum_{n=0}^{\infty} [n \sin(n\theta) (A_n(1+k^2l^2) H_n^{(1)}(ka) + B_n(1-k^2l^2) H_n^{(1)}(ka))] \quad (30-الف)$$

$$\sigma_{\theta z}^i = -\frac{\mu}{a} \sum_{n=0}^{\infty} [n \sin(n\theta) i^n \zeta_n u_0 (1+k^2l^2) J_n(ka)] \quad (30-ب)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود ضریب تمرکز تنش دینامیکی تابعی از فرکانس موج ورودی، زاویه، طول مشخصه تنش کوپل و شعاع حفره است.

در شرایطی که فرکانس موج ورودی بسیار کوچک شود و یا به عبارتی طول موج بسیار بزرگ شود، مسأله دینامیکی مورد بررسی به مسأله‌ای استاتیکی با بارگذاری  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma^\infty$  شبیه می‌شود، که در آن  $\sigma^\infty$  بار ثابت استاتیکی در میدان دور است. در صورتی که در رابطه (29) فرکانس موج ورودی به سمت صفر برود ( $ka \rightarrow 0$ ) ضریب تمرکز تنش استاتیکی در تئوری تنش کوپل به‌دست می‌آید. این رابطه که حالت خاص مسأله مورد بررسی در این مطالعه است، در مسأله استاتیکی بررسی شده توسط لوباردا [10] نیز ارائه شده است.

## 4- مثال‌های عددی و نتایج

در این قسمت با استفاده از مثال‌های ارائه‌شده تأثیر طول مشخصه تنش کوپل بر میدان جابه‌جایی، میدان تنش و ضریب تمرکز تنش دینامیکی بررسی شده است. در شکل‌های مربوط به این مثال‌ها پارامترها به‌صورت بی‌بعد شده وارد شده‌اند به طوری که طول مشخصه تنش کوپل با استفاده از سایز سطح مقطع حفره به‌صورت  $l/a$ ، فرکانس با رابطه  $\omega a/c_0$  و یا  $k_c a = (\omega/c_0) k_c a$  عدد موج در تئوری کلاسیک است، میدان جابه‌جایی با رابطه  $u_z/u_0$  و مقدار مطلق تنش‌ها با رابطه  $|\sigma_{\theta z}|/\mu u_0 k_c$  بی‌بعد شده است. در تمام مثال‌هایی که از تئوری تنش کوپل نامشخص [6] استفاده شده است مقدار ثابت  $\eta'$  برابر با صفر فرض شده و در مثال‌هایی که از تئوری تنش کوپل سازگار [8] استفاده شده نسبت  $\eta'/\eta$  با توجه به فرمولاسیون این تئوری، برابر با 1- در نظر گرفته شده است. همچنین در شکل‌های ارائه شده، منظور از جواب تئوری کلاسیک الاستیسیته حالتی است که نسبت  $l/a$  برابر با صفر در نظر گرفته و در فرمولاسیون مسأله از تنش‌های کوپل صرف‌نظر شده است. در مثال‌هایی که در ادامه آمده اثر طول مشخصه تنش کوپل در تئوری‌های تنش کوپل نامشخص و تنش کوپل سازگار بر میدان جابه‌جایی، میدان تنش و مقدار ضریب تمرکز تنش اطراف حفره بررسی شده است.



در تئوری تنش کوپل نامشخص [6] با کاهش سایز حفره نسبت به طول مشخصه تنش کوپل (افزایش نسبت  $l/a$ )، مقدار بیشینه میدان جابه‌جایی کاهش می‌یابد که این روند در تئوری تنش کوپل سازگار [8] به صورت عکس مشاهده می‌شود.

#### 4-2- میدان تنش اطراف حفره

با توجه به میدان تنش به دست آمده از قسمت پیش، تأثیر طول مشخصه تنش کوپل در دو تئوری [۸.6] روی مؤلفه نرمال شده تنش  $|\sigma_{\theta z}|/\mu u_0 k_c$  روی سطح حفره داخل محیط الاستیک به ترتیب در شکل‌های 7 و 8 بررسی شده است. به این منظور مقدار تنش در فرکانس نرمال شده 3، برای نسبت‌های مختلف  $l/a$ ، برابر با 0.33، 0.66، 1.0 و همچنین حالت کلاسیک در شکل‌های 7 و 8 نشان داده شده است.

از شکل 7 مشخص است که با به کارگیری تئوری تنش کوپل نامشخص [6] با کاهش نسبت  $l/a$ ، مقدار تنش به حالت کلاسیک نزدیک‌تر می‌شود و با کاهش سایز حفره (افزایش نسبت  $l/a$ )، تنش در اطراف آن افزایش می‌یابد.

