

## روش خطی سازی چند مرحله‌ای در تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های آبرسانی

ناصر موسویان و محمدرضا جعفرزاده\*

گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۰۴/۰۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۰۴/۰۷)

چکیده -

واژگان کلیدی :

### Multistage Linearization Method for Hydraulic Analysis of Water Distribution Networks

N. Moosavian and M. R. Jaefarzadeh

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad

**Abstract:** A novel method is presented for hydraulic analysis of water distribution networks. In this method, each non-linear term in energy equations is estimated with a linear counterpart. Thereby, the system of linear-nonlinear equations is converted into a system of linear-linear equations and resolved. The solution is an appropriate estimation for the next iteration stage where the nonlinear terms are linearized in a smaller interval near it. The successive iterations are continued to a desirable precision. Comparing the multistage linearization algorithm with the Newton-Raphson, secant and global gradient methods in several examples confirms its less computational operation and faster convergence time.

**Keywords:** Hydraulic analysis, Multistage linearization method, Water distribution network.

---

\* : مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: jafarzad@um.ac.ir

طول لوله	L	ضرب زاویه	A
توان دبی در معادله افت	m	عرض از مبدأ	B
برداشت از گره	q	ضرب هزن-ولامز	C
دبی لوله	Q	قطر لوله	D
ضرب افت هد	R	تابع غیرخطی	f
نرم باقیمانده	$\ \varepsilon\ $	تابع خطی شده	g
		هد فشار گره	H
		افت هد در لوله	hf

## ۱- مقدمه

$\Delta Q$ ) نیز در حلقه‌ها با دقت مناسب ارضا شوند. در شبکه‌های کوچک از روش کراس به علت سادگی، به‌طور گسترده استفاده می‌شود. اما ایراد اساسی وابستگی این روش به حدس اولیه است به طوری که با بزرگ شدن شبکه، همگرایی مدل بسیار کند می‌شود و در برخی موارد احتمال واگرایی وجود دارد.

مارتین و پیترز [۳] اولین کسانی بودند که در تحلیل شبکه‌های آبرسانی از روش نیوتن-رافسون استفاده کردند. در روش آن‌ها کلیه معادلات بر حسب هد‌های گرهی، H، نوشته می‌شوند. آن‌گاه با اصلاح هد در تکرارهای متوالی جواب مسئله به دست می‌آید. یکی از معایب روش مارتین و پیترز عدم همگرایی مطلوب آن در شبکه‌های بزرگ است. برای رفع این مشکل باید برخی از لوله‌های شبکه موقتاً در روند تحلیل حذف شوند. از دیگر معایب، نوسانات زیاد تا رسیدن به همگرایی مطلوب است. برای کاهش نوسانات مقدار  $\Delta H$  اصلاحی به نصف تقلیل می‌یابد البته این کار سبب افزایش تعداد تکرارها می‌شود. لیسو [۴] نسخه ساده تری از روش نیوتن-رافسون را ارائه کرد. در این روش ماتریس ژاکوبین به دو ماتریس قطری و غیر قطری تجزیه می‌شود. نظر به اهمیت ماتریس قطری، ماتریس غیر قطری برای ساده سازی حذف می‌شود. در نتیجه حل دستگاه معادلات خطی بسیار آسان می‌شود. در صورت انتخاب حدس اولیه نامناسب این روش

تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های بزرگ آبرسانی از مسائلی مهمی است که از چندین دهه قبل تا کنون محققان زیادی را به خود مشغول کرده است. معادلات حاکم بر این سیستم‌ها شامل معادلات پیوستگی جرم در هر گره و افت انرژی در هر لوله است. این معادلات بر اساس مجهولات به چهار دسته معادلات دبی، Q، معادلات هد، H، معادلات اصلاح شده‌ی دبی  $\Delta Q$  و معادلات دبی - هد، Q-H، تقسیم بندی می‌شوند. در حالت اول سیستم معادلات پیوستگی جریان در گره‌ها و افت انرژی در حلقه‌ها بر حسب Q نوشته می‌شوند. در حالت دوم معادلات پیوستگی در گره‌ها بر حسب H، فرمول بندی می‌شوند. در حالت سوم معادلات افت انرژی در هر حلقه‌ی بسته بر حسب  $\Delta Q$  نوشته و حل می‌شود و در حالت چهارم معادلات پیوستگی جریان در هر گره بر حسب Q و معادلات افت انرژی در هر لوله بر حسب H و Q نوشته می‌شود، [۱].

هاردی کراس [۲] روشی بر مبنای اصلاحات پی در پی مجهولات برای تحلیل شبکه‌ها ارائه کرد. در این روش دبی‌های اولیه طوری حدس زده می‌شوند که معادلات پیوستگی در گره‌ها برقرار باشند. در فرایند تحلیل، این دبی‌ها به‌طور متوالی اصلاح می‌شوند تا معادلات انرژی (بر حسب

واگرا می‌شود.

روش نظریه خطی برای اولین بار توسط وود و چارلز [۵] بر حسب معادلات Q ارائه شد. در این روش نیازی به ارضای معادلات پیوستگی در انتخاب حدس اولیه نیست و مشکلات کندی همگرایی نیز که در روش نیوتن-رافسون بر حسب معادلات H وجود داشت تا حدودی رفع شده است. در این روش معادلات غیرخطی افت انرژی، خطی می‌شوند و در هر تکرار دستگاه معادلات خطی شده Q حل می‌شود. با به روز رسانی دبی جریان در هر تکرار و اصلاح ضرایب خطی سازی محاسبات به جواب نهایی همگرا می‌شود. عیب این روش نوساناتی است که پیرامون جواب نهایی به وجود می‌آید. برای غلبه بر این مشکل، دبی جریان برابر میانگین دبی تکرار قبل و ماقبل فرض می‌شود هر چند این راهکار نمی‌تواند نوسانات خطا را به طور کلی حذف کند اما روند همگرایی با سرعت بیشتری انجام می‌شود [۶]. وود و فانک [۷] با استفاده از بسط سری تیلور روش جدیدی برای حل معادلات Q ارائه کردند. این روش عیناً برابر با روش نیوتن-رافسون بر حسب معادلات Q است. در حال حاضر از این الگوریتم در تحلیل شبکه‌های آبرسانی به ویژه در نرم افزار تجاری KYPIPE استفاده می‌شود [۸].

