

حل تحلیلی ارتعاشات عرضی یک تیر اویلر- برنولی کامپوزیتی با چندین جرم متمرکز

احمدرضا قاسمی*، کیوان ترابی و بیژن حیدری شیبانی
گروه طراحی جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۱۰/۲۵ - دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۱۱/۲۸)

چکیده - در این تحقیق، ارتعاشات عرضی یک تیر کامپوزیت با در نظر گرفتن تعداد دلخواه جرم متمرکز بر روی آن، به صورت تحلیلی، مطالعه و ارزیابی شده است. از آنجایی که در تیرهای کامپوزیت ارتعاشات عرضی و پیچشی به یکدیگر وابسته می‌باشند، ارتعاشات پیچشی بر رفتار ارتعاشی عرضی اینگونه تیرها بسیار مؤثر است. در این تحقیق وجود جرم‌های متمرکز در تیر کامپوزیتی با چیدمان متعامد، به وسیله توابع دلتای دیراک مدل شده و روابط حاصل با در نظر گرفتن تعداد، موقعیت و اندازه جرم متمرکز بر روی تیر کامپوزیت توسعه داده شده است. بر این اساس معادله دینامیک تیر با استفاده از روش توابع پایه حل شده و توسط توابع پایه در حضور جرم متمرکز توسعه یافته است. پس از آن معادله فرکانسی و شکل مودها برای شرایط مرزی دو سر لولا و یکسر گیردار به دست آمده است. در پایان برای شرایط مرزی مختلف تأثیر مقدار، موقعیت و تعداد جرم بر روی فرکانس‌ها و مودشپها مطالعه شده است و نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج دیگر محققان مقایسه و ارزیابی شده است.

واژگان کلیدی: ارتعاشات عرضی، تیر کامپوزیت، جرم متمرکز، تیر اویلر برنولی، حل دقیق، تابع دلتای دیراک.

Analytical Solution for Transverse Vibration of a Composite Euler-Bernoulli Beam Including Several Concentrated Masses

A. R. Ghasemi, K. Torabi and B. Heidari-Shibani

Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan

Abstract: *Transverse vibration of a composite Euler-Bernoulli beam with any arbitrary concentrated masses is developed and analytically solved in this paper. First, dynamic governing equations of a cross-ply beam with taking into account of number, location and amount of concentrated masses as well as the effects of torsional behavior of composite layup (due to bending-twisting coupling) are derived. Concentrated masses are modeled by delta Dirac function. Then, the governing equations are solved for two different boundary conditions (simply-supported, clamped-free) to obtain frequency response and mode shapes. The results of the developed model are validated by the available analytical results in the literature. Thus, the effects of number, location and amount of concentrated masses on the torsional-bending vibration of a composite beam can be investigated.*

*: مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: ghasemi@kashanu.ac.ir

Keywords: Free vibration, composite beam, concentrated mass, Euler-Bernoulli model, exact solution, Dirac's function.

فهرست علائم

نیروی عرضی بر واحد طول تیر	q	آرایه‌های توابع پایه عمومی	A_i
آرایه‌های سفتی ماده ارتوتروپ	Q_{ij}	پهنای تیر	b
نیروی برشی	S	عملگر دیفرانسیل بی‌بعد	D
زمان	t	تانسور سختی خمشی کامپوزیت	D_{ij}
گشتاور پیچشی	T	مدول طولی ماده ارتوتروپ	E_{11}
موقعیت	x	مدول عرضی ماده ارتوتروپ	E_{22}
جابه‌جایی عرضی	y	سختی خمشی	EI
مشتق دوم جابه‌جایی	y''	توابع پایه مختصات هندسی	g_i
جابه‌جایی	W	توابع پایه عمومی	\bar{g}_i
شیب	W'	مدول برشی ماده ارتوتروپ	G_{12}
ریشه‌های معادله فرکانسی	α, β, γ	سختی پیچشی	GJ
نسبت جرم متمرکز به جرم تیر	α_i	ضخامت تیر	h
تابع دلتای دیراک	δ	توابع پایه مختصات فیزیکی	H_i
زاویه پیچش	ϕ	ممان جرمی	I_α
مشتق اول زاویه پیچش	ϕ'	سختی کوپل	k
موقعیت بی‌بعد	η	طول تیر	L
چگالی تیر	ρ	جرم تیر	m
ضریب پواسون اصلی ماده ارتوتروپ	ν_{12}	گسترش جرم متمرکز	m_i
فرکانس طبیعی	ω	گشتاور خمشی	M
نسبت موقعیت جرم به طول تیر	ζ_i	تعداد جرم متمرکز	N

۱- مقدمه

متمرکز طراحی چرخنده، پولی، چرخ زنجیر، کوپلینگ و از این قبیل قطعات مکانیکی بر روی یک محور می‌باشد. وجود متعلقاتی مانند موتور و سایر تجهیزاتی که بر روی بال هواپیما نصب می‌شوند، نمونه‌ای دیگر از کاربرد این مدل‌سازی است. مسئله ارتعاشات عرضی تیرها با حضور جرم متمرکز واقع بر آن مورد توجه محققان زیادی بوده است. از طرف دیگر در کاربردهای نو به‌خصوص در علم هوافضا، کاربرد مواد مرکب به‌سبب ویژگی‌های خاص این مواد، جایگاه ویژه‌ای یافته است. کاربرد عملی کامپوزیت‌ها را در ملخ و هاب هلیکوپتر، بال

