



## کنترل پذیری گیره ایی شبکه های دینامیکی بر اساس عملکرد حرکت همگام

علی غفاری<sup>1\*</sup>، سلیمان عربی<sup>2</sup>

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
2- دانشجوی دکتر، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران  
\* تهران، 1999-19395، ghaffari@kntu.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

انتخاب مناسب نوع و تعداد گره های کنترل شونده، نقش مهمی در بهبود کنترل پذیری و عملکرد شبکه های دینامیکی دارد. در این مقاله انتخاب گره های کنترل شونده بر اساس معیارهای مرکزیت گره ها در شبکه انجام شده است. برای هر معیار، کنترل پذیری و عملکرد حرکت همگام در شبکه های دینامیکی مورد مطالعه قرار گرفته است و بر این اساس، کمینه تعداد گره های کنترل شونده به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب، برای چندین مدل ساختاری شبکه ها بدست آمده است. نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ایی در شبکه های دینامیکی تصادفی نشان می دهد که کمترین تعداد گره های کنترل شونده، برای معیار مرکزیت میانی است. مشابه همین نتیجه برای شبکه های جهان کوچک نیز برقرار است با این تفاوت که در شبکه های متراکم تر، تعداد گره های کنترل شونده افزایش می یابد. بررسی نتایج در شبکه های مستقل از مقیاس نشان می دهد که معیار مرکزیت نزدیکی انتخابی مناسب بوده و بخصوص در شبکه ها با تعداد گره های بالاتر، منجر به کاهش تعداد گره های کنترل شونده می شود. نتیجه مهم دیگر، کاهش تعداد گره های کنترل شونده برای یک عملکرد مطلوب و بهبود کنترل پذیری با افزایش ضریب همسایگی در شبکه های جهان کوچک است. مشابه این نتیجه برای افزایش ضریب تجانس در شبکه های مستقل از مقیاس است.

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 13 شهریور 1394  
پذیرش: 18 مهر 1394  
ارائه در سایت: 20 آبان 1394  
کلید واژگان:  
شبکه های دینامیکی  
حرکت همگام  
کنترل پذیری گیره ایی  
حداقل گره های کنترل شونده

## Pinning controllability of dynamical networks based on synchronized motion performance

Ali Ghaffari\*, Soleyman Arebi

Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.  
\* P.O.B. 19395-1999 Tehran, Iran, ghaffari@kntu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 04 September 2015  
Accepted 10 October 2015  
Available Online 11 November 2015

#### Keywords:

Dynamical networks  
pinning controllability  
minimum driver nodes  
desired performance

### ABSTRACT

Right selection of the type and number of driver nodes plays an important role in improving the controllability and performance of the dynamical networks. In this paper the controllability and performance of a network has been studied when a new approach for selecting the driver nodes, based on the three main node centrality criteria, has been proposed. For each criterion, the percentage of the least number of driver nodes to achieve the desired performance has been calculated for several network model structures. The results for pure random networks show that for the "betweenness centrality criterion" the number of driver nodes is minimal. Similar results hold for Small World networks subject to the fact that for dense, the number of driver nodes increases. It is shown that the "closeness centrality criterion" is the proper choice for the State Free networks, especially when the network is dense. Another important result is that in Small World networks, increasing the nearest neighborhood coefficient decreases the number of driver nodes for a desired performance. Similar results hold for Scale Free networks where increasing the heterogeneity coefficient improves the network pinning controllability.

### 1- مقدمه

این شبکه ها مطرح است، رفتار گروهی آن هاست. در این میان همگام بودن<sup>۳</sup> حرکت در شبکه، یکی از مهمترین رفتارهای گروهی در این شبکه هاست [2]. روش های مختلفی بصورت نظری برای بهبود عملکرد حرکت همگام در شبکه های دینامیکی وجود دارد. تغییر ساختار ارتباطی گره ها در شبکه، افزایش وزن ارتباط بین گره ها، افزایش و یا کاهش ارتباط در شبکه ها از جمله روش های معمول است [3]. با توجه به محدودیت ها در شبکه های دینامیکی واقعی، امکان اعمال روش های نظری ذکر شده در شبکه ها، اغلب وجود ندارد.

سیستم های دینامیکی با مقیاس بزرگ اغلب به صورت شبکه هایی از گره<sup>۱</sup> ها مدل می شوند که به کمک یال<sup>۲</sup> هایی به هم ارتباط دارند [1]. شبکه جهانی اینترنت، شبکه های اجتماعی، شبکه های عصبی، اجتماعات اکولوژیکی و بیولوژیکی، شبکه توزیع هوشمند برق و شبکه ربات های هوشمند، نمونه هایی از این شبکه ها در دنیای واقعی هستند. آنچه که در بررسی رفتار دینامیکی

1- Node  
2- Edge

3- Synchronization

Please cite this article using:

A. Ghaffari, S. Arebi, Pinning controllability of dynamical networks based on synchronized motion performance, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 75-83, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

اند. شکل دیگر معادله (1) بر اساس ماتریس لاپلاسین است. ماتریس  $L$  بصورت  $L = D - A$ ,  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ ,  $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$  است که در شبکه های متصل، یک ماتریس کاهش پذیر و مقادیر ویژه به شکل  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  است. معادله (1) بر اساس ماتریس لاپلاسین به شکل معادله (2) است:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} l_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

فرضیات مربوط به ساختار شبکه های مورد بررسی در این مقاله به شرح زیر است:

- گره های شبکه دارای دینامیک مشابه هستند.
  - وزن ارتباط بین گره های متصل یکسان است.
  - ماتریس ارتباط بر اساس مدل های تولید شبکه بدست می آید.
- فرض موجود در دینامیک گره ها، شرط لیب شیتز است. تابع  $f(\cdot)$  شرط لیب شیتز را ارضا می کند اگر ثابت  $\Lambda$  وجود داشته باشد بطوری که برای هر  $u, v \in R^n$  داشته باشیم  $\|f(u) - f(v)\| \leq \Lambda \|u - v\|$ .  
با توجه به فرضیات بیان شده، معادله (2) به شکل معادله (3) بیان می شود:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

شبکه (3) یک شبکه همگام نامیده می شود اگر:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

که در آن  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی است. همچنین اگر  $s(t) \in R^n$  یک مسیر مطلوب، نقطه تعادل یا یک حل نوسانی باشد، شبکه همگام به  $s(t)$  است اگر:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - s(t)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

که در آن  $s(t)$  از معادله (6) بدست می آید:

$$\dot{s}(t) = f(s(t), t) \quad (6)$$

متغیر های حالت خطا به صورت معادله (7) نمایش داده می شوند:

$$e_i(t) = x_i(t) - s(t), \quad e_i(t) \in R^n, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

مسئله کنترل گیره ای برای یک شبکه که با معادله (3) توصیف شده است، شامل تعیین  $u_i \in R^n$  وارد به بخش  $(0 < \delta \ll 1)$  از شبکه است بطوری که شرط موجود در معادله (5) ارضا شود. اگر گره های  $i_1, i_2, \dots, i_k$  عضو مجموعه گره های کنترل شونده نباشند و گره های  $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_N$  عضو مجموعه گره های کنترل شونده باشند، با کم کردن معادله (6) از (3) معادله سیستم خطای کنترل شونده (8) تشکیل می شود:

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t), t) - f(s(t), t) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma e_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (8)$$

$$\dot{e}_i(t) = f(x_i(t), t) - f(s(t), t) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma e_j(t) + u_i, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, N \quad (9)$$

با توجه به معادله (9)، مسئله کنترل گیره ای، شامل تعیین  $k$  و  $u_i$  است بطوری که حرکت همگام شبکه تضمین و عملکرد مناسبی داشته باشد.