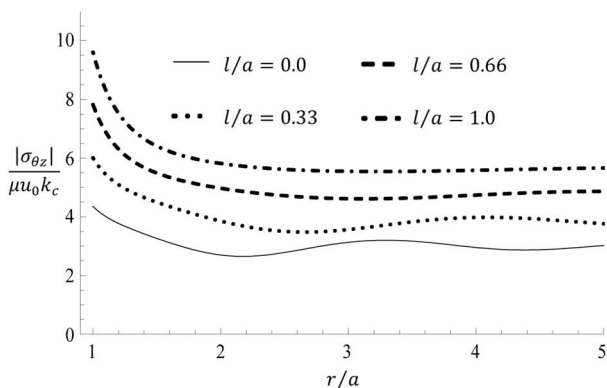
در شکل 8 مشخص است که با به کارگیری تئوری تنش کوپل سازگار [8]، تغییرات نسبت طول مشخصه تنش کوپل به شعاع به مراتب بیشتر از تئوری تنش کوپل نامشخص [6] مقادیر میدان تنش اطراف حفره را تغییر می‌دهد.

با توجه به میدان تنش به دست آمده از قسمت پیشین، تأثیر طول مشخصه تنش کوپل (برای نسبت‌های مختلف  $l/a$ ، برابر با 0.33، 0.66، 1.0 و همچنین حالت کلاسیک) در دو تئوری [۸.6] بر مؤلفه نرمال شده تنش  $|\sigma_{\theta z}|/\mu u_0 k_c$  در راستای  $\theta = \pi/2$  در داخل محیط الاستیک در حد فاصل سطح حفره تا 5 برابر شعاع حفره به ترتیب در شکل‌های 9 و 10 بررسی شده است.

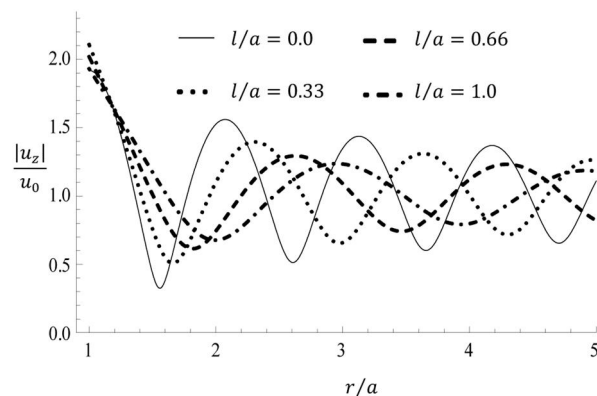
از روی شکل 9 و 10 مشخص است که با کاهش نسبت  $l/a$ ، مقدار تنش به حالت کلاسیک نزدیک‌تر می‌شود و با کاهش سایز حفره (افزایش نسبت  $l/a$ )، تنش در راستای  $\theta = \pi/2$  در محیط الاستیک افزایش می‌یابد.

#### 4-3- ضریب تمرکز تنش دینامیکی اطراف حفره

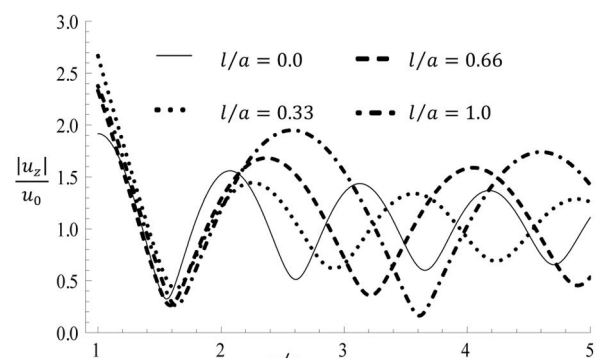
با توجه به روابط به دست آمده از قسمت پیش، اثر فرکانس موج ورودی و طول مشخصه تنش کوپل بر ضریب تمرکز تنش دینامیکی  $S_d(\theta, ka)$  روی سطح حفره داخل محیط الاستیک بررسی شده است. به این منظور مقدار ضریب تمرکز تنش دینامیکی،  $S_d$ ، در راستای  $\theta = \pi/2$ ، برای نسبت‌های مختلف  $l/a$ ، برابر با 0.33، 0.66، 1.0 و همچنین حالت کلاسیک، برای محدوده فرکانسی نرمال شده 0 تا 5 با استفاده از تئوری ارائه شده در [۸.6] به ترتیب در شکل 11 و 12 نشان داده شده است.