یکی از مسائل بسیار مهم در صنایع و ماشین‌آلات صنعتی، عوامل ناخواسته در ایجاد ارتعاشات از جمله ارتعاشات عرضی است. وجود عواملی نظیر نامیزانی در ساخت و نصب دستگاه‌ها سبب ایجاد ارتعاشات عرضی ناخواسته می‌شود. وجود ناپیوستگی‌های فیزیکی همواره مسئله مورد توجه محققان علم ارتعاشات بوده است. جرم‌های متمرکز بر روی سازه، ایجاد ترک بر روی سازه‌ها، وجود پله بر روی یک تیر و ناخالصی‌ها را می‌توان از این دسته به‌حساب آورد. نمونه بارزی از جرم‌های

معادله حاکم بر حرکت تیر را با فرض وابسته بودن خمش و پیچش ارائه نمودند. بنرجی [۱۱] به مطالعه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر یک‌سر درگیر متقارن لایه‌ای پرداخت. گوتا و همکاران در سال‌های اخیر [۱۲] ارتعاشات عرضی محورهای کامپوزیتی دو تکه با شرایط مرزی مختلف را مطالعه نمودند. متأسفانه هیچ تحقیقی برای ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیت همراه جرم متمرکز توسط مؤلفین این تحقیق یافت نشد. در این تحقیق به مطالعه ارتعاشات عرضی یک تیر کامپوزیت با چیدمان متعامد و وجود جرم متمرکز پرداخته شده است. در مدل‌سازی تیر از مدل تیر اوپلر-برنولی استفاده شده است و معادله فرکانسی و مودشپ‌ها برای شرایط مرزی دو سر لولا و یک‌سر گیردار به دست آمده است. سپس تأثیر مقدار جرم متمرکز، موقعیت و تعداد آن بر روی فرکانس‌ها و شکل مودها برای شرایط مرزی مختلف مطالعه گردیده است.

۲- مدل‌سازی رفتار دینامیکی تیر

یک تیر کامپوزیتی را به شکل یک تیر ساده در نظر بگیرید. ارتباط بین گشتاور خمشی و ممان‌های پیچشی با جابه‌جایی عرضی و زاویه پیچش تیر با روابط زیر بیان می‌شود [۱۰]:

$$\begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & -k \\ -k & GJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ \phi' \end{bmatrix}$$

$$EI = D_{22} - \frac{D_{12}^2}{D_{11}}, \quad k = 2(D_{26} - \frac{D_{12}D_{16}}{D_{11}})$$

$$GJ = 4(D_{66} - \frac{D_{16}^2}{D_{11}}), \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} y^2 dy \quad (1)$$

و روابط حاکم بر رفتار دینامیکی تیر اوپلر-برنولی رامی توان به شکل زیر بیان نمود [۱۱]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - k \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2-الف)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - I_\alpha \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2-ب)$$

این معادلات در چند لایه‌های کامپوزیتی که از لایه‌های ارتوتروپیک با زوایای مختلف تشکیل شده‌اند، به یکدیگر کوپل

هواپیما و پره توربین‌ها می‌توان مشاهده نمود. لورا و همکاران [۱] فرکانس‌های طبیعی و مودشپ‌های تیر یک‌سر درگیر همگن با یک جرم متمرکز در انتها را مورد مطالعه قرار دادند. آنها جواب‌های دقیقی برای نسبت‌های مختلف جرم متمرکز و با استفاده از مدل تیر اوپلر-برنولی به دست آوردند. گل [۲] به مطالعه ارتعاشات تیر با یک جرم متمرکز در مکان دلخواه و با تکیه‌گاه مقاوم در برابر چرخش با استفاده از مدل اوپلر-برنولی و تبدیل لاپلاس پرداخته است. وی به تأثیر نسبت جرم متمرکز به جرم تیر، سختی فنرهای دو سر تیر به سختی تیر و مکان جرم متمرکز بر روی تیر در تحلیل فرکانس‌های طبیعی تیر توجه نموده است. پارنل و همکارانش [۳] به بررسی ارتعاشات یک تیر اوپلر-برنولی یک سر درگیر با یک جرم متمرکز در انتهای دیگر آن پرداخته‌اند. تحلیل آنها برای یک تیر با سطح مقطع ثابت اما بار گسترده شرایط مرزی و شرایط اولیه متغیر بوده است. لورا و همکارش [۴] بار دیگر به بررسی ارتعاشات تیر یک سر درگیر با تکیه‌گاه الاستیک و سطح مقطع متغیر که یک جرم متمرکز بر روی آن قرار گرفته پرداختند و برای حل این مسئله از روش تقریبی رایلی - اشمیت استفاده نمودند. لیو و همکارش [۵] ارتعاشات آزاد یک تیر اوپلر با دو جرم متمرکز یکی در وسط تیر و دیگری در انتهای آزاد، تحت شرایط مرزی یک سر درگیر با تکیه‌گاه الاستیک را بررسی نمودند. لاو [۶] با استفاده از مدل تیر اوپلر-برنولی و روش تقریبی رایلی به مطالعه ارتعاشات عرضی و فرکانس‌های طبیعی تیر و یک جرم متمرکز پرداخته است. یامان [۷] با استفاده از روش المان محدود به تحلیل تیر یک سر درگیر به همراه یک جرم متمرکز در انتهای آزاد تیر پرداخته است. استفاده از نظریه تیر اوپلر-برنولی و حل دقیق تیر با اجرام متمرکز محدود بر روی آن و با در نظر گرفتن اینرسی پیچشی جرم‌ها تحقیقی است که به وسیله مایز و همکاران [۸] انجام شده است. بررسی ارتعاشات آزاد تیر مخروطی و یک سر درگیر با تکیه‌گاه الاستیک و دارای یک جرم متمرکز به همراه دمپر ویسکوز از جمله مطالعاتی است که دروسا و همکاران [۹] انجام داده‌اند. ویشار و فویست [۱۰]