یکی از روش های قابل کاربرد برای بهبود عملکرد حرکت همگام در شبکه ها، اعمال کنترل از بیرون شبکه بر روی گره ها است. در بسیاری از شبکه های دینامیکی، امکان اعمال کنترل بر روی همه گره ها وجود ندارد. بنابراین تعیین تعداد گره های کنترل شونده<sup>1</sup> به منظور بهبود حرکت همگام شبکه، موضوعی مهم بوده که تحت عنوان کنترل پذیری گیره ای<sup>2</sup> مطرح است [4]. مسئله اصلی در کنترل پذیری گیره ای شبکه، تعیین حداقل تعداد گره های کنترل شونده و نوع آن ها به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب حرکت همگام شبکه است. یکی از روش های تعیین حداقل تعداد گره های کنترل شونده در شبکه های دینامیکی جهت دار، استفاده از کنترل پذیری ساختاری<sup>3</sup> و تئوری حداکثر انطباق<sup>4</sup> است [5]. همچنین با استفاده از تعدد مقادیر ویژه ماتریس ارتباط شبکه می توان به اطلاعاتی در مورد گره های کنترل شونده دست یافت [6]. استفاده از نمایه کنترل پذیری<sup>5</sup> و حداقل سازی آن نیز یک روش مناسب برای تعیین این گره ها است [7]. نسبت مقدار ویژه حداکثر به مقدار ویژه دوم، به عنوان یک معیار برای کنترل پذیری شبکه است که با حداقل سازی آن می توان به اطلاعاتی در مورد تعداد گره های کنترل شونده دست یافت [8]. مرکزیت<sup>6</sup> گره ها در شبکه نیز به عنوان یک معیار اهمیت گره ها در شبکه مطرح است [9]. در روش های بیان شده برای تعیین گره های کنترل شونده، به عملکرد حرکت همگام توجه نشده است.

در این مقاله روشی برای انتخاب مناسب تعداد و نوع گره های کنترل شونده در شبکه های مختلف بر اساس معیارهای مرکزیت گره ها پیشنهاد شده است. حداقل تعداد گره های کنترل شونده بر اساس این معیارها، برای سه نوع شبکه با مدل ساختاری تصادفی<sup>7</sup> [10]، جهان کوچک<sup>8</sup> [11] و مستقل از مقیاس<sup>9</sup> [12] مورد بررسی قرار می گیرد. برای هر یک از مدل های شبکه، ارتباط بین حداقل تعداد گره های کنترل شونده و ضریب احتمال ارتباط در شبکه بدست می آید تا بتوان نتیجه گیری کلی برای هر معیار بر اساس این ضریب داشت.

## 2- تعاریف و فرضیات

در این بخش به بیان برخی تعاریف و فرضیات مهم پرداخته می شود. یک شبکه دینامیکی از  $N$  گره  $n$  بعدی مشابه که به صورت خطی و پخشی با هم ارتباط دارند، به صورت معادله (1) بیان می شوند:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N c_{ij} a_{ij} \Gamma (x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

که در آن  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n$  متغیرهای حالت گره  $i$  ام و  $f_i: R^n \times [0, +\infty) \rightarrow R^n$  تابع پیوسته و مشتق پذیر و بیان کننده دینامیک هر گره است. ماتریس ارتباط  $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$  نشان دهنده ارتباط بین گره ها است بطوری که اگر گره  $i$  با گره  $j$  ارتباط داشته باشد  $a_{ij} = 1$  و در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$  است.  $c_{ij}$  وزن ارتباط بین گره های مرتبط است.  $\Gamma = (\tau_{ij}) \in R^{n \times n}$  ماتریس ارتباط داخلی است بطوری که اگر  $\tau_{ij} \neq 0$  گره های مرتبط به واسطه متغیرهای حالت  $i$  و  $j$  به هم مرتبط

1- Minimum driver nodes  
2- Pinning controllability  
3- Structural controllability  
4- Maximum matching theory  
5- Controllability indices  
6- Centrality  
7- Random networks  
8- Small world networks  
9- Scale free networks

گام اول: با توجه به ساختار شبکه دینامیکی واقعی یکی از سه مدل شبکه (مدل شبکه تصادفی، جهان کوچک و مستقل از مقیاس) و همچنین دینامیک موجود در گره ها و وزن ارتباطی بین گره ها انتخاب و مشخص می شود. همچنین مدت زمان استقرار حرکت همگام به عنوان معیار عملکرد شبکه تعریف می شود.

گام دوم: برای شبکه تعیین شده در گام اول، معیار انتخاب گره های

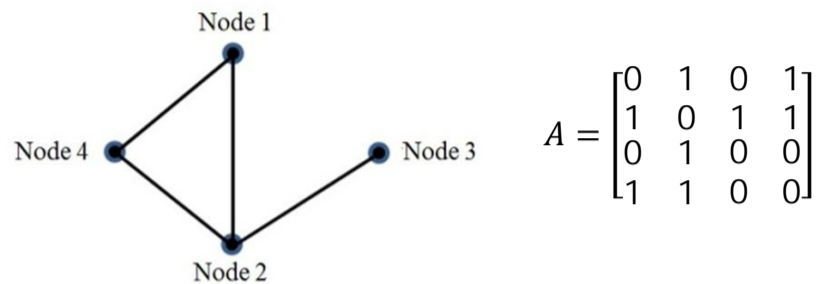


Fig. 1 Topology structure and equivalent adjacency matrix for example 1

شکل 1 ساختار ارتباط و ماتریس ارتباط معادل برای مثال 1

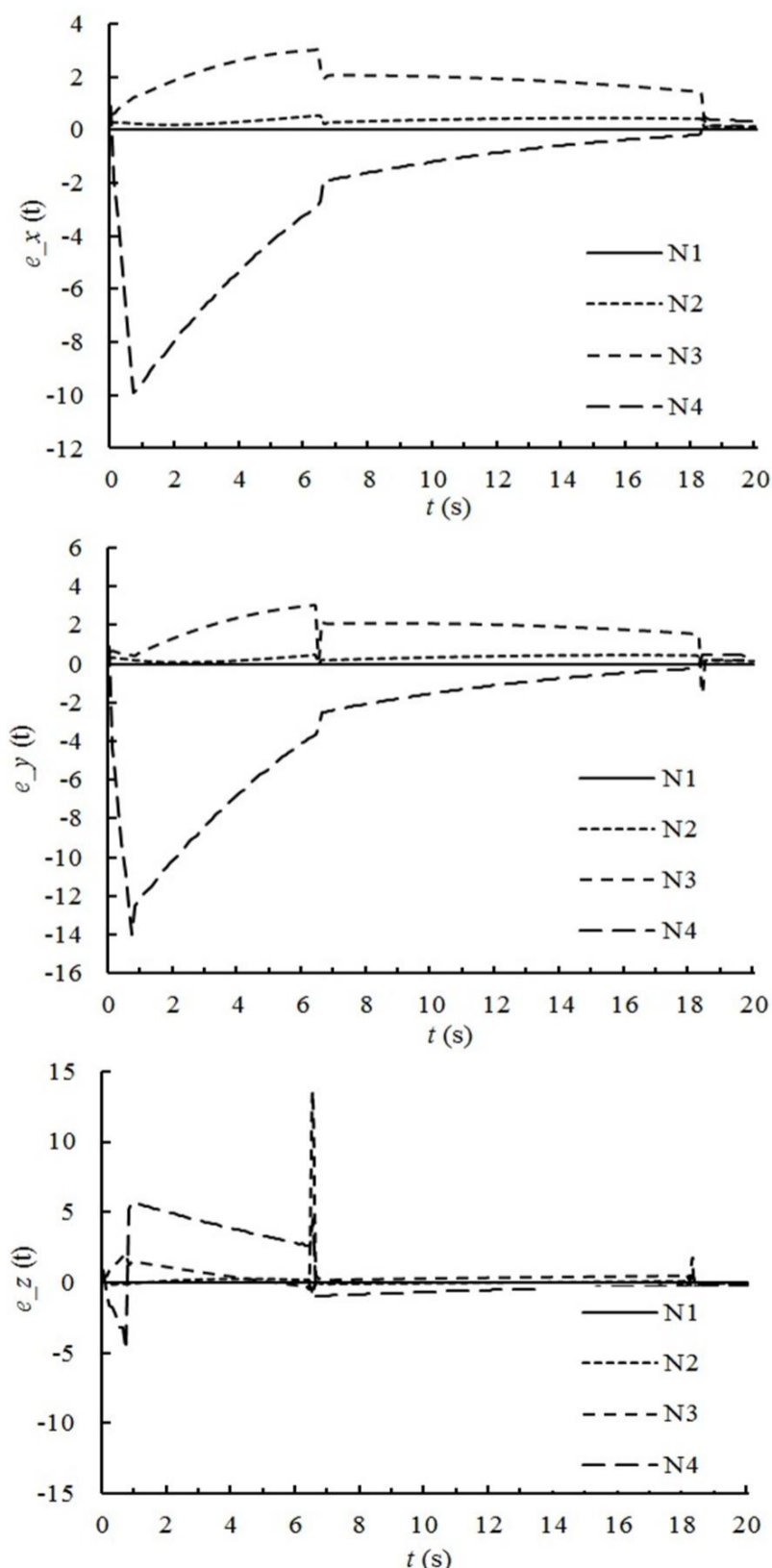


Fig. 2 Error state variables for the network without control system with  $c = 1$  in example 1