با توجه به موفقیت اولیه روش نظری خطی، ایزاک و میلز [۹] نسخه دیگری از این روش را بر اساس هدهای گرهی H ارائه کردند. برتری این روش نسبت به روش وودو چارلز، سادگی مدل سازی و تقارن ماتریس ضرایب است در نتیجه اطلاعات در فضای کمتری ذخیره می‌شود. در این روش هدهای گرهی بدون تامین معادلات پیوستگی حدس زده می‌شوند. انتخاب حدس اولیه مناسب سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد. روش ایزاک در دبی های نزدیک به صفر ناپایدار می‌شود. برای رفع این مشکل ایزاک و میلز لوله‌های با دبی نزدیک به صفر را حذف کردند.

تودینی و پیلاتی [۱۰] روش گرادیان سراسری<sup>۱</sup> (GGA) را برای تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله ها به کار بردند در این

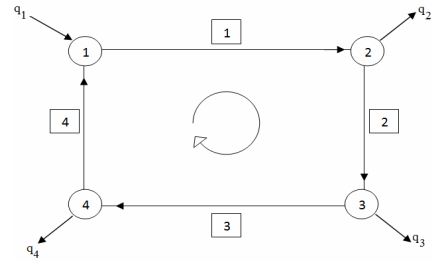
روش معادلات افت انرژی در حلقه ها به صورت تابع هدف و معادلات پیوستگی به صورت قید، در یک مسئله ی بهینه سازی تعریف می‌شود. سپس با استفاده از ضرایب لاگرانژ مسئله ی بهینه سازی، بدون قید شده و معادلات حاصله با به کار بردن روش نیوتن-رافسون حل می‌شوند. در حال حاضر از این الگوریتم در تحلیل شبکه‌های آبرسانی به ویژه در نرم افزارهای تجاری EPANET و WATERGEMS استفاده می‌شود.

باشا و کساب [۱۱] روشی مبنی بر نظریه اختلال ارائه کردند که در هر شبکه با سه تکرار مقادیر نزدیک به جواب نهایی را ارائه می‌داد اما دقت کافی نداشت. ژاکوب و گوپتا نیز روش سکانت (خطی سازی دو نقطه‌ای) را به جای روش نیوتن-رافسون در الگوریتم تودینی به کار بردند که با تقریب مناسبی به تحلیل شبکه می‌پرداخت [۱۲].

اسپیلیوتیس و تساکیریس [۱۳] روش نیوتن-رافسون را بر روی معادلات H به کار بردند. آن‌ها از رابطه ی افت هد سوامی [۱۴] به جای معادلات افت هد داری-ویسباخ یا هیزن-ویلیامز استفاده کردند. معادله افت هد سوامی غیر خطی است و برای استفاده از آن باید در هر گام یک معادله غیر خطی مربوط به افت هد علاوه بر روش نیوتن-رافسون بر معادلات H حل شود. همگرایی به سوی جواب در راهکار اسپیلیوتیس و تساکیریس با نوساناتی همراه است.

به طور کلی رفتار تابع در فرایند همگرایی تاثیر به‌سزایی دارد. اگر معادلات بر حسب دبی لوله ها نوشته شود توان مجهولات Q که در معادلات غیر خطی انرژی ظاهر می‌شود بزرگتر از یک (نزدیک به دو) می‌شود. اما در صورتی که معادلات بر حسب هدهای گرهی نوشته شود، توان مجهولات H کوچکتر از یک خواهد بود. این خاصیت، همگرایی معادلات Q را تضمین می‌کند و سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد [۱۰].

در تحقیق حاضر روشی نوین با عنوان "روش خطی سازی چند مرحله‌ای ۲ برای حل دستگاه معادلات غیر خطی Q



شکل ۱- شبکه‌ی یک حلقه‌ای با ۴ گره

$q_j$  میزان برداشت از گره و  $Q_k$  دبی لوله های متصل به آن است. افت فشار آب در لوله  $k$  ام  $h_k$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$h_k = H_i - H_j = R_k \cdot Q_k^n \quad (2)$$

که در آن  $H_i$  و  $H_j$  هد های گرهی در ابتدا و انتهای لوله،  $R_k$  ضریب مقاومت لوله  $k$  ام با دبی  $Q_k$  است.  $n$  بسته به معادله مقاومت جریان یک عدد ثابت است. برای مثال در صورت استفاده از معادله هیزن ویلیامز مقادیر  $R$  و  $n$  در سیستم آحاد SI مطابق رابطه‌ی زیر تعریف می شوند:

$$R = \frac{10.67L}{C^{1.852} D^{4.87}}, \quad n = 1.852 \quad (3)$$

$C$  ضریب هیزن ویلیامز (وابسته به جنس لوله)،  $D$  قطر لوله و  $L$  طول آن است.

### ۳- کاربرد معادلات $Q$ در یک شبکه تک حلقه‌ای

در شکل (۱)، برای سادگی، یک شبکه تک حلقه‌ای با میزان برداشت  $q_j$  از هر گره نشان داده شده است. برای هر گره به غیر از آخرین گره یک معادله خطی پیوستگی مطابق رابطه‌ی (۱) نوشته می شود:

$$\begin{aligned} Q_1 - Q_4 &= q_1 \\ Q_1 - Q_2 &= q_2 \\ Q_2 - Q_3 &= q_3 \end{aligned} \quad (4)$$

معادله پیوستگی برای آخرین گره زائد است و از جمع جبری سایر معادلات به دست می آید.

برای هر حلقه  $k(=1)$  نیز یک معادله انرژی نوشته می شود. این معادله غیرخطی است:

$$R_1 |Q_1|^{n-1} Q_1 + R_2 |Q_2|^{n-1} Q_2 = 0 \quad (5)$$

علامت قدر مطلق برای حفظ جهت جریان در لوله است. با حل همزمان دستگاه معادلات خطی پیوستگی و غیرخطی انرژی دبی در لوله‌ها محاسبه می شود.