روش توابع پایه و براساس ترکیب خطی از پایه‌های فضای برداری معادله، تحلیل ارتعاشات و جواب معادله حاصل می‌شود. علت استفاده از توابع پایه توسعه این روش هنگام وجود جرم متمرکز بر روی تیر کامپوزیت و ساده‌سازی روابط می‌باشد. در حالت کلی رابطه نهایی هنگام حل دقیق ارتعاشات یک تیر کامپوزیت مدل اویلر، یک دترمینان از مرتبه شش می‌باشد. برای سهولت در اعمال شرایط مرزی استاندارد معمولاً از توابع پایه استفاده می‌شود. از دیگر مزایای استفاده از توابع پایه، کاهش مرتبه دترمینان نهایی به نصف بوده و ترسیم شکل مودها نیز در این وضعیت به راحتی امکان پذیر است. پاسخ معادله (۵) را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت [۱۱]:

$$W = d_1 \cosh \alpha \zeta + d_2 \sinh \alpha \zeta + d_3 \cos \beta \zeta + d_4 \sin \beta \zeta + d_5 \cos \gamma \zeta + d_6 \sin \gamma \zeta \quad (6)$$

که در آن α ، β و γ ریشه‌های معادله فرکانسی (۵) می‌باشند. از آنجا که ضرایب فرد معادله مشخصه (۵) صفر است، سه ریشه دیگر معادله فرینه این سه ریشه هستند. فضای حل W براساس توابع پایه $\bar{g}_i(\zeta)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(\zeta) @ \cosh \alpha \zeta & \quad \bar{g}_2(\zeta) @ \sinh \alpha \zeta \\ \bar{g}_3(\zeta) @ \cos \beta \zeta & \quad \bar{g}_4(\zeta) @ \sin \beta \zeta \\ \bar{g}_5(\zeta) @ \cos \gamma \zeta & \quad \bar{g}_6(\zeta) @ \sin \gamma \zeta \end{aligned} \quad (7)$$

در این قسمت با تغییر فضای پایه، فضای حل مسئله برای توابع $\bar{g}_i(\zeta)$ حاصل می‌شود. انتخاب این مبنا برای ساده‌سازی شرایط مرزی استاندارد انجام می‌شود. بنابراین:

$$W(\zeta) = e_1 \bar{g}_1(\zeta) + e_2 \bar{g}_2(\zeta) + e_3 \bar{g}_3(\zeta) + e_4 \bar{g}_4(\zeta) + e_5 \bar{g}_5(\zeta) + e_6 \bar{g}_6(\zeta) \quad (8)$$

هنگام حل دقیق این معادله ماتریس تبدیل $[A]$ برای انتقال میناها، از رابطه (۹) به دست می‌آید:

شده است، درحالی‌که برای مواد همگن این معادلات مستقل از یکدیگر بوده و تحلیل آنها بسیار ساده‌تر است. با استفاده از روش جداسازی متغیرها و پذیرش هارمونیک بودن تابع زمان به دلیل خصوصیات فیزیکی ارتعاشات عرضی تیر و نیز حل سنکرون برای ارتعاشات پیچشی [۱۱]، می‌توان از روابط (۳) استفاده نمود:

$$y(x, t) = Y(x) e^{i\omega t} \quad (3-الف)$$

$$\phi(x, t) = \Phi(x) e^{i\omega t} \quad (3-ب)$$

با جای‌گذاری روابط (۳) در معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم، معادلات دیفرانسیل متغیر نسبت به مکان زیر به دست می‌آیند:

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} - k \frac{d^3 \Phi}{dx^3} - m\omega^2 Y = 0 \quad (4-الف)$$

$$GJ \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - k \frac{d^3 Y}{dx^3} + I_\alpha \omega^2 \Phi = 0 \quad (4-ب)$$

۳- تحلیل معادله دیفرانسیل حاکم یک تیر کامپوزیت بدون جرم متمرکز

برای تحلیل معادلات دیفرانسیل حاکم با توجه به تأثیر پارامترهای فیزیکی متنوع، می‌بایست عملیات بدون بعدسازی بر روی آن انجام گیرد. بی‌بعدسازی براساس روابط زیر و با جای‌گذاری تابع نمایی عنوان جواب در معادله (۴) حاصل می‌شود [۱۱]. با حذف زاویه پیچش بین دو رابطه معادله (۴) معادله دیفرانسیل مرتبه ششم زیر به دست می‌آید:

$$(D^6 + aD^4 - bD^2 - abc)w = 0$$

$$D = \frac{1}{L} \frac{d}{d\zeta}, \quad \zeta = \frac{x}{L}, \quad w = \frac{Y}{L}, \quad a = \frac{\bar{a}}{c}, \quad b = \frac{\bar{b}}{c}$$

$$\bar{a} = I_\alpha \omega^2 \frac{L^2}{GJ}, \quad \bar{b} = m\omega^2 \frac{L^4}{EI}, \quad c = 1 - \frac{k^2}{EIGJ}$$