شکل 2 متغیرهای حالت خطا برای شبکه بدون سیستم کنترلی با  $C = 1$  در مثال 1

### 3- تعیین ورودی کنترلی و شرط همگامی شبکه دینامیکی

برای بررسی همگامی شبکه و عملکرد آن، ورودی کنترلی به صورت فیدبک حالت و به شکل معادله (10) در نظر گرفته می شود.

$$u_i(t) = -cd_i \Gamma e_i(t) \in R^n \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (10)$$

با این انتخاب، معیار همگامی شبکه با بررسی پایداری حرکت از طریق

قضیه مستقیم لیاپانوف به شکل معادله (11) است [13]:

$$(I_N \otimes \Lambda \Gamma) + c((L - D) \otimes \Gamma) < 0 \quad (11)$$

که در آن  $\otimes$  ضرب کرونکر،  $I_N$  ماتریس واحد و  $D = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_N)$  است. اثبات این معادله در پیوست آمده است. هر نوع انتخاب تعداد و نوع گره های کنترل شونده باید شرط (11) را ارضا کند. اگر  $\theta = \lambda_{\max}(\frac{\Lambda + \Lambda^T}{2})$  باشد، معادله (11) به شکل معادله (12) ساده می شود.

$$c > \frac{\theta}{|\lambda_{\max}(L - D)|} \quad (12)$$

معادله (12)، بیانگر کمینه مقدار وزن ارتباط در شبکه است که برای همگام شدن آن مورد نیاز است. بنابراین با داشتن خصوصیات دینامیک گره ها ( $\theta$ )، خصوصیات ساختاری شبکه ( $L$ ) و نیز تعداد و نوع گره های کنترل شونده ( $D$ )، می توان مقدار کمینه وزن ارتباط بین گره ها در شبکه به منظور همگام سازی حرکت از معادله (12) بدست می آید. در ادامه با ارائه یک مثال اثر اعمال ورودی کنترلی به بخشی از شبکه بر روی عملکرد حرکت همگام آن بررسی می شود.

مثال 1: شبکه ای متشکل از چهار نوسانگر لورنز با معادلات دینامیکی بیان شده در معادله (13) [14] و ساختار ارتباط مطابق شکل 1 را در نظر می گیریم.

$$\dot{x}(t) = \sigma(y(t) - x(t))$$

$$\dot{y}(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t)$$

$$\dot{z}(t) = x(t)y(t) - \gamma z(t) \quad (13)$$

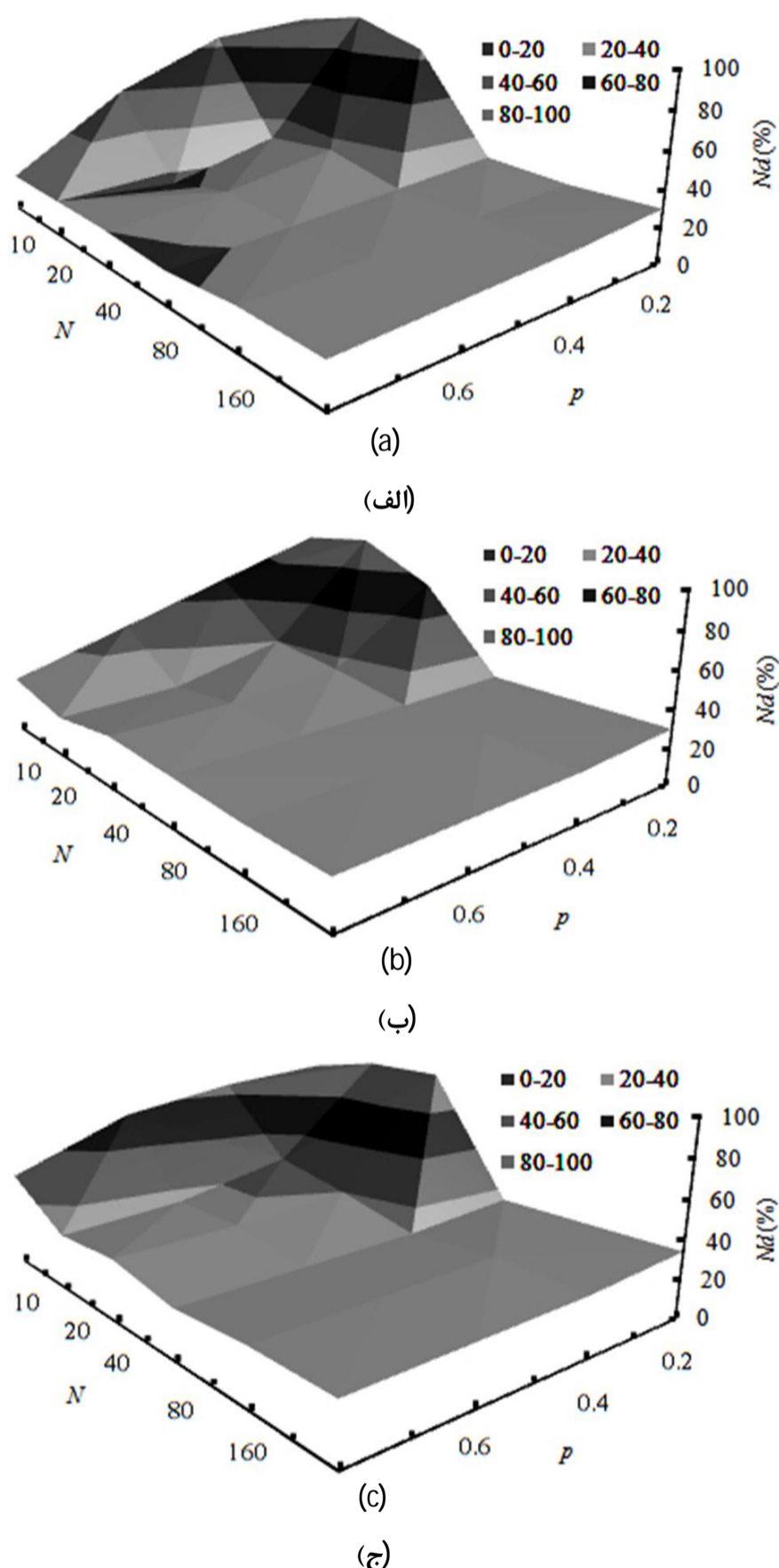
که در آن  $\sigma$ ،  $r$  و  $\gamma$  ثوابت معادله هستند. با انتخاب مقادیر  $\sigma = 10$ ،  $r = 28$ ،  $\gamma = 8.3$  رفتار آشوبناک دارد. برای بررسی اثر اعمال کنترلر بر روی بهبود عملکرد حرکت همگام در شبکه، متغیرهای حالت خطا در شبکه مثال 1 بدون اعمال کنترلر در شکل 2 و برای شبکه با اعمال کنترلر بر روی بخشی از آن (اعمال کنترلر بر روی گره شماره 3) در شکل 3 نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، با اعمال کنترلر زمان رسیدن به حرکت همگام شبکه، کاهش می یابد. این در حالی است که مقدار وزن ارتباط در دو حالت مساوی و برابر  $C = 1$  است. این بررسی نشان می دهد که با اعمال کنترلر بر روی بخشی از شبکه، می توان به عملکرد بهتر بدون افزایش وزن ارتباط بین گره ها در شبکه دست یافت. اهمیت این نتیجه در این است که در بسیاری از شبکه های دینامیکی امکان تغییر وزن ارتباط شبکه به منظور بهبود عملکرد حرکت همگام آن وجود ندارد. و با اعمال کنترلر بر روی بخشی از آن می توان به عملکرد مطلوب دست یافت.