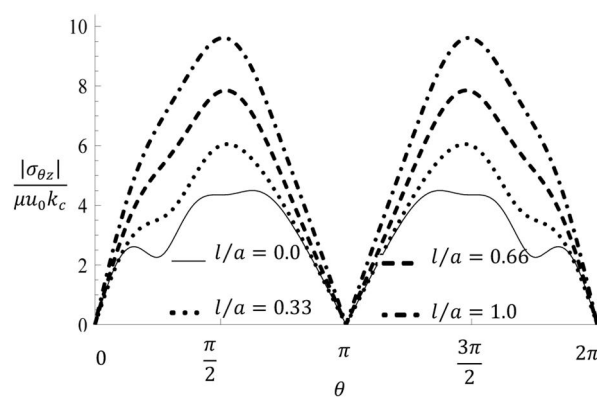
شکل 9 مؤلفه تنش  $\sigma_{\theta z}$ ، در راستای  $\theta = \pi/2$  در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل نامشخص [6]



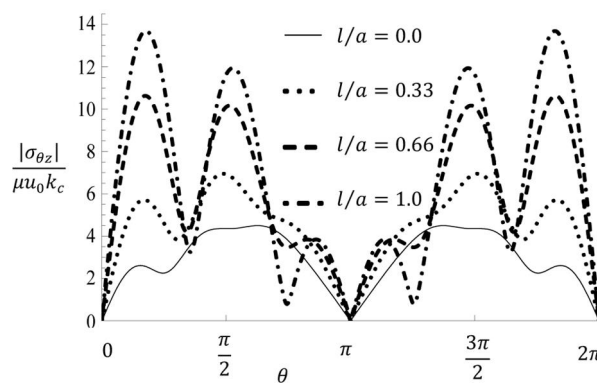
شکل 5 مؤلفه جابه‌جایی  $u_z/u_0$ ، در راستای  $\theta = \pi$  در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل نامشخص [6]



شکل 6 مؤلفه جابه‌جایی  $u_z/u_0$ ، در راستای  $\theta = \pi$  در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار [8]



شکل 7 مؤلفه تنش  $\sigma_{\theta z}$ ، اطراف حفره در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل نامشخص [6]



شکل 8 مؤلفه تنش  $\sigma_{\theta z}$ ، اطراف حفره در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار [8]

همان‌طور که در شکل 12 مشاهده می‌شود، هنگامی که از تئوری تنش کوپل سازگار [8] برای حل مسأله استفاده می‌کنیم، برای حالتی که فرکانس نرمال به سمت صفر می‌رود و مسأله به بارگذاری استاتیکی برون صفحه‌ای نزدیک می‌شود، اثر تنش‌های کوپل از بین می‌رود، به عبارتی تغییر سایز حفره و همچنین نسبت طول مشخصه تنش کوپل به سایز حفره بر ضریب تمرکز تنش استاتیکی اثری ندارد. برخلاف تئوری تنش کوپل نامشخص ارائه‌شده توسط میندلین و تیرستن [6]، که اثر تنش کوپل در همه مسائل صفحه‌ای و برون صفحه‌ای قابل بررسی است، تئوری تنش کوپل سازگار ارائه‌شده توسط حاج‌اسفندیاری و دارگوش [8]، نمی‌تواند اثر تنش‌های کوپل در مسائل برون صفحه‌ای استاتیکی را مورد بررسی قرار دهد و تمامی فرمولاسیون در این حالت مشابه تئوری کلاسیک الاستیسیته می‌شود.

همچنین در شکل 12 مشاهده می‌شود که با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار [8] در حالت دینامیکی مقدار بیشینه ضریب تمرکز تنش دینامیکی با کاهش سایز حفره به شدت افزایش می‌یابد که این موضوع اهمیت در نظر گرفتن تنش‌های کوپل در فرکانس‌های بالا و همچنین حفره‌های با سایز کوچک را نشان می‌دهد.