### ۴- روش خطی سازی چند مرحله‌ای

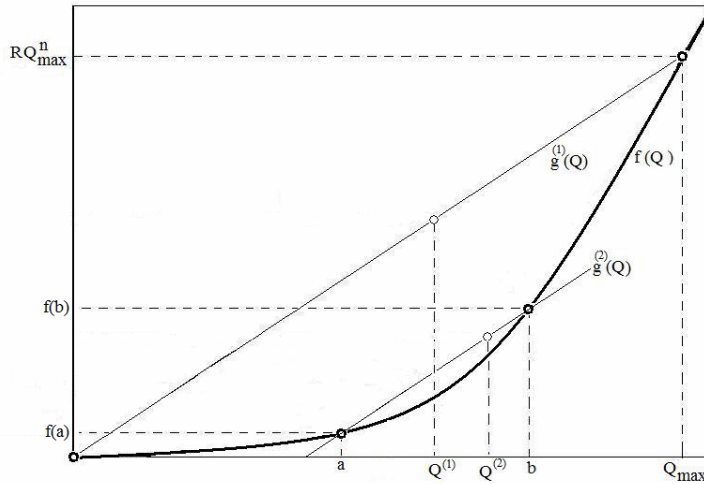
در روش خطی سازی چند مرحله‌ای هر کدام از جملات

معرفی می شود. در این کار جمله های غیر خطی معادلات انرژی، خطی سازی می شود در نتیجه دستگاه معادلات پیوستگی و انرژی به یک سیستم خطی - خطی شده تبدیل و حل می شود سپس در تکرار بعد توابع غیر خطی در بازه کوچکتري حول جواب، مجدداً خطی سازی و حل می شود. عملیات تا همگرایی به جواب نهایی با دقت مناسب ادامه پیدا می کند. زمان همگرایی روش پیشنهادی کمتر از سایر روش هاست. این روش به حدس اولیه بستگی ندارد، و مرتبه همگرایی آن مشابه روش نیوتن رافسون است. در ادامه چگونگی کاربرد این روش در تحلیل هیدرولیکی شبکه های آبرسانی به طور کامل شرح داده خواهد شد و زمان و روند همگرایی آن با روش های نیوتن رافسون (الگوریتم مورد استفاده در نرم افزار KYPIPE)، سکانت و گرادیان سراسری (الگوریتم مورد استفاده در نرم افزارهای EPANET و WATERGEMS) مقایسه می شود.

### ۲- معادلات شبکه های توزیع آب

در شبکه‌های توزیع آب شامل لوله‌ها، مخازن، پمپ‌ها و شیرها، مجهولات عبارت از دبی و افت هد در لوله‌هاست. این مجهولات از حل دستگاه معادلات پیوستگی در گره‌ها و انرژی در لوله‌ها به دست می آیند. بر اساس معادله پیوستگی جمع جبری جریان های ورودی و خروجی به یک گره  $j$  صفر می شود:

$$\sum_k Q_k = q_j \quad (1)$$



شکل ۲- خطی سازی تابع غیر خطی

آن‌گاه مقادیر  $a$  و  $b$  در دو سوی  $Q^{(1)}$  با شرط  $(a < Q^{(1)} < b)$  مشخص می‌شود:

$$\begin{cases} a = \left[ \frac{Q}{\Delta Q} \right] \Delta Q \\ b = \left[ \frac{Q}{\Delta Q} + 1 \right] \Delta Q \end{cases} \quad (7)$$

در روابط فوق نماد [ ] نشانگر جزء صحیح است. سپس بر دو نقطه  $(a, f(a))$  و  $(b, f(b))$  مطابق شکل (۲) خطی به معادله  $g^{(2)}(Q)$  گذرانده می‌شود:

$$g^{(2)}(Q) = AQ + B \quad (8)$$

که در آن

$$\begin{cases} A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ B = f(a) - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{cases} \quad (9)$$

مثلاً برای شبکه‌ی تک حلقه‌ای شکل (۱) با جایگذاری  $g^{(2)}(Q)$  از معادله (۸) برای هر لوله در معادله انرژی (۵) شکل ماتریسی دستگاه معادلات پیوستگی و انرژی به صورت زیر در می‌آید:

غیرخطی معادلات انرژی با یک جمله خطی تخمین زده می‌شود. در نتیجه سیستم معادلات خطی - غیر خطی (۴) و (۵) به دستگاه معادلات خطی - خطی شده تبدیل و حل می‌شود. در آغاز اختلاف بین دو تابع خطی و غیر خطی قابل ملاحظه است اما جواب حاصله تخمین مناسبی برای ادامه عملیات خطی سازی است به این صورت که در مرحله بعد توابع غیر خطی در بازه کوچکتری، در حوالی جواب خطی سازی می‌شود. عملیات متوالی تا رسیدن به دقت مطلوب ادامه پیدا می‌کند. به عنوان مثال هر کدام از توابع غیر خطی  $f(Q) = RQ^n$  را در بازه  $[0, Q_{max}]$  مطابق شکل (۲) در نظر بگیرید. ابتدا این منحنی با معادله خطی  $g^{(1)}(Q)$  در این بازه تخمین زده می‌شود:

$$g^{(1)}(Q) = R \cdot Q_{max}^{n-1} \cdot Q \quad (6)$$

$Q_{max}$  مقدار ثابتی است که بسته به شرایط مسئله تعیین می‌شود. در مسئله تحلیل شبکه  $Q_{max}$  را می‌توان برابر حداکثر دبی عبوری ممکن از هر لوله فرض کرد. با حل سیستم معادلات خطی - خطی شده تخمین اولیه دبی  $Q^{(1)}$  در هر لوله به دست می‌آید. در مرحله بعد، برای افزایش دقت، بازه  $[0, Q_{max}]$  به  $m$  فاصله به اندازه  $\Delta Q = \frac{Q_{max}}{m}$  تقسیم می‌شود.

از تکرار (k-1) ام به دست می‌آید. پس از هر بار حل دستگاه معادلات خطی، با به‌روز رسانی مقادیر  $\Delta Q$ ، دبی‌ها مقادیر جدیدی اختیار می‌کنند و ماتریس ضرایب و بردار مذکور اصلاح می‌شود.

الگوریتم خطی سازی روش سکانت برای حل معادله غیر خطی  $f(Q)=0$  مطابق زیر است [۱۰]:

$$Q^{(k)} = Q^{(k-1)} - \Delta Q \quad (13)$$

$$\Delta Q = f(Q^{(k-1)}) \frac{Q^{(k-1)} - Q^{(k-2)}}{f(Q^{(k-1)}) - f(Q^{(k-2)})}$$

تفاوت روش سکانت با روش نیوتن-رافسون در تخمین مشتق تابع  $f$  (ماتریس ژاکوبین) است. با استفاده از روش سکانت دستگاه معادلات شبکه حلقه‌ای شکل (۱)، مطابق زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ A_1^* & A_2^* & A_3^* & A_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - Q_4 + q_1 \\ Q_1 - Q_2 - q_2 \\ Q_2 - Q_3 - q_3 \\ R_1 Q_1 |Q_1|^{n-1} + R_2 Q_2 |Q_2|^{n-1} + R_3 Q_3 |Q_3|^{n-1} + R_4 Q_4 |Q_4|^{n-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$A_i^* = \frac{(R_i Q_i |Q_i|^{n-1})^{k-1} - (R_i Q_i |Q_i|^{n-1})^{k-2}}{(Q_i)^{k-1} - (Q_i)^{k-2}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود حجم عملیات محاسبه‌ی ماتریس ضرایب در طرف چپ معادلات (۱۰)، (۱۲) و (۱۴) تقریباً یکسان است. عملیات بروز رسانی بردار سمت راست، در روش خطی سازی چند مرحله‌ای تنها معادلات انرژی را در برمی‌گیرد اما در روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت کلیه معادلات را شامل می‌شود به همین دلیل حجم محاسبات روش خطی سازی از دو روش دیگر کمتر می‌شود.