(۵)

دیگر محققین معادله (۵) را با روش معمول و حل دستگاه ۶ معادله، ۶ مجهول حل نموده‌اند. اما در این تحقیق با استفاده از

موجود به شکل بدون بعد در معادلات زیر بیان شده است:

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{a} \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} - \frac{b}{a} W \quad (۱۲-الف)$$

$$\frac{S}{EI} = \frac{1}{a} \frac{\partial^5 W}{\partial \zeta^5} + \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta^3} - \frac{b}{a} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \quad (۱۲-ب)$$

$$\frac{T}{EI GJ} = \frac{1}{a} \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^4} + (c-1) \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} - \frac{b}{a} W \quad (۱۲-ج)$$

$$\frac{\phi}{-EI GJ} = \frac{1}{a} \frac{\partial^5 W}{\partial \zeta^5} + (c-1) \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta^3} - \frac{b}{a} \frac{\partial W}{\partial \zeta} \quad (۱۲-د)$$

$$I_\alpha \omega^2 L^2 k$$

که مشتقات در روابط بالا، براساس متغیر ζ لحاظ شده است. بنابراین رابطه (۱۱) با استفاده از ثابت‌های فیزیکی و هندسی به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$W(\zeta) = H_1(\zeta)W(0) + H_2(\zeta)W'(0) + H_3(\zeta)M(0) + H_4(\zeta)S(0) + H_5(\zeta)\phi(0) + H_6(\zeta)T(0) \quad (۱۳)$$

که در رابطه بالا:

$$H_1 = g_1 + a_3 g_5, \quad H_2 = g_2 + a_3 g_6$$

$$H_3 = b_1 g_3 + a_1 g_5, \quad H_4 = b_1 g_4 + a_1 g_6$$

$$H_5 = b_2 g_4 + a_2 g_6, \quad H_6 = b_2 g_3 + a_2 g_5$$

$$a_1 = \frac{a(c-1)}{(c-2)}, \quad a_2 = \frac{-a}{c-2}, \quad a_3 = b$$

$$b_1 = \frac{-1}{(c-2)}, \quad b_2 = \frac{1}{c-2} \quad (۱۴)$$

با نگاهی به شکل نهایی معادله به دست آمده، اهمیت توابع پایه جدید در ساده‌سازی و اعمال شرایط مرزی استاندارد به خوبی نشان داده شده است. در تحلیل و بررسی نتایج عددی برای تیر دو سر لولا شرایط مرزی در ابتدا و انتهای تیر به شکل زیر خواهد بود:

$$\phi(0) = 0, \quad W(0) = 0, \quad M(0) = 0 \quad (۱۵)$$

$$\phi(1) = 0, \quad W(1) = 0, \quad M(1) = 0 \quad (۱۶)$$

برای شرایط مرزی رابطه (۱۵) در ابتدای تیر و موقعیت $\zeta = 0$ معادله (۱۳) به شکل ساده شده زیر بیان می‌شود:

$$A \begin{bmatrix} g_1(0) & g'_1(0) & g''_1(0) & g'''_1(0) & g^{iv}_1(0) & g^v_1(0) \\ g_2(0) & g'_2(0) & g''_2(0) & g'''_2(0) & g^{iv}_2(0) & g^v_2(0) \\ g_3(0) & g'_3(0) & g''_3(0) & g'''_3(0) & g^{iv}_3(0) & g^v_3(0) \\ g_4(0) & g'_4(0) & g''_4(0) & g'''_4(0) & g^{iv}_4(0) & g^v_4(0) \\ g_5(0) & g'_5(0) & g''_5(0) & g'''_5(0) & g^{iv}_5(0) & g^v_5(0) \\ g_6(0) & g'_6(0) & g''_6(0) & g'''_6(0) & g^{iv}_6(0) & g^v_6(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1(0) & \bar{g}'_1(0) & \bar{g}''_1(0) & \bar{g}'''_1(0) & \bar{g}^{iv}_1(0) & \bar{g}^v_1(0) \\ \bar{g}_2(0) & \bar{g}'_2(0) & \bar{g}''_2(0) & \bar{g}'''_2(0) & \bar{g}^{iv}_2(0) & \bar{g}^v_2(0) \\ \bar{g}_3(0) & \bar{g}'_3(0) & \bar{g}''_3(0) & \bar{g}'''_3(0) & \bar{g}^{iv}_3(0) & \bar{g}^v_3(0) \\ \bar{g}_4(0) & \bar{g}'_4(0) & \bar{g}''_4(0) & \bar{g}'''_4(0) & \bar{g}^{iv}_4(0) & \bar{g}^v_4(0) \\ \bar{g}_5(0) & \bar{g}'_5(0) & \bar{g}''_5(0) & \bar{g}'''_5(0) & \bar{g}^{iv}_5(0) & \bar{g}^v_5(0) \\ \bar{g}_6(0) & \bar{g}'_6(0) & \bar{g}''_6(0) & \bar{g}'''_6(0) & \bar{g}^{iv}_6(0) & \bar{g}^v_6(0) \end{bmatrix} \quad (الف-۹)$$

$$[g(\zeta)] = [A][\bar{g}(\zeta)] \quad (ب-۹)$$

و هم‌اکنون رابطه بردار توابع پایه در دو مبنا براساس ماتریس انتقال به دست آمده است.