### 5- نتیجه‌گیری

در این مقاله معادله حرکت و رابطه پراکنش موج در دو تئوری که اثر تنش‌های کوپل را لحاظ می‌کنند، ارائه شده است. با استفاده از این تئوری‌ها، رابطه‌های میدان جابه‌جایی موج برشی برون صفحه‌ای متفرق‌شده اطراف حفره استوانه‌ای محصور در محیط الاستیک بی‌نهایت با استفاده از شرایط مرزی مناسب، به‌صورت بسته ارائه شده است. میدان تنش و ضریب تمرکز تنش دینامیکی اطراف حفره به‌دست آمده است. با بررسی تأثیر طول مشخصه وارد شده از این تئوری‌ها در فرمولاسیون روی میدان‌های جابه‌جایی و تنش و ضریب تمرکز تنش اطراف حفره، مشاهده می‌شود که با کاهش سایز حفره علاوه بر تغییر مقدار آن‌ها اطراف حفره، محل بیشینه آن‌ها نسبت به حالت کلاسیک نیز تغییر می‌کند. همچنین دیده شد که در نظر گرفتن تنش‌های کوپل روی مقدار ضریب تمرکز تنش دینامیکی اطراف حفره در فرکانس‌های مختلف بسیار تأثیرگذار است و با کاهش یا افزایش سایز حفره و فرکانس، این ضریب افزایش یا کاهش پیدا می‌کند.

### 6- مراجع

[1] J.R. Greer, J.Th.M. De Hosson. Plasticity in small-sized metallic systems: Intrinsic versus extrinsic size effect. *Progress in Materials Science*, Vol. 56, No. 6, pp. 654-724, 2011.

[2] C.P. Chen, R.S. Lakes. Dynamic wave dispersion and loss properties of conventional and negative poisson's ratio polymeric cellular materials. *Cellular Polymers*, Vol. 8, No. 5, pp. 343-359, 1989.

[3] T.P. Philippidis, D.G. Aggelis. Experimental study of wave dispersion and attenuation in concrete. *Ultrasonics*, Vol. 43, No. 7, pp. 584-595, 2005.

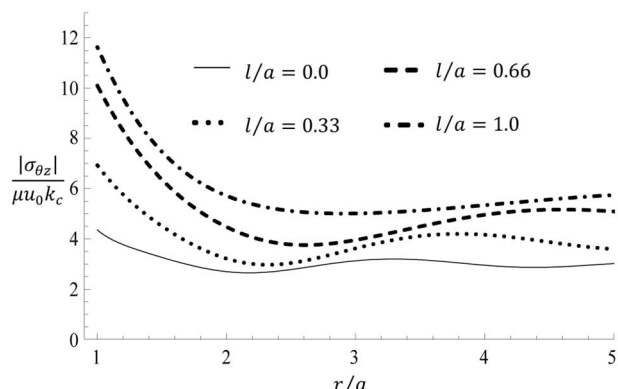
[4] E. Cosserat, F. Cosserat, F., *Theorie des corps deformables*. A. Hermann et fils, Paris, 1909.

[5] A.C. Eringen, *Theory of micropolar elasticity*. In: H., Liebowitz, (Ed), *Fracture, an advanced treatise*, Academic Press, 1968.

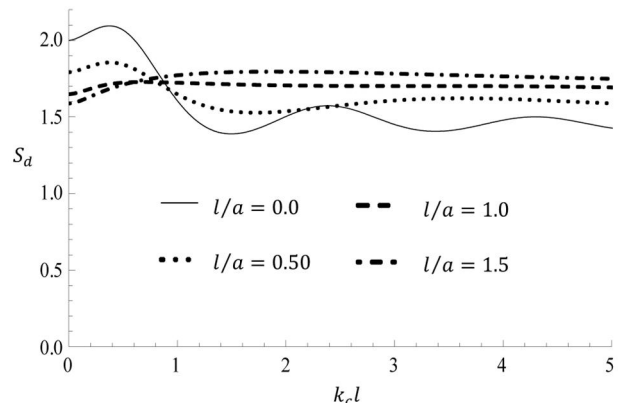
[6] R.D. Mindlin, H.F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 415-448, 1962.

[7] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731-2743, 2002.

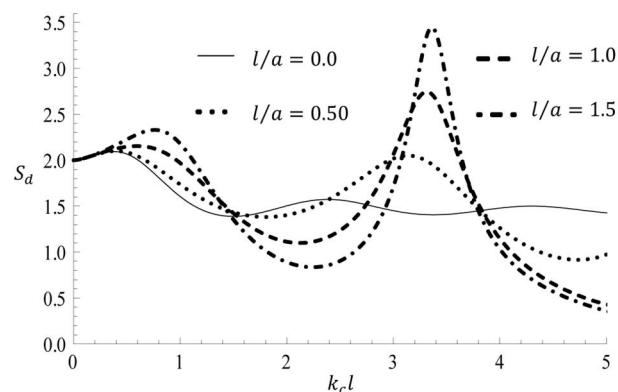
[8] A.R. Hadjesfandiari, G.F. Dargush, Couple stress theory for solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 18, pp. 2496-2510, 2011.