روش خطی سازی به حدس اولیه وابسته نیست و با افزایش تعداد تقسیمات تابع غیر خطی (یعنی  $m$ ) قاطع به مماس میل می‌کند و مرتبه همگرایی آن همانند روش نیوتن-رافسون از مرتبه دو می‌شود در حالی که مرتبه همگرایی روش سکانت در حدود  $1/618$  است [۱۵].

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ -B_1 - B_2 - B_3 - B_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

در این معادلات ضرایب  $A_i$  و  $B_i$  برای لوله  $i$  مستقلاً محاسبه می‌شود. با حل دستگاه معادلات خطی (۱۰) تخمین جدید  $Q^{(2)}$  برای دبی‌ها به دست می‌آید. عملیات تا رسیدن به دقت مناسب ادامه پیدا می‌کند در هر مرحله تنها ضرایب  $A_i$  و  $B_i$  در معادله خطی شده انرژی ارزیابی می‌شوند در حالی که معادلات پیوستگی ثابت باقی می‌مانند.

## ۵- مقایسه روش خطی سازی چند مرحله‌ای با

### روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت

نظر به تشابه روش خطی سازی چند مرحله‌ای با روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت در این بخش حجم عملیات این روش‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شود. الگوریتم خطی سازی نیوتن-رافسون برای حل معادله غیرخطی  $f(Q)=0$  به شرح زیر است:

$$Q^{(k)} = Q^{(k-1)} - \Delta Q \quad (11)$$

$$f'(Q^{(k-1)}) \Delta Q = f(Q^{(k-1)})$$

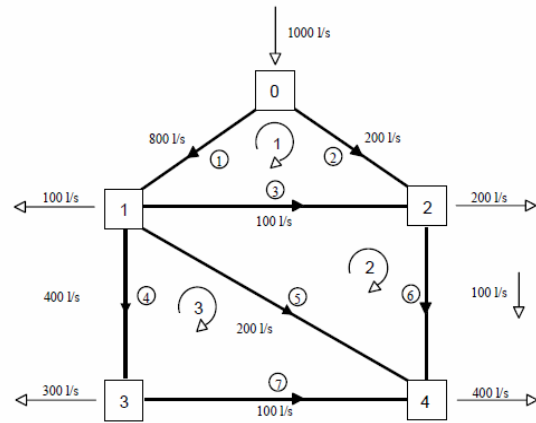
(k) شمارنده‌ی تکرار است.

برای سیستم معادلات شبکه شکل (۱) دستگاه خطی شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ R_1 |Q_1|^{n-1} & R_2 |Q_2|^{n-1} & R_3 |Q_3|^{n-1} & R_4 |Q_4|^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 - Q_4 + q_1 \\ Q_1 - Q_2 - q_2 \\ Q_2 - Q_3 - q_3 \\ R_1 Q_1 |Q_1|^{n-1} + R_2 Q_2 |Q_2|^{n-1} + R_3 Q_3 |Q_3|^{n-1} + R_4 Q_4 |Q_4|^{n-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

درایه‌های ماتریس ضرایب سمت چپ و بردار سمت راست

افزار EPANET به کار برده می‌شود همان روش نیوتن-رافسون برای معادلات Q-H است [۱۰]. در بخش قبل به لحاظ نظری ثابت شد که روش خطی سازی چند مرحله‌ای زمان کمتری نسبت به روش‌های سکانت و نیوتن-رافسون برای رسیدن به همگرایی صرف می‌کند. در این بخش کارایی این روش به لحاظ عملی در مقایسه با روش‌های مذکور و روش گرادیان سراسری در چند شبکه کوچک و بزرگ با و بدون پمپ بررسی می‌شود.



شکل ۳- شبکه‌ی حلقوی مورد مطالعه مثال ۱

### مثال عددی ۱

شبکه شکل (۳) با ۵ گره و ۷ لوله را در نظر بگیرید. ضریب مقاومت برای هر لوله R و دبی برداشت از هر گره q در جدول (۱) نشان داده شده است. گره صفر مخزن ذخیره‌ای با هد ۱۰۰ متر است که دبی ۱۰۰۰ لیتر بر ثانیه را وارد شبکه می‌کند [۱۰]. پس از تحلیل هیدرولیکی مقادیر نهایی دبی لوله‌ها Q و هد گره‌ها H نیز در همان جدول درج شده‌اند.

این مسئله با چهار روش نیوتن-رافسون، سکانت، گرادیان سراسری و خطی سازی چند مرحله‌ای حل می‌شود. محاسبات با ارضای شرط  $\|\epsilon\| \leq 1.e-6$  خاتمه پیدا می‌کند.  $\|\epsilon\|$  نرم باقیمانده یا قدر مطلق حداکثر اختلاف بین دبی‌های هر لوله در دو گام متوالی محاسباتی است. در این مثال  $Q_{max}$  برابر جمع دبی ورودی به لوله‌ها (۱۰۰۰ لیتر بر ثانیه) فرض می‌شود. در جدول (۲) تعداد تکرار و زمان همگرایی برای سه حدس اولیه مختلف  $Q=Q_{max}$ ،  $Q=0.1Q_{max}$  و  $Q=0$  در روش‌های نیوتن-رافسون و سکانت درج شده است. ضرایب توابع غیر خطی در روش خطی سازی چند مرحله‌ای با فرض  $Q=Q_{max}$  انتخاب می‌شود. برای زمان همگرایی از واحد "فلاپس" استفاده می‌شود. فلاپس به معنی عملیات شناور هر نقطه در ثانیه و مقیاسی برای سنجش کارایی پردازشگر رایانه است. نهایتاً هر چهار روش به ازای کلیه حدس‌های اولیه همگرا می‌شوند. انتخاب حدس اولیه مناسب