با توجه به شرایط متداول در خواص هندسی و فیزیکی موجود در هر کدام از مرزها $\bar{g}_i(0)$ ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که سمت چپ معادله بالا با ماتریس همانی معادل گردد. در این صورت:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha^2 & 0 & \alpha^4 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha^3 & 0 & \alpha^5 \\ 1 & 0 & -\beta^2 & 0 & \beta^4 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & -\beta^3 & 0 & \beta^5 \\ 1 & 0 & -\gamma^2 & 0 & \gamma^4 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\gamma^3 & 0 & \gamma^5 \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

بنابراین پاسخ $W(\zeta)$ در معادله (۶) را می‌توان به وسیله رابطه (۱۱) جایگزین نمود:

$$W(\zeta) = g_1(\zeta)W(0) + g_2(\zeta)W'(0) + g_3(\zeta)W''(0) + g_4(\zeta)W'''(0) + g_5(\zeta)W^{iv}(0) + g_6(\zeta)W^v(0) \quad (۱۱)$$

اینک خواص هندسی و فیزیکی موجود در مرزهای تیر که شامل جابه‌جایی، شیب، زاویه پیچش، گشتاور خمشی، ممان پیچش و نیز نیروی برش می‌باشند، قابل جایگزین نمودن با مشتقات مرتبه‌های گوناگون جابه‌جایی W هستند. به این منظور روابط

مدل شده و با استفاده از روش ارائه شده، به حل معادله دیفرانسیل حاکم پرداخته شده است. برای سهولت در اعمال شرایط مرزی، از توابع پایه کمک گرفته می‌شود و آنگاه معادله فرکانسی و مودشپها، برای تیر دو سر لولا و تیر یک‌سر درگیر به دست می‌آید.

۴-۱- تأثیر جرم متمرکز بر معادلات حاکم

در شکل ۱ تیر کامپوزیت به همراه جرم‌های متمرکز متعدد بر روی آن نشان داده شده است. هرگاه جرم متمرکز M_i به صورت گسترده در طول المان dx و در فاصله x از ابتدای تیر به شکل \bar{m}_i در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$M_i = \bar{m}_i dx \quad (21)$$

که تابع توزیعی آن بر اساس تابع پله در فاصله dx بیان می‌شود و با متمرکز نمودن آن، تابع دلتای دیراک به دست می‌آید. بنابراین:

$$m_i(x) = \bar{m}_i [u(x-x_i) - u(x-x_i-dx)] \quad (22)$$

$$\lim_{dx \rightarrow 0} m_i(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{M_i}{dx} [u(x-x_i) - u(x-x_i-dx)] = M_i \delta(x-x_i) \quad (23)$$

مطابق با شکل ۲ و با اعمال قوانین نیوتن، روابط حاکم بر ارتعاشات عرضی تیر مورد نظر به شکل معادلات ۲۳- الف و ۲۳- ب برای N جرم متمرکز به دست خواهد آمد:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - k \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \rho A \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\rho A} \delta(x-x_i) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (24-الف)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - I_\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (24-ب)$$

هم‌اکنون لازم است معادله (۲۳) بر اساس روش ارائه شده در بخش قبل حل گردد. با توجه به ارتعاشات هارمونیک تیر، می‌توان با استفاده از روش جداسازی متغیرها، معادله دیفرانسیل پاره‌ای را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل نمود. با در نظر گرفتن توابع ارائه شده در رابطه (۲) و جایگزین نمودن آن در معادلات (۲۴)

$$W(\zeta) = W'(0)H_2(\zeta) + S(0)H_4(\zeta) + T(0)H_6(\zeta) \quad (17)$$

اینک با اعمال شرایط مرزی در نقطه انتهای تیر $\zeta=1$ از رابطه (۱۶)، سه معادله برحسب سه مجهول ضرایب $H_i(1)$ $i=2,4,6$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه جواب غیربدیهی صفر مورد نظر می‌باشد، بنابراین ضرایب مذکور می‌بایست مخالف صفر باشند. از اینرو دترمینال ضرایب دستگاه سه معادله، سه مجهول می‌باید صفر باشد که در این حالت معادله فرکانسی به دست می‌آید.