### 4- بررسی کنترل پذیری گیره ای در شبکه های دینامیکی

به منظور بررسی کنترل پذیری گیره ای در شبکه، معیار عملکرد بر اساس زمان استقرار حرکت همگام در نظر گرفته می شود. الگوریتم یافتن تعداد گره های کنترل شونده برای هر شبکه بدین شرح است:



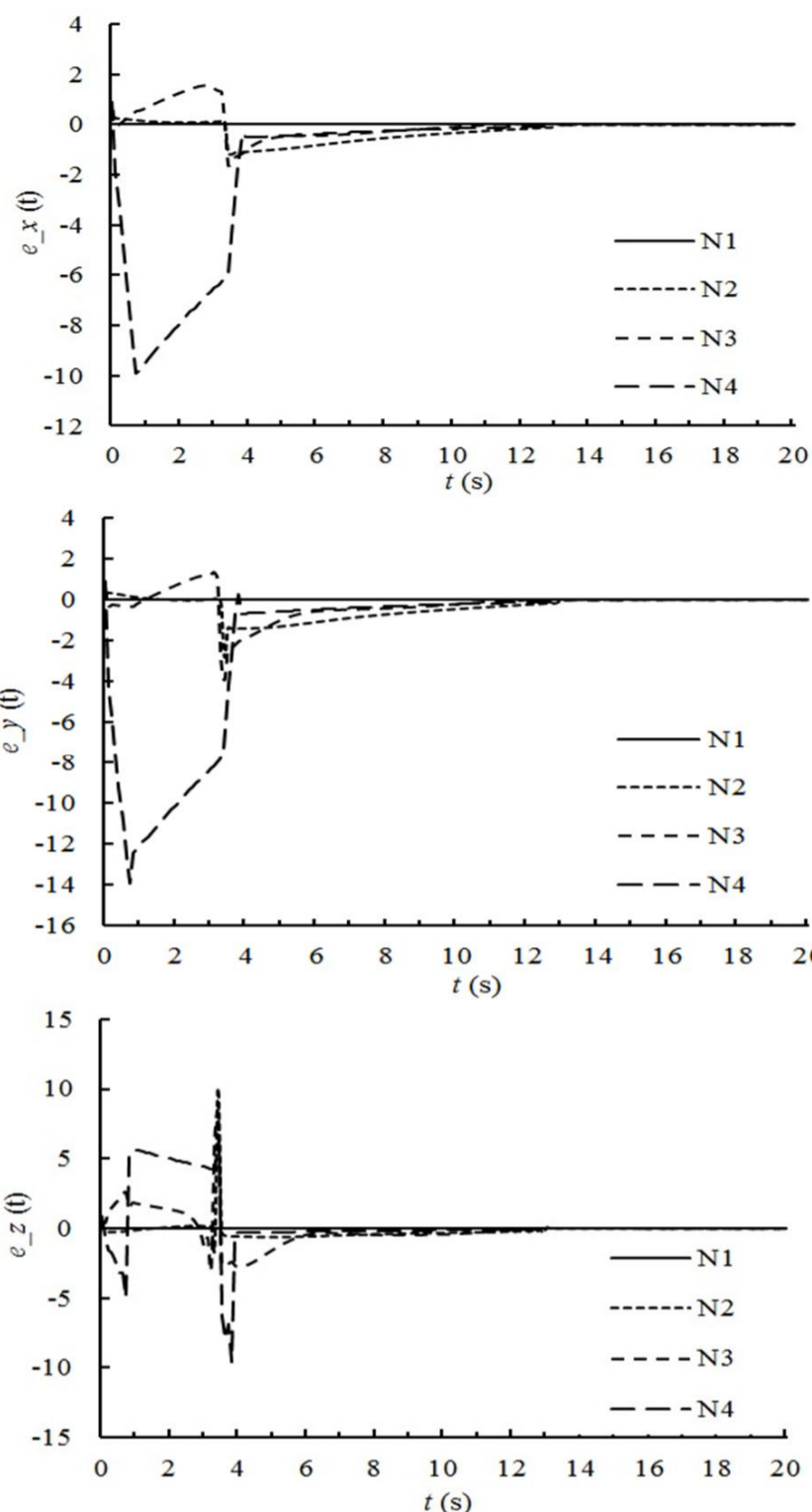
بر اساس ضریب احتمال شبکه برای شبکه‌ها با تعداد مختلف گره‌ها و بر اساس معیار بیشینه مرکزیت میانی<sup>۱</sup> گره‌ها در شکل 4- الف نشان داده شده است این مقادیر برای معیارهای بیشینه مرکزیت نزدیکی<sup>۲</sup> و بیشینه مرکزیت بردار ویژه<sup>۳</sup> به ترتیب در شکل های 4- ب و 4- ج نشان داده شده است. این نتایج برای دینامیک لورنز در گره‌ها، زمان رسیدن به حرکت همگام معادل با 20 ثانیه، وزن ارتباط معادل  $C = 1$  و کنترلر توصیف شده در معادله (10) بدست آمده است.



**Fig. 4** Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Random networks a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 4 تعداد گره‌های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه‌های دینامیکی تصادفی: الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

1- Betweenness Centrality  
2- Closeness Centrality  
3- Eigen vector Centrality



**Fig. 3** Error state variables for the network with control system in Node 3 with  $c = 1$  in example 1

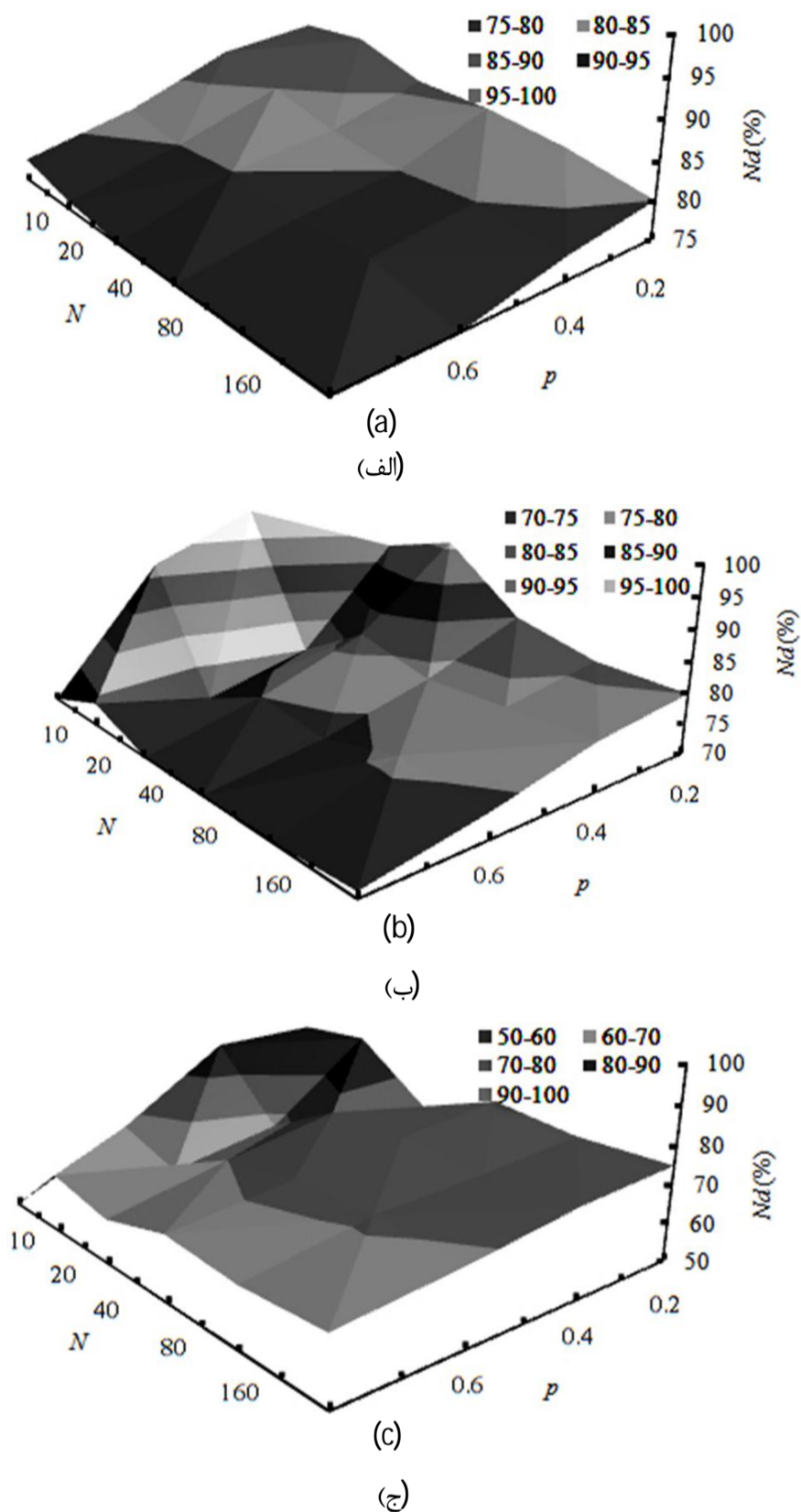
شکل 3 متغیرهای حالت خطا برای شبکه با اعمال کنترلر بر روی گره شماره 3 با  $C = 1$  در مثال 1

کنترل شونده تعیین و با شبیه سازی سیستم کنترل شده با کنترلر توصیف با معادله (10)، حداقل تعداد گره‌های کنترل شونده (بصورت درصدی از کل تعداد گره‌ها در شبکه) برای رسیدن به عملکرد مورد نظر طوری تعیین می‌شود بطوری که شرط همگامی شبکه در معادله (11) ارضا گردد.