جدول ۱- اطلاعات شبکه‌ی آبرسانی مربوط به مثال ۱

شماره لوله	دبی (l/s)	R
۱	۸۰۰	۱/۵۶۲۵
۲	۲۰۰	۵۰
۳	۱۰۰	۱۰۰
۴	۴۰۰	۱۲/۵
۵	۲۰۰	۷۵
۶	۱۰۰	۲۰۰
۷	۱۰۰	۱۰۰
شماره گره	تقاضا (l/s)	هد (m)
۰	۱۰۰۰-	۱۰۰
۱	۱۰۰	۹۹
۲	۲۰۰	۹۸
۳	۳۰۰	۹۷
۴	۴۰۰	۹۶

### ۶- ارزیابی روش‌های مختلف تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله‌ها

روش وود و فانک که در نرم افزار تجاری KYPIPE به کار برده می‌شود، همان روش نیوتن-رافسون برای حل معادلات Q است [۸] روش گرادیان سراسری که در نرم

جدول ۲- روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۱

حدهس اولیه	°	نیوتن-	سکانت	نیوتن-	سکانت	نیوتن-	سکانت	گرادیان سراسری	Q <sub>max</sub>
روش تحلیل	نیوتن-	نیوتن-	نیوتن-	نیوتن-	نیوتن-	نیوتن-	نیوتن-	گرادیان سراسری	خطی سازی
تعداد تکرار	۶	۱۸	۷	۱۸	۷	۱۸	۶	چند مرحله ای	۶
فلاپس	۱۵۹۸۴	۵۵۲۷۲	۱۸۷۶۷	۵۵۲۲۷	۱۸۷۶۷	۵۵۲۲۷	۴۳۰۴	۲۰۱۴۳	۴۳۰۴



شکل ۴- مقایسه روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۱

شیر و یک کنتور نشان داده شده است. مشخصات هیدرولیکی مسئله در شکل مذکور و جدول (۳) درج شده است [۱۶]. ضرایب منحنی مشخصه ی پمپ با معادله  $hp = AQ^2 + BQ + C$  (که در آنجا  $Q[m^3/s]$  و  $h_p[m]$ ) به شرح زیر است:

پمپ ۱  $A_1 = 0 - 2220, B_1 = 44.4, C_1 = -12.28$

پمپ ۲  $A_2 = -55.6, B_2 = 1.667, C_2 = 4.1$

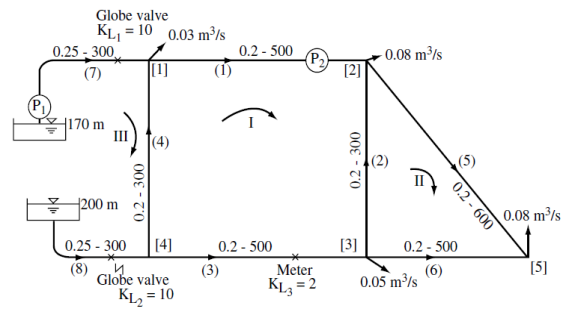
حدهس اولیه برای هر سه روش یکسان و برابر جمع دبی ورودی به لوله ها،  $Q_{max}$ ، در نظر گرفته شده است. زمان و روند همگرایی سه روش گرادیان سراسری، نیوتن-رافسون و خطی سازی چند مرحله ای در شکل های (۶) و (۷) نمایش داده شده است. زمان همگرایی روش خطی سازی چند مرحله ای از دو روش دیگر بسیار کمتر است. روش خطی سازی چند مرحله ای بسیار سریع تر از دو روش دیگر

در تعداد تکرار و زمان همگرایی روش های نیوتن-رافسون و سکانت تا حدی موثر است. زمان همگرایی روش خطی سازی چند مرحله ای بسیار کوتاه تر از سه روش دیگر است. در شکل (۴) روند همگرایی سه روش به ازای حدهس اولیه  $Q_{max}$  ترسیم شده است. شیب همگرایی روش خطی سازی چند مرحله ای از همان ابتدا بسیار تندتر از سه روش دیگر است. شیب همگرایی روش سکانت بسیار کند و همراه با نوسانات متعدد است. شیب همگرایی روش های نیوتن-رافسون و گرادیان سراسری به شرط رسیدن به محدوده ی جواب، مشابه روش خطی سازی چند مرحله ای است. در این مثال روش گرادیان سراسری سریع تر از روش نیوتن-رافسون به جواب همگرا می شود.

## مثال عددی ۲

در این مثال یک شبکه ی حلقوی با شیر، پمپ و مخزن مطالعه می شود. در شکل (۵) شبکه ای با ۸ لوله، ۲ پمپ، ۲ مخزن، ۲

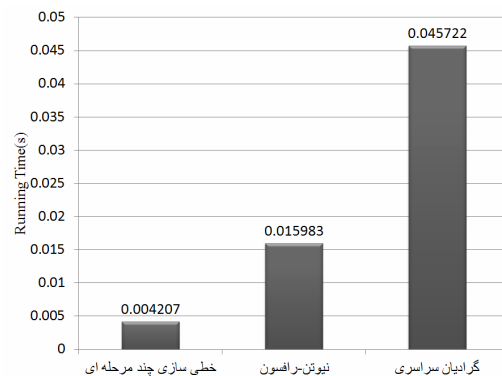




شکل ۵- شبکه‌ی حلقوی شامل پمپ، شیر و دو مخزن

جدول ۳- ضریب مقاومت لوله‌ها و توان دبی در معادله افت هیزن-ویلیامز

شماره لوله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$R(m^{-5}s)$	۱۱۶۰	۶۱۳	۱۱۶۰	۶۹۰	۱۲۹۲	۱۱۱۵	۳۲۲	۲۳۹
n	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲	۱/۸۵۲



شکل ۷- مقایسه روند همگرایی روش‌های مختلف در مثال ۲ (در شکل ۷ روند همگرایی روش گرایان سراسری و نیوتن-رافسون بر هم منطبق است)

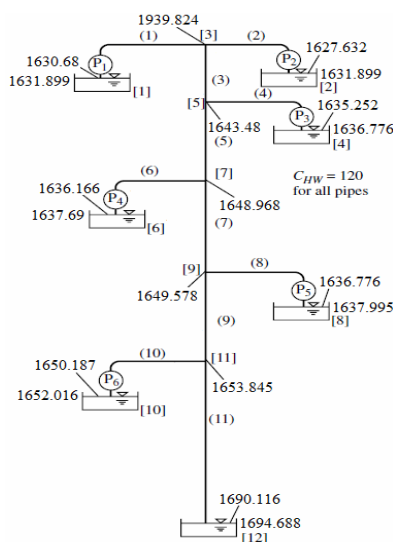
شکل ۶- زمان همگرایی روش‌های مختلف در مثال ۲

منطبق‌اند.