هم‌چنین برای تحلیل ارتعاشات تیر یک سرگیردار شرایط مرزی در ابتدا و انتهای تیر به صورت روابط (۱۸) و (۱۹) به دست آمده است:

$$\varphi(0)=0, \quad W(0)=0, \quad W'(0)=0 \quad (18)$$

$$T(1)=0, \quad S(1)=0, \quad M(1)=0 \quad (19)$$

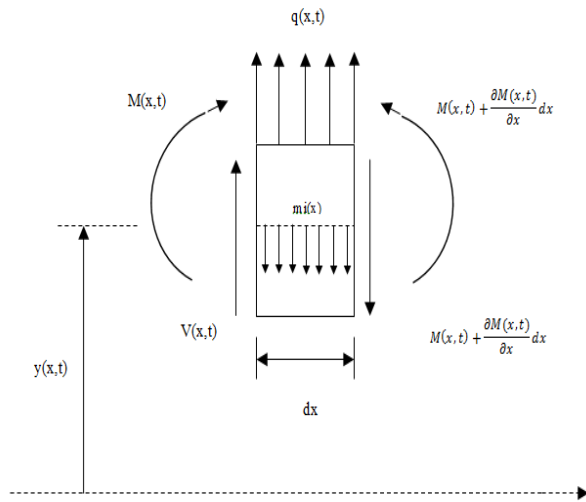
در نتیجه معادله (۱۴) به شکل ساده شده قابل بیان خواهد بود:

$$W(\zeta) = M(0)H_2(\zeta) + S(0)H_4(\zeta) + T(0)H_6(\zeta) \quad (20)$$

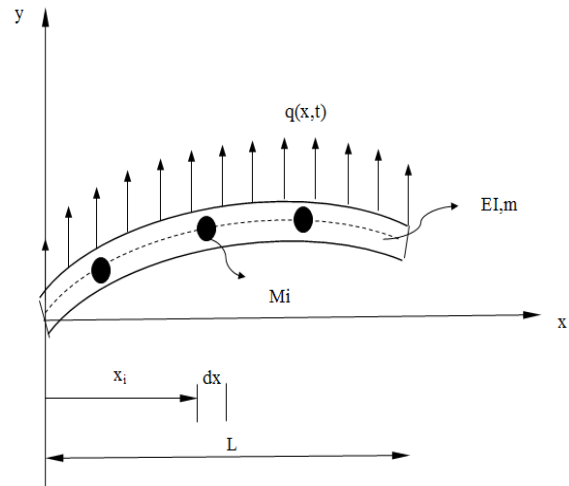
همانند تیر دوسر لولا با اعمال شرایط مرزی در نقطه انتهایی تیر، یک دستگاه سه معادله و سه مجهول ایجاد شده که با صفر قرار دادن دترمینال ضرایب آن، معادله فرکانسی حاصل می‌شود. آنگاه برای هر دو شرط مرزی به ازای هر فرکانس، مودشیب متناظر با توجه به ضرایب به دست آمده، تعیین خواهد شد.

۴-۲ ارتعاشات تیر کامپوزیت به همراه جرم متمرکز

در بخش قبل، ارتعاشات تیر کامپوزیت بدون در نظر گرفتن هر نوع ناپیوستگی، مورد مطالعه قرار گرفت. در این تحقیق ناپیوستگی حاصل از وجود جرم متمرکز بر روی تیر و اثر آن در ارتعاشات عرضی یک تیر کامپوزیت مورد ارزیابی قرار گرفته است. در واقع، وجود اجزای مکانیکی از جمله چرخنده‌ها و پولی‌ها به صورت جرم متمرکز صلب مدلسازی می‌شود. در این تحقیق ناپیوستگی حاصل از جرم متمرکز با تابع دلتای دیراک



شکل ۲- مدل سازی جزء المان خمشی تیر



شکل ۱- مدل سازی جرم متمرکز بر روی تیر کامپوزیتی

که در آن $B(\zeta)$ براساس تابع $w(x)$ و تابع دلتای دیراک و مشتقات اول و دوم بیان می شود:

$$B(\zeta) @ 2b \frac{\partial w}{\partial \zeta} \sum \alpha_i \delta'(\zeta - \zeta_i) + bw \sum \alpha_i \delta''(\zeta - \zeta_i) + b \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \sum \alpha_i \delta(\zeta - \zeta_i) + abcw \sum \alpha_i \delta(\zeta - \zeta_i) \quad (27)$$

حل معادله دیفرانسیل (۲۶) مشابه حل همگن است، با این تفاوت که ضرایب آن به صورت تابعی از موقعیت در نظر گرفته می شوند:

$$W(\zeta) = A_1 \cosh \alpha \zeta + A_2 \sinh \alpha \zeta + A_3 \cos \beta \zeta + A_4 \sin \beta \zeta + A_5 \cos \gamma \zeta + A_6 \sin \gamma \zeta \quad (28)$$

$$A_i = A_i(\zeta) \quad (29)$$

برای حل معادله بالا، جملات مشتق ضرایب به دست آمده را برابر صفر قرارداداده و جمله آخر در معادله دیفرانسیل قرار داده می شود، تا رابطه بین ضرایب به شکل ماتریسی پدید آید:

$$\begin{bmatrix} \cosh \alpha \zeta & \sinh \alpha \zeta & \cos \beta \zeta & \sin \beta \zeta & \cos \gamma \zeta & \sin \gamma \zeta \\ \alpha \sinh \alpha \zeta & \alpha \cosh \alpha \zeta & -\beta \sin \beta \zeta & \beta \cos \beta \zeta & -\gamma \sin \gamma \zeta & \gamma \cos \gamma \zeta \\ \alpha^2 \cosh \alpha \zeta & \alpha^2 \sinh \alpha \zeta & -\beta^2 \cos \beta \zeta & -\beta^2 \sin \beta \zeta & -\gamma^2 \cos \gamma \zeta & -\gamma^2 \sin \gamma \zeta \\ \alpha^3 \sinh \alpha \zeta & \alpha^3 \cosh \alpha \zeta & \beta^3 \sin \beta \zeta & -\beta^3 \cos \beta \zeta & \gamma^3 \sin \gamma \zeta & -\gamma^3 \cos \gamma \zeta \\ \alpha^4 \cosh \alpha \zeta & \alpha^4 \sinh \alpha \zeta & \beta^4 \cos \beta \zeta & \beta^4 \sin \beta \zeta & \gamma^4 \cos \gamma \zeta & \gamma^4 \sin \gamma \zeta \\ \alpha^5 \sinh \alpha \zeta & \alpha^5 \cosh \alpha \zeta & -\beta^5 \sin \beta \zeta & \beta^5 \cos \beta \zeta & -\gamma^5 \sin \gamma \zeta & \gamma^5 \cos \gamma \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B(\zeta) \quad (30)$$

از حل دستگاه معادلات بالا، مقادیر مشتقات ضرایب حاصل می شود:

معادلات دیفرانسیل معمولی زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - k \frac{d^3 \Phi}{dx^3} + \rho A \left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{\rho A} \delta(x - x_i) \right] (-\omega^2) Y(x) = 0 \quad (الف-۲۵)$$

$$GJ \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - k \frac{d^3 Y}{dx^3} - I_\alpha \omega^2 \Phi(x) = 0 \quad (ب-۲۵)$$

در بخش بعد به حل معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر سیستم پرداخته شده است.

۲-۴- تحلیل معادله دیفرانسیل معمولی تیر کامپوزیت

به همراه جرم متمرکز

معادلات بیان شده در رابطه (۲۵) با دو متغیر بیان شده است. در این قسمت با ترکیب این معادلات با یکدیگر مرتبه معادله برای $y(x)$ دو مرتبه افزایش می یابد. با انتخاب کمیت های بی بعد و اعمال آن معادله (۲۶) برای متغیر بدون بعد $w(\zeta)$ حاصل می شود:

$$\frac{\partial^6 w(\zeta)}{\partial \zeta^6} + a \frac{\partial^4 w(\zeta)}{\partial \zeta^4} - b \frac{\partial^2 w(\zeta)}{\partial \zeta^2} - abcw(\zeta) = B(\zeta) \quad (26)$$

که با جایگزینی ضرایب حاصل شده در رابطه (۲۹) جواب مسئله به شکل خلاصه زیر به دست می آید که در آن $D(\zeta)$ ، همان $W(\zeta)$ در حالت عدم وجود جرم متمرکز بر روی تیر کامپوزیت می باشد:

$$W(\zeta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\zeta - \zeta_i) T(\zeta - \zeta_i) W(\zeta_i) + D(\zeta) \quad (۳۵)$$

رابطه به دست آمده برای تابع $W(\zeta)$ بر اساس یک تعداد نقاط محدود W در موقعیت های جرم متمرکز می باشد، بنابراین برای به دست آوردن یک جواب صریح از W از خواص توابع دلتای دیراک استفاده می شود. در این وضعیت رابطه زیر برای این توابع برقرار است:

$$W(\zeta_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\zeta - \zeta_j) W(\zeta) d\zeta \quad (۳۶)$$

و با جایگزینی رابطه (۳۵) در رابطه (۳۶) خواهیم داشت:

$$W(\zeta_j) = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) W(\zeta_i)] + D(\zeta_j) \quad (۳۷)$$

اینک با تعریف مختصات توابع پایه برای $W(\zeta_i)$ داریم:

$$W(\zeta_i) = d_1 \bar{\mu}_i + d_2 \bar{\eta}_i + d_3 \bar{\gamma}_i + d_4 \bar{\kappa}_i + d_5 \bar{\psi}_i + d_6 \bar{\zeta}_i \quad (۳۸)$$

و با قرار دادن رابطه (۳۸) در رابطه (۳۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W(\zeta_j) &= d_1 \bar{\mu}_j + d_2 \bar{\eta}_j + d_3 \bar{\gamma}_j + d_4 \bar{\kappa}_j + d_5 \bar{\psi}_j + d_6 \bar{\zeta}_j \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i T(\zeta_j - \zeta_i) (d_1 \bar{\mu}_i + d_2 \bar{\eta}_i + d_3 \bar{\gamma}_i + d_4 \bar{\kappa}_i + d_5 \bar{\psi}_i + d_6 \bar{\zeta}_i) + D(\zeta_j) \end{aligned} \quad (۳۹)$$

از مساوی قرار دادن هرکدام از ضرایب d_i ها، روابط بازگشتی به دست می آیند، که توابع بازگشتی را تشکیل خواهند داد:

$$\bar{\mu}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\mu}_i] + \cosh \alpha \zeta_j \quad (الف-۴۰)$$

$$\bar{\eta}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\eta}_i] + \sinh \alpha \zeta_j \quad (ب-۴۰)$$

$$\bar{\gamma}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\gamma}_i] + \cos \beta \zeta_j \quad (ج-۴۰)$$

$$\bar{\kappa}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\kappa}_i] + \sin \beta \zeta_j \quad (د-۴۰)$$

$$\begin{aligned} A_1' &= \frac{-B(\zeta) \sinh \alpha \zeta}{\lambda} & A_2' &= \frac{B(\zeta) \cosh \alpha \zeta}{\lambda} \\ A_3' &= \frac{-B(\zeta) \sin \beta \zeta}{\Delta} & A_4' &= \frac{B(\zeta) \cos \beta \zeta}{\Delta} \\ A_5' &= \frac{-B(\zeta) \sin \gamma \zeta}{\delta} & A_6' &= \frac{B(\zeta) \cos \gamma \zeta}{\delta} \end{aligned} \quad (۳۱)$$