گام سوم: گام اول و دوم برای شبکه‌ها با مدل‌های ساختاری مختلف و ضریب احتمال ارتباط مختلف انجام و نتیجه‌ها مقایسه شده تا بتوان نتیجه گیری نهایی در مورد هر یک از معیارهای انتخاب گره‌های کنترل شونده انجام داد.

#### 1-4- بررسی کنترل پذیری گیره ای در شبکه های دینامیکی تصادفی

در این بخش به بررسی کنترل پذیری شبکه های دینامیکی تصادفی پرداخته می‌شود. شبکه های تصادفی ابتدا در سال 1959 ارائه شدند. در این شبکه ها، گره‌ها با احتمال ثابت  $p$  به گره های دیگر ارتباط پیدا می‌کنند. به منظور بررسی کنترل پذیری گیره ای در این شبکه ها، میزان گره‌های کنترل شونده



**Fig. 5** Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Small-World networks ( $k = 1$ ) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 5 تعداد گره های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه های دینامیکی جهان کوچک ( $k = 1$ ) الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

مقایسه نتایج شبکه های تصادفی و جهان کوچک، می توان دریافت که درجه کنترل پذیری شبکه های جهان کوچک کمتر از شبکه های تصادفی است. این تفاوت بخصوص در شبکه ها با تعداد گره بالاتر بیشتر، مشخص تر است.

در ادامه برای بررسی تأثیر ضریب همسایگی شبکه های جهان کوچک بر روی تعداد گره های کنترل شونده، نتایج برای ضریب همسایگی  $k = 3$  در شکل 6 نشان داده شده است. مقایسه نتایج برای دو ضریب همسایگی نشان می دهد که با افزایش ضریب همسایگی شبکه جهان کوچک، در شبکه ها با تعداد گره کمتر، تعداد گره های کنترل شونده کاهش می یابد. همچنین در هر سه معیار انتخاب گره های کنترل شونده، میانگین تعداد گره های کنترل شونده برای شبکه جهان کوچک با ضریب همسایگی بالاتر، کاهش یافته است. این به معنای افزایش کمیت کنترل پذیری گیره ای در این شبکه هاست.

نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ای برای شبکه های دینامیکی تصادفی نشان می دهد که در صورت انتخاب گره های کنترل شونده با معیارهای مرکزیت، با افزایش ضریب احتمال ارتباط در شبکه، تعداد این گره ها برای رسیدن به عملکرد مطلوب کاهش می یابد. به طور مثال، در شبکه ها با 160 گره و با ضریب احتمال 0.8، با کنترل نزدیک به 22 درصد گره ها، می توان به عملکرد مطلوب دست یافت. این در حالی است که اگر ضریب احتمال 0.2 باشد، می بایست 30 درصد گره ها کنترل شوند. همچنین در شبکه ها با تعداد گره های کمتر، تعداد گره های کنترل شونده بخصوص در ضریب احتمال کمتر، افزایش می یابد. بطوری که در شبکه ها با تعداد 10 گره، حداقل 90 درصد گره ها می بایست کنترل شوند تا عملکرد مطلوب در حرکت همگام حاصل شود. نتیجه مهم دیگری که از این نتایج می توان گرفت، کاهش تعداد گره های کنترل شونده برای معیار مرکزیت میانی است. در شبکه ها با تعداد گره های مختلف و در ضریب احتمال های ارتباط مختلف، کمترین تعداد گره های کنترل شونده به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب حرکت همگام که در اینجا زمان رسیدن به حرکت همگام است، مربوط به معیار کنترل گره ها بر اساس مرکزیت میانی است. این به معنی کارایی این معیار در انتخاب گره های کنترل شونده است.

#### 4-2- بررسی کنترل پذیری گیره ای در شبکه های دینامیکی جهان کوچک

شبکه جهان کوچک، شبکه ای است که گره های آن در همسایگی هم نیستند ولی هر گره با طی فاصله کوتاهی و با چند گام کوچک می تواند به گره دیگر برسد. دارا بودن طول مسیر مشخصه کوتاه و ضریب خوشه بندی بالا دو مشخصه اصلی از شبکه های جهان کوچک است. شبکه های مختلفی با این نوع شبکه مدل می شوند. شبکه های اجتماعی، ارتباطات در دنیای مجازی و شبکه ژن ها، شبکه حمل و نقل جاده ای، زنجیره غذایی، سیستم توزیع برق هوشمند، شبکه نورون مغز نمونه هایی از شبکه های واقعی هستند که با شبکه جهان کوچک مدل می شوند.

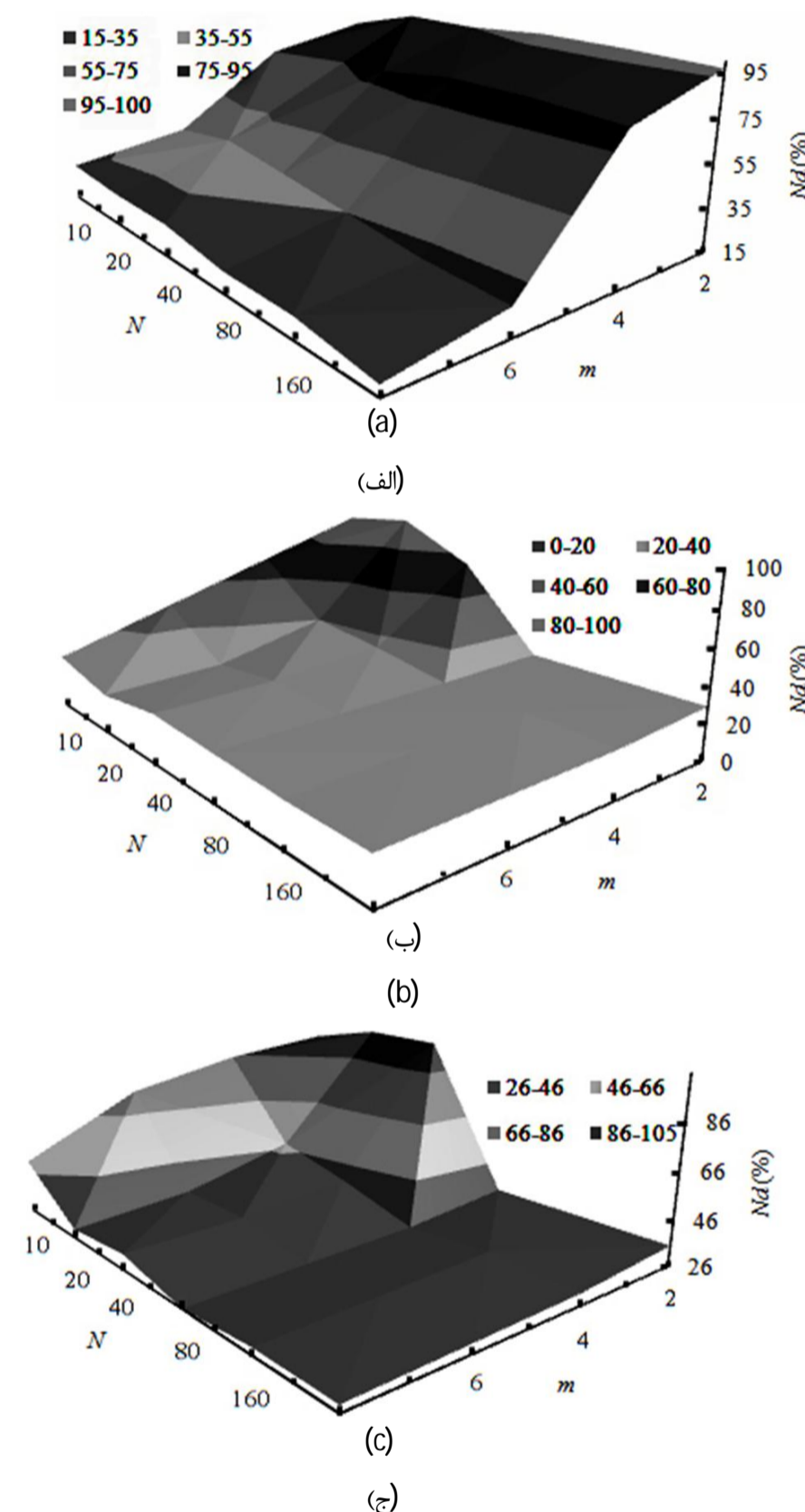
به منظور بررسی کنترل پذیری گیره ای شبکه ها با خصوصیت جهان کوچک، تعداد گره های کنترل شونده بر حسب ضریب احتمال ارتباط شبکه و تعداد گره های آن، برای معیارهای مختلف انتخاب گره ها و برای دو ضریب همسایگی مختلف<sup>1</sup>، در شکل 5 و شکل 6 نشان داده شده اند. در این شبکه ها نیز دینامیک لورنز در گره ها، زمان رسیدن به حرکت همگام معادل با 20 ثانیه، وزن ارتباط معادل  $C = 1$  و کنترلر توصیف شده در معادله (10) انتخاب شده است. نتایج برای شبکه های جهان کوچک نیز نشان می دهد که در صورت انتخاب گره های کنترل شونده با معیارهای مرکزیت، با افزایش ضریب احتمال ارتباط در شبکه، تعداد این گره ها برای رسیدن به عملکرد مطلوب کاهش می یابد. همچنین برای این نوع شبکه ها، تعداد گره های کنترل شونده با معیار مرکزیت میانی کمترین مقدار را در بین معیارها دارد. مهمترین تفاوت نتایج برای شبکه های جهان کوچک نسبت به شبکه های تصادفی، افزایش تعداد گره های کنترل شونده در شبکه ها با تعداد گره های بالاست. بطور مثال در شبکه جهان کوچک با 160 گره و ضریب ارتباط 0.6، می بایست 70 درصد گره ها کنترل شوند تا به عملکرد مطلوب دست یافت. در حالی که این مقدار در شبکه های تصادفی نزدیک به 30 درصد از کل گره ها بود. علت این افزایش، به ساختار شبکه های جهان کوچک مرتبط است. با