### مثال عددی ۳

در این مثال یک شبکه‌ی شاخه‌ای با مخازن متعدد و پمپ بررسی می‌شود. شبکه‌ی شکل (۸) را با ۱۱ لوله، ۶ پمپ و ۷ مخزن در نظر بگیرید. مشخصات هیدرولیکی مسئله در همین شکل و جدول (۴) نشان داده شده است [۱۶].

همگرا می‌شود. روند همگرایی روش‌های گرایان سراسری و نیوتن-رافسون یکسان و شیب همگرایی آن‌ها پس از رسیدن به محدوده‌ی جواب، مشابه شیب روش خطی‌سازی چند مرحله‌ای است. روش خطی‌سازی چند مرحله‌ای پس از ۶ تکرار و دو روش دیگر پس از ۱۲ تکرار به دقت ۶-۱۵ می‌رسند. در شکل (۷) روند همگرایی روش گرایان سراسری و نیوتن-رافسون بر هم



شکل ۸- شبکه‌ی شاخه‌ای با مخزن مثال ۳

جدول ۴- اطلاعات شبکه‌ی آبرسانی مثال ۳

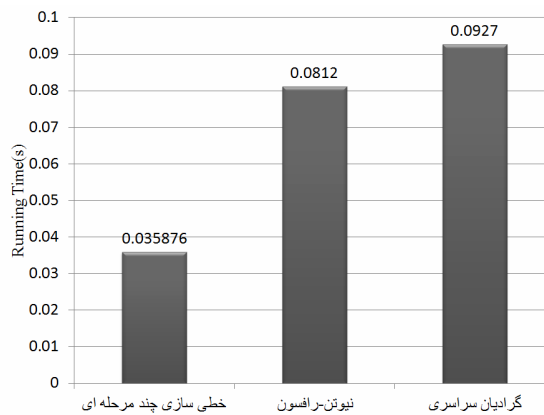
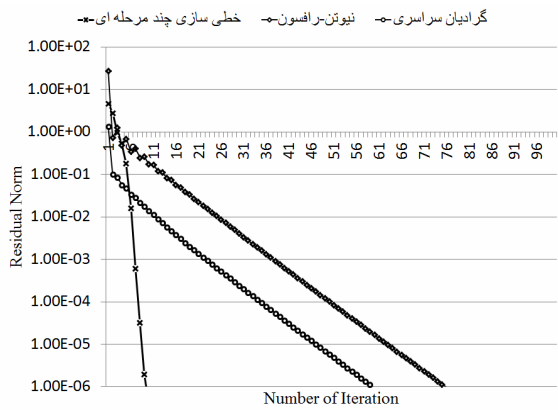
شماره لوله	قطر (میلیمتر)	طول (متر)	دبی (متر مکعب بر ثانیه)
۱	۲۰۳/۲	۵۰۹/۰۱۶	۰/۰۶۲
۲	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۲
۳	۳۰۴/۸	۷۹۲/۴۸	۰/۱۲۴
۴	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۳
۵	۳۵۵/۶	۵۶۶/۹۲۸	۰/۱۸۷
۶	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۴
۷	۴۰۶/۴	۷۱۳/۲۳۲	۰/۲۵۱
۸	۲۰۳/۲	۳۶۵/۷۶	۰/۰۶۶
۹	۴۵۷/۲	۵۶۰/۸۳۲	۰/۳۱۷
۱۰	۲۰۳/۲	۷۶۲	۰/۰۶۲
۱۱	۴۵۷/۲	۱۳۷۱/۶	۰/۳۷۸

از ۱۰ تکرار و روش‌های نیوتن-رافسون و گرادیان سراسری به ترتیب پس از ۷۶ و ۶۰ تکرار به به دقت ۶-۱۰<sup>۵</sup> می‌رسند.

#### مثال عددی ۴

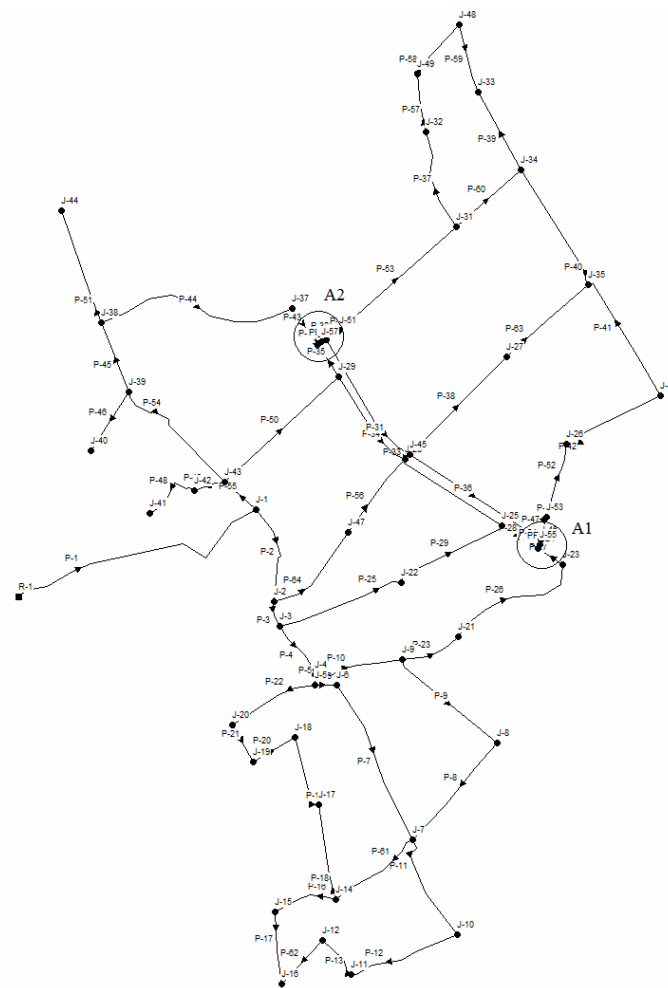
در این مثال شبکه‌ی آبرسانی شهر فرهادگرد در نزدیکی

زمان و روند همگرایی سه روش گرادیان سراسری، نیوتن-رافسون و خطی سازی چندمرحله‌ای در شکل‌های (۹) و (۱۰) نمایش داده شده است. شیب همگرایی روش خطی سازی بسیار تند تر از دو روش دیگر است و در نتیجه زمان همگرایی آن به مراتب کوتاه‌تر می‌شود. روش خطی سازی چند مرحله‌ای پس