شکل 10 مؤلفه تنش  $\sigma_{\theta z}$ ، در راستای  $\theta = \pi/2$  در محیط الاستیک برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار [8]



شکل 11 مقدار ضریب تمرکز تنش  $S_d$  در فرکانس‌های نرمال 0 تا 5، در راستای  $\theta = \pi/2$  برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل نامشخص [6]



شکل 12 مقدار ضریب تمرکز تنش  $S_d$  در فرکانس‌های نرمال 0 تا 5، در راستای  $\theta = \pi/2$  برای نسبت‌های مختلف  $l/a$  و تئوری کلاسیک، با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار [8]

همان‌طور که از شکل 11 مشاهده می‌شود، برای حالتی که فرکانس نرمال به سمت صفر می‌رود ضریب تمرکز تنش استاتیکی اطراف حفره در تئوری تنش کوپل نامشخص به‌دست می‌آید. ضرایب به‌دست آمده در این حالت کاملاً منطبق با حل مسأله بارگذاری استاتیکی برون صفحه‌ای در اطراف حفره استوانه‌ای ارائه‌شده توسط لوباردا در [10] است. در حدود فرکانس‌های نرمال کوچک‌تر از 1، با کاهش سایز حفره (افزایش نسبت  $l/a$ ) مقدار ضریب تمرکز تنش دینامیکی کاهش می‌یابد، ولی در فرکانس‌های بزرگ‌تر هرچه سایز حفره کوچک‌تر می‌شود مقدار ضریب تمرکز تنش افزایش می‌یابد و این موضوع اهمیت در نظر گرفتن تنش‌های کوپل در فرکانس‌های بالا و همچنین حفره‌های با سایز کوچک را نشان می‌دهد.



- [16] A. Bakhsheshy, K. Khorshidi, Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 323-330, 2015. (In Persian)
- [17] H. Askes, E.C. Aifantis. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, No. 13, pp. 1962-1990, 2011.
- [18] A.C. Eringen, E.S. Suhubi. *Elastodynamics: Linear theory*. Elastodynamics. Academic Press, 1975.
- [19] I. Karimipour, A.R. Fotuhi, Analysis of mode III in infinite plane with multiple cracks based on strain gradient elasticity, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 139-149, 2014 (In Persian).
- [20] A. Karami Mohammadi, M. Abbasi, Investigation of the size effect on the vibrational behavior of an AFM microcantilever with a sidewall probe, using strain gradient elasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 90-99, 2014 (In Persian).
- [21] V.I. Erofeev, V.M. Rodyushkin. Observation of the dispersion of elastic waves in a granular composite and a mathematical model for its description. *Soviet Physics -Acoustics*, Vol. 38, No. 6, pp. 611-612, 1992.
- [22] T.P. Philippidis, D.G. Aggelis. Experimental study of wave dispersion and attenuation in concrete. *Ultrasonics*, Vol. 43, No. 7, pp. 584-595, 2005.
- [23] V.I. Erofeev. *Wave Processes in Solids with Microstructure*. Series on stability. WorldScientific, 2003.
- [9] H.M. Shodja, M. Ghazisaeidi, Effects of couple stresses on anti-plane problems of piezoelectric media with inhomogeneities, *European Journal of Mechanics- A/Solids*, Vol. 26, No. 4, pp. 647-658, 2007.
- [10] V.A. Lubarda. Circular inclusions in anti-plane strain couple stress elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 15, pp. 3827-3851, 2003.
- [11] H. Haftbaradaran, H.M. Shodja, Elliptic inhomogeneities and inclusions in anti-plane couple stress elasticity with application to nanocomposites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, No. 16, pp. 2978-2987, 2009.
- [12] M. Sadeghi, M. Fathalilou, G. Rezaadeh, Study on the size dependent behavior of a micro-beam subjected to a nonlinear electrostatic pressure, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 137-144, 2015. (In Persian)
- [13] N.S. Ottosen, M. Ristinmaa, C. Ljung. Rayleigh waves obtained by the indeterminate couple-stress theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 19, No. 6, pp. 929-947, 2000.
- [14] H.G. Georgiadis, E.G. Velgaki. High-frequency rayleigh waves in materials with micro-structure and couple-stress effects. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 10, pp. 2501-2520, 2003.
- [15] H.M. Shodja, A. Goodarzi, M.R. Delfani, H. Haftbaradaran, Scattering of an anti-plane shear wave by an embedded cylindrical micro-/nano-fiber within couple stress theory with micro inertia. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 58, pp. 73-90, 2015.