1- Clustering Coefficient  
2- k-nearest neighbors



ارتباط شبکه و تعداد گره های آن، برای معیارهای مختلف انتخاب گره ها، برای ضریب تجانس<sup>۴</sup>  $B=1$  در شکل 7 نشان داده شده اند. در این شبکه ها نیز دینامیک لورنز در گره ها، زمان رسیدن به حرکت همگام معادل با 20 ثانیه، وزن ارتباط معادل  $C=1$  و کنترلر توصیف شده در معادله (10) انتخاب شده است.

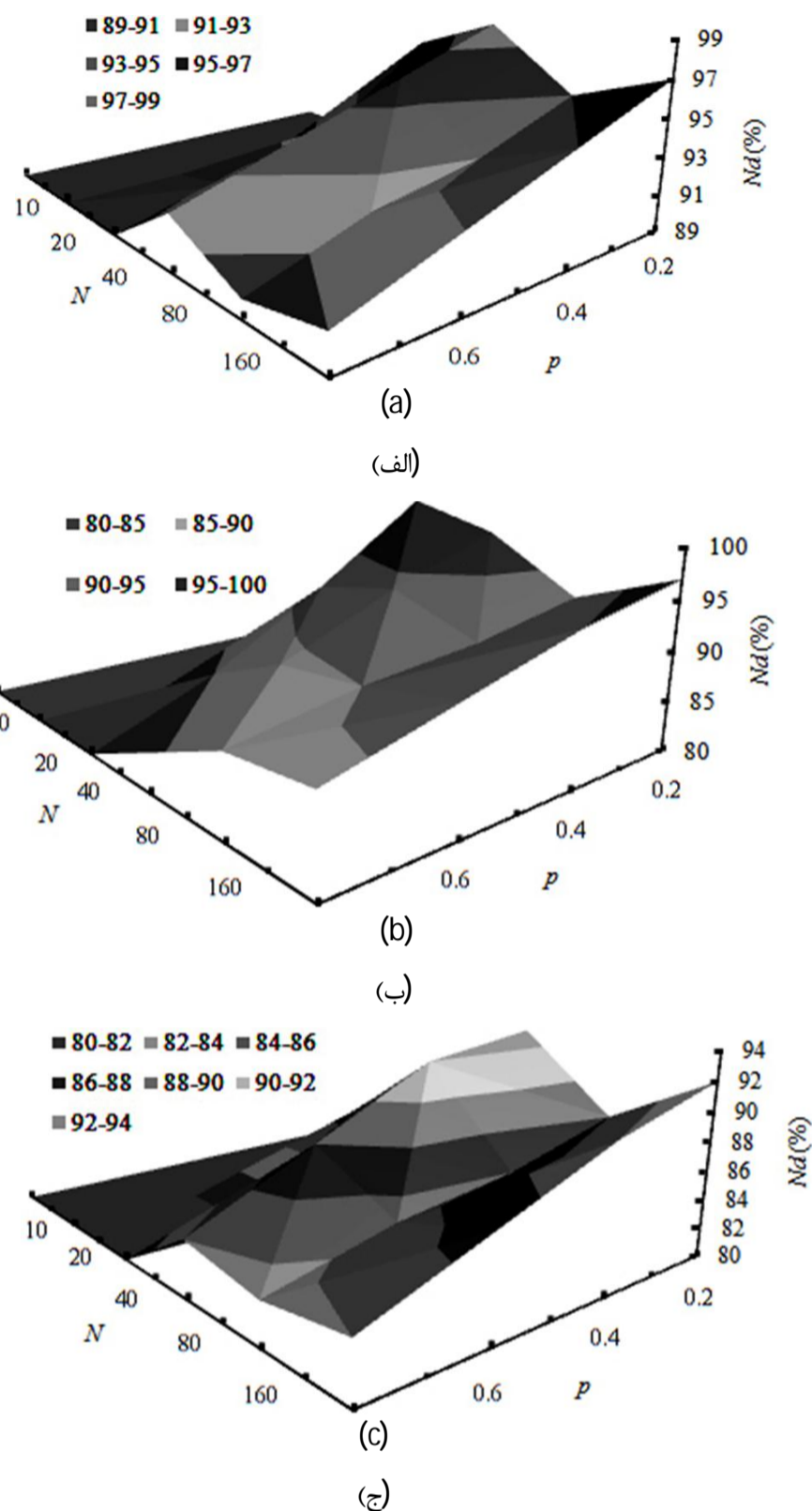
بررسی نتایج در شبکه های مستقل از مقیاس، نشان می دهد که انتخاب گره های کنترل شونده بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی بخصوص در شبکه ها با تعداد گره های بالاتر، منجر به کاهش تعداد گره های کنترل شونده می شود. این به معنای بهبود کنترل پذیری گیره ای شبکه های مستقل از مقیاس با انتخاب گره های کنترل شونده از معیار مرکزیت نزدیکی است. نتیجه مهم



**Fig. 7** Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Scale Free networks ( $B = 1$ ) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 7 تعداد گره های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه های دینامیکی مستقل از مقیاس ( $B=1$ ) (الف) معیار مرکزیت میانی (ب) معیار مرکزیت نزدیکی (ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

4- Professional attachment



**Fig. 6** Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Small-World networks ( $k = 3$ ) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 6 تعداد گره های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه های دینامیکی جهان کوچک ( $k = 3$ ) (الف) معیار مرکزیت میانی (ب) معیار مرکزیت نزدیکی (ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