شکل ۱۰- مقایسه روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۳

شکل ۹- زمان همگرایی روش های مختلف در مثال ۳



شکل ۱۱- شبکه‌ی آبرسانی شهر فرهادگرد

جدول ۵- تقاضا و ارتفاع گره‌ها در مثال ۴

گره	ارتفاع متر	تقاضا لیتر بر ثانیه	گره	ارتفاع متر	تقاضا لیتر بر ثانیه	گره	ارتفاع متر	تقاضا لیتر بر ثانیه
۱	۴۷۹	۲/۱۰	۲۰	۴۷۲	۱/۳۱	۳۹	۴۷۲/۷	۰/۹۸
۲	۴۶۸/۷	۳/۳۳	۲۱	۴۵۶/۲	۰/۶۹	۴۰	۴۷۸/۷	۰/۹۵
۳	۴۶۶/۵	۱/۴۲	۲۲	۴۵۸/۳	۱/۲۹	۴۱	۴۸۶	۱/۰
۴	۴۶۷/۱	۰/۵۶	۲۳	۴۴۶/۳	۰/۸۱	۴۲	۴۷۷/۵	۰/۳۸
۵	۴۶۹	۰/۱۶	۲۴	۴۴۰	۰/۵۷	۴۳	۴۷۳/۳	۰/۷۱
۶	۴۶۷/۳	۱/۲۳	۲۵	۴۴۵/۴	۱/۵۲	۴۴	۴۷۱/۴	۲/۱۰
۷	۴۶۹/۲	۲/۴۷	۲۶	۴۳۸	۲/۷۷	۴۵	۴۵۴/۵	۰/۱۰
۸	۴۶۰/۵	۰/۳۹	۲۷	۴۴۱	۲/۰۱	۴۶	۴۴۰	۰/۰
۹	۴۶۱/۳	۴/۵۴	۲۸	۴۵۴/۵	۰/۹۲	۴۷	۴۶۲/۸	۳/۵۹
۱۰	۴۶۵/۴	۰/۹۸	۲۹	۴۵۸	۱/۰۳	۴۸	۴۳۱/۸	۰/۱۶
۱۱	۴۷۶/۳	۰/۴۶	۳۰	۴۵۵/۸	۱/۲۴	۴۹	۴۳۱/۲	۰/۳۱
۱۲	۴۷۷	۰/۶۹	۳۱	۴۳۷	۱/۴۵	۵۰	۴۵۵/۸	۰/۰
۱۳	۴۵۵/۸	۰/۰	۳۲	۴۳۴/۶	۱/۰	۵۱	۴۵۵/۸	۰/۰
۱۴	۴۷۲/۵	۰/۱۶	۳۳	۴۳۰	۱/۳۰	۵۲	۴۴۰	۰/۰
۱۵	۴۷۸/۷	۰/۶۷	۳۴	۴۳۹/۴	۰/۴۰	۵۳	۴۴۰	۰/۰
۱۶	۴۷۸/۵	۰/۵۶	۳۵	۴۳۳/۳	۱/۶/۳۱	۵۴	۴۴۰	۰/۰
۱۷	۴۷۵/۵	۴/۷۵	۳۶	۴۳۷	۱/۱	۵۵	۴۴۰	۰/۰
۱۸	۴۷۵	۰/۲۱	۳۷	۴۵۵/۶	۰/۵۶	۵۶	۴۵۵/۸	۰/۰
۱۹	۴۸۰	۰/۳۲	۳۸	۴۶۸/۵	۱۰/۳۲	۵۷	۴۵۵/۸	۰/۰

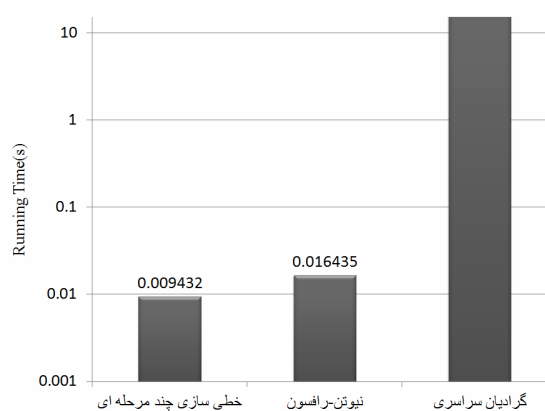
خطی سازی چند مرحله‌ای بسیار سریع به محدوده‌ی جواب نهایی نزدیک می‌شود و زمان همگرایی آن تقریباً نصف روش نیوتن-رافسون است.

#### مثال عددی ۵- شبکه‌های بزرگ آبرسانی

سری شبکه‌های حلقه‌ای با  $N \times N$  گره مطابق شکل (۱۴) را در نظر بگیرید.  $N$  برابر ۱۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ انتخاب می‌شود. حجم محاسبات با زیاد شدن  $N$  به شدت افزایش می‌یابد. مقدار تقاضا در هر گره به‌طور تصادفی انتخاب شده است. برای تحلیل شبکه‌های مذکور از روش‌های خطی سازی چند مرحله‌ای، گرادیان سراسری و نیوتن-رافسون استفاده می‌شود.

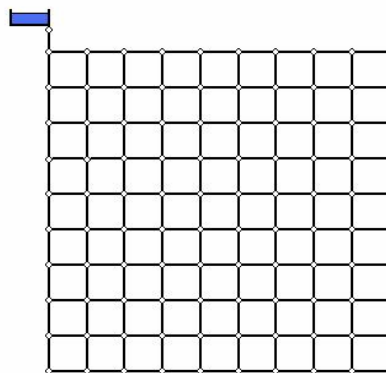
مشهد تحلیل می‌شود. در شکل (۱۱) این شبکه آبرسانی با ۶۶ لوله، ۵۷ گره و دو شیر سوزنی با ضریب افت ۱۰ نشان داده شده است. شیرهای قطع و وصل در نواحی  $A1$  و  $A2$  قرار دارند. مشخصات هندسی لوله‌ها در جدول (۴) و ارتفاع و تقاضای مصرف در گره‌ها در جدول (۵) داده شده است.