### 3-4- بررسی کنترل پذیری گیره ای در شبکه های دینامیکی مستقل از مقیاس

شبکه های دینامیکی مستقل از مقیاس از قانون توان<sup>۱</sup> در توزیع درجه گره ها استفاده می کنند. شبکه های دینامیکی که بر اساس این مدل ساخته می شوند، شامل دو اصل رشد<sup>۲</sup> و انتساب حرفه ای<sup>۳</sup> هستند. اصل رشد بیان می کند که گره های جدید با یک نرخ مشخص وارد می شوند. و قانون انتساب حرفه ای بیان می کند که گره های جدید تمایل دارند با گره هایی با همان درجه ارتباط داشته باشند. این دو قانون بر اساس الگوهای موجود در شبکه های اینترنتی تشخیص داده شده اند [12]. به منظور بررسی کنترل پذیری گیره ای این شبکه ها، تعداد گره های کنترل شونده بر حسب ضریب احتمال

1- Power law  
2- Growth  
3- Professional attachment

جدول 1 نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ای شبکه های دینامیکی بر اساس عملکرد حرکت همگام

**Table 1** Results for pinning controllability of the dynamical networks based on the synchronized motion performance

نوع شبکه	اندازه شبکه	معیار مناسب انتخاب گره های کنترل شونده
شبکه های تصادفی	تنک	معیار مرکزیت میانی
	چگال	معیار مرکزیت میانی
شبکه جهان کوچک	تنک	معیار مرکزیت میانی
	چگال	معیار مرکزیت میانی
شبکه مستقل از مقیاس	تنک	معیار مرکزیت نزدیکی
	چگال	معیار مرکزیت نزدیکی

مختلف با اندازه های تنک<sup>1</sup> و چگال<sup>2</sup> مشخص شده اند.

### 5- نتیجه گیری

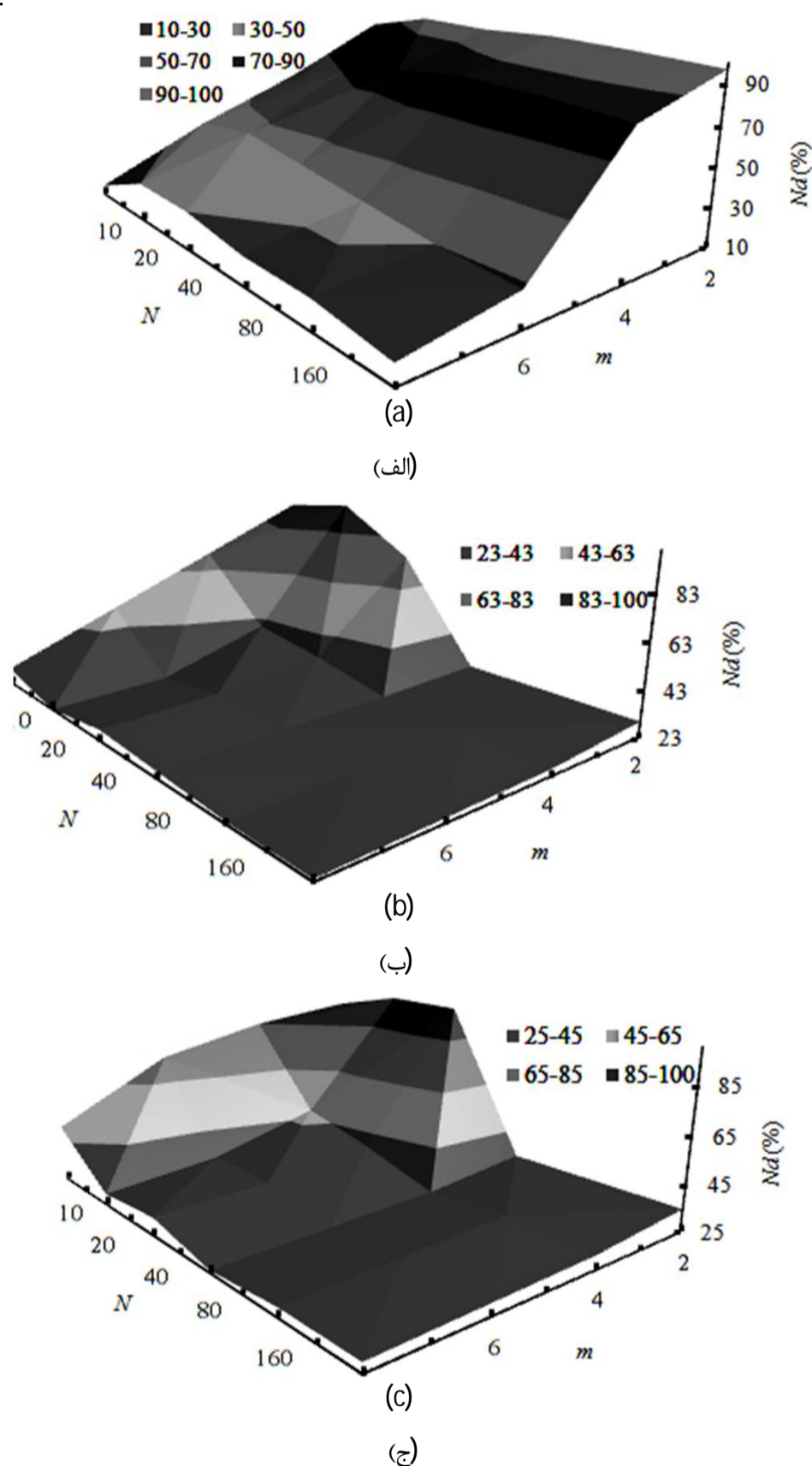
مسئله تعیین تعداد و نوع گره های کنترل شونده که تحت عنوان کنترل پذیری گیره ای در شبکه های دینامیکی مطرح است، در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور معیارهای مرکزیت میانی، مرکزیت نزدیکی و مرکزیت مقادیر ویژه به عنوان سه معیار اصلی که نشان دهنده میزان اهمیت گره ها در یک شبکه دینامیکی هستند، مورد بررسی قرار گرفته اند. برای هر یک از این معیارها، عملکرد حرکت همگام شبکه مورد توجه بوده است. نتایج نشان می دهد در صورتی که بخشی از گره های شبکه کنترل شوند، عملکرد حرکت همگام شبکه در مدت زمان رسیدن به حرکت همگام بهبود می یابد. نتایج بررسی کنترل پذیری گیره ای برای شبکه های دینامیکی تصادفی نشان می دهد که کمترین تعداد گره های کنترل شونده به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب حرکت همگام که در اینجا زمان رسیدن به حرکت همگام است، مربوط به معیار کنترل گره ها بر اساس مرکزیت میانی است. این نتیجه برای شبکه های جهان کوچک نیز برقرار بوده با این تفاوت که برای شبکه های جهان، تعداد گره های کنترل شونده در شبکه ها با اندازه بزرگتر، بیشتر می شود. در ادامه بررسی نتایج در شبکه های مستقل از مقیاس، نشان می دهد که انتخاب گره های کنترل شونده بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی بخصوص در شبکه ها با تعداد گره های بالاتر، منجر به کاهش تعداد گره های کنترل شونده می شود. نتیجه مهم دیگر این است که تعداد گره های کنترل شونده که بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی و مرکزیت ویژه انتخاب می شوند، در تمامی ضرایب ارتباط، کمتر از تعداد گره های انتخاب شده با معیار مرکزیت میانی هستند. در پایان بررسی اثر ضریب همسایگی در شبکه های جهان کوچک و ضریب تجانس در شبکه های مستقل از مقیاس بر روی کنترل پذیری گیره ای نشان می دهد با افزایش این دو ضریب، تعداد گره های کنترل شونده کاهش می یابد. این کاهش در شبکه ها با تعداد بیشتر مشهودتر است.