زمان و روند همگرایی سه روش گرادیان سراسری، نیوتن-رافسون و خطی‌سازی چند مرحله‌ای در شکل‌های (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده است. در این مثال روش گرادیان سراسری با دقت مطلوب همگرا نمی‌شود ولی روش‌های خطی‌سازی چند مرحله‌ای و نیوتن-رافسون به ترتیب پس از ۴ و ۱۰ تکرار به همگرایی با دقت  $10^{-6}$  می‌رسند. روش



شکل ۱۳- مقایسه روند همگرایی روش های مختلف در مثال ۴

شکل ۱۲- زمان همگرایی روش های مختلف در مثال ۴



شکل ۱۴- شبکه ی  $N \times N$



شکل ۱۵- مقایسه روند همگرایی در شبکه ی  $50 \times 50$

جدول ۶- مقایسه تعداد تکرار و زمان همگرایی در سری شبکه‌های مثال ۵ در حالت بدون پمپ

خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۱۰ × ۱۰
تعداد تکرار	۵	۵	۴
زمان همگرایی (ثانیه)	۰/۲۳۳	۰/۰۴۶	۰/۰۳۵
خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۵۰ × ۵۰
تعداد تکرار	۶	۶	۵
زمان همگرایی (ثانیه)	۳/۹۵	۱/۰۵	۰/۷۸
خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۱۰۰ × ۱۰۰
تعداد تکرار	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	۶	۵
زمان همگرایی (ثانیه)	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	۸/۳۵	۶/۲۳
خطی سازی چند مرحله‌ای	گرادیان سراسری	نیوتن- رافسون	۲۰۰ × ۲۰۰
تعداد تکرار	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	۶	۵
زمان همگرایی (ثانیه)	بادقت مطلوب همگرا نمی‌شود	۱۰۳/۰۳	۷۷/۴۲

روش دیگر همگرا می‌شود. روش گرادیان سراسری در اطراف نُرم باقیمانده ۷- ۱e نوسان می‌کند. با افزایش اندازه شبکه نُرم باقیمانده بزرگ‌تر می‌شود تا حدی که در شبکه‌های بزرگ ۱۰۰×۱۰۰ و ۲۰۰×۲۰۰ به دقت مطلوب همگرا نمی‌شود.

#### ۷- نتیجه‌گیری

الگوریتم جدیدی با عنوان روش خطی سازی چند مرحله‌ای برای تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های آبرسانی معرفی شد. در این روش توابع غیر خطی معادلات انرژی خطی سازی می‌شوند. سیستم معادلات خطی پیوستگی و خطی سازی شده انرژی حل می‌شوند. در مرحله بعد عملیات خطی سازی توابع در اطراف جواب حاصله انجام می‌شود. خطی سازی تا همگرایی به دقت

حدس اولیه دبی در لوله‌ها برابر حداکثر دبی فرض می‌شود. زمان محاسبات با ارضای شرط  $\|e\| \leq 1.e-6$  به دست می‌آید.

در جدول (۶) تعداد تکرار و زمان همگرایی (ثانیه) سه روش خطی سازی چند مرحله‌ای، گرادیان سراسری و نیوتن- رافسون برای شبکه‌های مختلف مقایسه شده است. زمان همگرایی روش خطی سازی چند مرحله‌ای در کلیه حالات کمتر از دو روش دیگر است. تعداد تکرار با افزایش اندازه شبکه تغییر چندانی نمی‌کند. در شکل (۱۵) نُرم باقیمانده بر حسب تعداد تکرار در شبکه ۵۰×۵۰ ترسیم شده است. شیب همگرایی هر سه روش یکسان است اما روش خطی سازی چند مرحله‌ای سریع‌تر از دو

همگرایی روش خطی سازی چند مرحله‌ای بسیار تند است و نوسانات در مجاورت نَرم باقیمانده بسیار کوچکی صورت می‌گیرد. در نتیجه می‌تواند به عنوان یک روش قوی در تحلیل شبکه مورد استفاده قرار بگیرد.

مناسب ادامه پیدا می‌کند. کاربرد این روش در مثال‌های متنوع ارائه شده در این مقاله بر حسب معادلات Q برتری آن را نسبت به روش‌های متداول نیوتن-رافسون، گرادینان سراسری و سکانت مشخص می‌کند. حجم محاسبات و تعداد تکرار کم‌تر موجب همگرایی سریع‌تر به جواب می‌شود. شیب

## واژه‌نامه

1. global gradient algorithm

2. multi-stage linearization method

## مراجع

1. Bhawe, P. R., and Gupta, R., *Analysis of Water Distribution Networks*, Oxford, U.K. ISBN: 978-81-7319-778-9, 2006.
2. Cross, H., "Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors", in No. 286, University of Illinois, Engineering Experimental Station, Urbana, Illinois, Bulletin, 1936.
3. Martin, D. W., and Peters, G., "The Application of Newton's Method to Network Analysis by Digital Computer", *Journal of Institution of Water Engineers and Scientists*, Vol. 115, 1963.
4. Liu, K. T. H. "The Numerical Analysis of Water Supply Networks by Digital Computers", *Proc. 13-th Congress of IAHR*, Vol. 1, Subject A, 25-42. 1969.
5. Wood, D. J., and Charles, C. O. A., "Hydraulic Network Analysis Using Linear theory", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 98, No. HY7, pp. 1157-1170, 1972.
6. Wood, D. J., and Charles, C. O. A., "Closure to Discussions to Wood and Charles (1972): Hydraulic Network Analysis Using Linear theory", *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 99, No. HY11, pp. 21-29, 1973.
7. Wood, D. J., and Funk, J. E., "Hydraulic Analysis of Water Distribution Systems", in *International Course on Water Supply Systems*, Valencia, Spain. 1993.
8. Ellis, D. J., and Simpson, A. R., "Convergence of Iterative Solvers for the Simulation of a Water Distribution Pipe Network", in Research Report No. R138, Department of Civil and Environmental Engineering, The University of Adelaide. 1996.
9. Isaacs, L. T., and Mills, K. G., "Linear Theory Methods for Pipe Network Analysis", *Journal of Hydraulics Division, ASCE*, Vol. 106 (HY7), pp. 1191-1201. 1980.
10. Todini, E., "On the Convergence Properties of the Different Pipe Network Algorithms", *8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium, Cincinnati, Ohio, USA*. 2006.
11. Basha, H. A., and Kassab, B. G., "A Perturbation Solution to the Transient Flow Problem", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 34, pp. 633. 1996.
12. Jakobus, E., Kumar, P. and Gupta, M. "Two-Point Linearization Method for the Analysis of Pipe Networks", *J. Hydraulic Eng.*, Vol. 134, pp. 1176 2008.
13. Spiliotis, M., and Tsakiris, G., "Water Distribution System Analysis: The Newton - Raphson Method Revisited", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 2010.
14. Swamee, P. K., and Sharma, A. K., *Design of Water Supply Pipe Networks*, Wiley, New Jersey, 2008.
15. Kaw, A. K., and Kalu, E. E., *Numerical Methods with Applications*, 2<sup>nd</sup> edition, 2011.
16. Larock, B. E., Jeppson, R. W., and Watters, G. Z. *Hydraulics of Pipeline Systems*, Boca Raton London New York Washington, D.C, 2000.