### 6- فهرست علائم

#### علائم لاتین

$a$	درایه ماتریس ارتباط
$B$	ضریب تجانس
$c$	وزن ارتباط

دیگر این است که تعداد گره های کنترل شونده که بر اساس معیار مرکزیت نزدیکی و مرکزیت بردار ویژه انتخاب می شوند، در تمامی ضرایب ارتباط، کمتر از تعداد گره های انتخاب شده با معیار مرکزیت میانی هستند. تعداد گره های کنترل شونده در شبکه های مستقل از مقیاس با ضریب تجانس  $B=3$  نیز در شکل 8 نشان داده شده است. مقایسه نتایج در شکل های 7 و 8 نشان می دهد با افزایش ضریب تجانس در این شبکه ها، تعداد گره های کنترل شونده کاهش می یابد. این کاهش در شبکه ها با تعداد بیشتر مشهودتر است. به منظور جمع بندی بر روی نتایج بدست آمده از کنترل پذیری گیره ای شبکه های دینامیکی بر اساس عملکرد حرکت همگام، خلاصه نتایج در جدول 1 نشان داده شده است. نتایج برای شبکه ها با مدل های ساختاری



**Fig. 8** Driver nodes quantity based on the centrality criteria in the Scale Free networks ( $B = 3$ ) a) Betweenness centrality criterion b) Closeness centrality criterion c) Eigen vector centrality criterion

شکل 8 تعداد گره های کنترل شونده بر اساس معیار انتخاب مرکزیت در شبکه های دینامیکی مستقل از مقیاس ( $B=3$ ) الف) معیار مرکزیت میانی ب) معیار مرکزیت نزدیکی ج) معیار مرکزیت بردار ویژه

1- Sparse  
2- Dense

برای پایداری مجانبی حرکت همگام، مشتق تابع لیپانوف باید منفی معین باشد. بنابراین شرط معادله (18) باید برقرار باشد:

$$(I_N \otimes \Lambda \Gamma) + c(L \otimes \Gamma) - c(D \otimes \Gamma) < 0 \quad (18)$$

**پیوست ب: روابط معیارهای مرکزیت در شبکه های دینامیکی**

مرکزیت در شبکه های دینامیکی، بیانگر میزان اهمیت گره ها در شبکه هاست که بر اساس خصوصیات مانده ارتباطات گره ها در شبکه و نیز میزان تأثیرگذاری و تأثیرپذیری آن ها در شبکه تعیین می شود. بر این اساس سه نوع معیار مرکزیت در شبکه، شامل مرکزیت میانی، مرکزیت نزدیکی و مرکزیت بردار ویژه به صورت زیر تعریف می شوند:

اندیس مرکزیت میانی با رابطه (19) محاسبه می گردد [15].

$$C_B(v) = \sum_{s \neq v \in V} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}} \quad (19)$$

که در آن  $\sigma_{st}$  تعداد کوتاهترین مسیرها از گره  $s$  به گره  $t$  است.  $\sigma_{st}(v)$  نیز تعداد کوتاهترین مسیرها از گره  $s$  به گره  $t$  است که از گره  $v$  عبور می کند.

اندیس مرکزیت نزدیکی با رابطه (20) محاسبه می شود [16].

$$C(x) = \frac{1}{\sum_y d(x, y)} \quad (20)$$

که در آن  $d(x, y)$  جمع فواصل گره  $x$  از تمامی گره های دیگر است.

اندیس مرکزیت بردار ویژه با رابطه (21) محاسبه می شود [17].

$$C_x(v) = \frac{1}{\lambda} \sum_{t \in A} a_{v,t} x_t \quad (21)$$

که در آن  $\lambda$  مقدار ویژه ماکزیمم ماتریس ارتباط است.

## 9- مراجع

- [1] S. H. Strogatz, Exploring complex networks, *Nature*, Vol. 410, No. 6825, pp. 268-276, 2001 .
- [2] A. Arenas, A. Diaz-Guilera, C. J. Pérez-Vicente, Synchronization processes in complex networks, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 224, No. 1, pp. 27-34, 2006.
- [3] M. Jalili, Enhancing synchronizability of diffusively coupled dynamical networks: a survey, *Neural Networks and Learning Systems, IEEE Transactions on*, Vol. 24, No. 7, pp. 1009-1022, 2013 .
- [4] G. Ali, A. Soleyman, Pinning control for synchronization of nonlinear complex dynamical network with suboptimal SDRE controllers, *Nonlinear Dynamics*, 2015 .in press. DOI 10.1007/s11071-015-2383-8
- [5] Y.-Y. Liu, J.-J. Slotine, A.-L. Barabási, Controllability of complex networks, *nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 167-173, 2011 .
- [6] Z. Yuan, C. Zhao, Z. Di, W.-X. Wang, Y.-C. Lai, Exact controllability of complex networks, *Nature communications*, Vol. 4, No 1, pp. 1-9, 2013 .
- [7] F. Pasqualetti, S. Zampieri, F. Bullo, Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks, *Control of Network Systems, IEEE Transactions on*, Vol. 1, No. 1, pp. 40-52, 2014 .
- [8] M. Jalili, O. A. Sichani, X. Yu, Optimal pinning controllability of complex networks: Dependence on network structure, *Physical Review E*, Vol. 91, No. 1, pp. 012803, 2015 .
- [9] Y. Tang, H. Gao, J. Kurths, J.-a. Fang, Evolutionary pinning control and its application in UAV coordination, *Industrial Informatics, IEEE Transactions on*, Vol. 8, No. 4, pp. 828-838, 2012 .
- [10] P. ERDdS, A. WI, On random graphs I, *Publication Mathematic Debrecen*, Vol. 6, pp 290-297, 1979.
- [11] D. J. Watts, S. H. Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, *nature*, Vol. 393, No. 6684, pp. 440-442, 1998 .

$d$	درایه ماتریس کنترلر
$k$	ضریب همسایگی
$l$	درایه ماتریس لاپلاسیان
$N$	تعداد گره های شبکه
$N_d$	تعداد گره های کنترل شونده
$p$	ضریب احتمال ارتباط
$r$	ضریب در معادله لورنز
$u$	ورودی کنترلی

## علائم یونانی

$\Gamma$	ماتریس ارتباط داخلی
$\Lambda$	ضریب لیپ شیتز
$\lambda$	مقدار ویژه
$\theta$	متوسط مقادیر ویژه
$\sigma$	ضریب در معادله لورنز
$\gamma$	ضریب در معادله لورنز

## زیرنویس ها

$i$	شمارنده گره
$j$	شمارنده گره

## 7- تقدیر و تشکر

نویسندگان این مقاله، از پروفسور J.J.Slotine از دانشگاه MIT و دکتر Gourang Chen از دانشگاه ملی تایوان برای مکالمات بسیار سودمندشان، تشکر ویژه می نمایند.

## 8- پیوست

### پیوست الف: اثبات نامساوی (11)

برای اثبات پایداری و بدست آوردن شرط آن، تابع لیپانوف مطابق معادله (14) را در نظر می گیریم:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \quad (14)$$

مشتق تابع  $V(t)$  در طول مسیر معادله (6) به صورت معادله (15)

است:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \dot{e}_i(t) \quad (15)$$

با جاگذاری معادله (9) در (15)، معادله به شکل معادله (16) نوشته

می شود:

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \left[ (f(e_i(t), t) + c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma e_j(t)) - \sum_{i=1}^N d_i(t) e_i^T(t) \Gamma e_i(t) \right] \quad (16)$$

$D = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_N)$  اعضای ماتریس

هستند که نشان دهنده گره های کنترل شونده در شبکه می باشد.

با توجه به شرط لیپ شیتز بیان شده در بخش 2 و استفاده از خواص

ضرب کرونگر، معادله (16) به شکل معادله (17) نوشته می شود:

$$\dot{V}(t) \leq e^T(t) [(I_N \otimes \Lambda \Gamma) + c(L \otimes \Gamma) - [c(D \otimes \Gamma)] e_j(t) < 0 \quad (17)$$



- 14, No. 7, pp. 68-76, 2014. (in Persian فارسی)
- [۱۵] U. Brandes, A faster algorithm for betweenness centrality, *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 25, No. 2, pp. 163-177, 2001.
- [۱۶] K. Okamoto, W. Chen, X.-Y. Li, *Ranking of closeness centrality for large-scale social networks*, in: *Frontiers in Algorithmics*, Eds., pp. 186-195: Springer, 2008.
- [۱۷] P. Bonacich, Some unique properties of eigenvector centrality, *Social Networks*, Vol. 29, No. 4, pp. 555-564, 2007.
- [۱۲] A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *science*, Vol. 286, No. 5439, pp. 509-5, 1999.
- [۱۳] W. Yu, G. Chen, J. Lü, On pinning synchronization of complex dynamical networks, *Automatica*, Vol. 45, No. 2, pp. 429-435, 2009.
- [۱۴] Gomroki. M, Abedini. M, Salarieh. H, Meghdari. A, Identification of Lorenz chaotic system based on synchronization using fractional order calculus, *Modares Mechanical Engineering*, Vol.