که در معادلات بالا ضرایب زیر لحاظ شده اند:

$$\begin{aligned} \lambda &= (\alpha^3 \beta^2 + \alpha^3 \gamma^2 + \alpha \gamma^2 \beta^2 + \alpha^5) \\ \Delta &= \frac{\lambda(\beta^5 - \beta^3 \gamma^2)}{\lambda - \alpha^5 - \alpha^3 \gamma^2} & \bar{\delta} &= \frac{\lambda \Delta \gamma^5}{\lambda \Delta - \Delta \alpha^5 - \lambda \beta^5} \end{aligned} \quad (۳۲)$$

با انتگرال گیری از مشتق ضرایب، هرکدام از آنها برحسب پارامترهای فیزیکی و هندسی مسئله حاصل می شود. با توجه به ماهیت تابع $B(\zeta)$ برحسب توابع دلتای دیراک و مشتقات آن، تابع پله در موقعیت های جرم متمرکز ظاهر می شود:

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\zeta - \zeta_i) \left(\frac{-b\alpha^2 - abc}{\lambda} \sinh \alpha \zeta_i W(\zeta_i) \right) + d_1 \\ A_2 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\zeta - \zeta_i) \left[\left(\frac{b\alpha^2 + abc}{\lambda} \right) \cosh \alpha \zeta_i W(\zeta_i) \right] + d_2 \\ A_3 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\zeta - \zeta_i) \left(\frac{b\beta^2 - abc}{\Delta} \sin \beta \zeta_i W(\zeta_i) \right) + d_3 \\ A_4 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\zeta - \zeta_i) \left(\frac{abc - b\beta^2}{\Delta} \cos \beta \zeta_i W(\zeta_i) \right) + d_4 \\ A_5 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\zeta - \zeta_i) \left(\frac{b\gamma^2 - abc}{\delta} \sin \gamma \zeta_i W(\zeta_i) \right) + d_5 \\ A_6 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i U(\zeta - \zeta_i) \left(\frac{abc - b\gamma^2}{\delta} \cos \gamma \zeta_i W(\zeta_i) \right) + d_6 \end{aligned} \quad (۳۳)$$

در روابط (۳۳) مقادیر d_i ثابت می باشند. اکنون تابع هسته محاسبات به شکل زیر تعریف می شود:

$$T(\zeta - \zeta_i) = \begin{bmatrix} \left(\frac{abc + b\alpha^2}{\lambda} \right) \sinh \alpha (\zeta - \zeta_i) + \left(\frac{abc - b\beta^2}{\Delta} \right) \sin \beta (\zeta - \zeta_i) \\ + \left(\frac{abc - b\gamma^2}{\delta} \right) \sin \gamma (\zeta - \zeta_i) \end{bmatrix} \quad (۳۴)$$

$$(H_1(\zeta_j)W(0)+H_2(\zeta_j)W'(0)+H_3(\zeta_j)M(0)+H_4(\zeta_j)S(0)+H_5(\zeta_j)\varphi(0)+H_6(\zeta_j)T(0)) \quad (44)$$

در نتیجه توابع بازگشتی جدید براساس پایه‌های فیزیکی به شکل رابطه زیر در خواهند آمد:

$$\bar{\mu}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\mu}_i] + H_1(\zeta_j) \quad (45\text{-الف})$$

$$\bar{\eta}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\eta}_i] + H_2(\zeta_j) \quad (45\text{-ب})$$

$$\bar{\gamma}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\gamma}_i] + H_3(\zeta_j) \quad (45\text{-ج})$$

$$\bar{\kappa}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\kappa}_i] + H_4(\zeta_j) \quad (45\text{-د})$$

$$\bar{\psi}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\psi}_i] + H_5(\zeta_j) \quad (45\text{-هـ})$$

$$\bar{\zeta}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\zeta}_i] + H_6(\zeta_j) \quad (45\text{-و})$$

و سرانجام تابع $W(\zeta_i)$ براساس توابع پایه جدید که متناسب با پایه‌های مرسوم می‌باشد، حاصل می‌شود:

$$W(\zeta) = W(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta - \zeta_i) \bar{\mu}_i u(\zeta - \zeta_i)] + H_1(\zeta) \right] + W(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\eta}_i u(\zeta - \zeta_i)] + H_2(\zeta) \right] + M(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\gamma}_i u(\zeta - \zeta_i)] + H_3(\zeta) \right] + S(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\kappa}_i u(\zeta - \zeta_i)] + H_4(\zeta) \right] + \varphi(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\psi}_i u(\zeta - \zeta_i)] + H_5(\zeta) \right] + T(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\zeta}_i u(\zeta - \zeta_i)] + H_6(\zeta) \right] \quad (46)$$

شرایط مرزی برای تیر دو سر لولا در روابط (۱۵) و (۱۶) و برای تیر یک سر گیردار در روابط (۱۷) و (۱۸) بیان شده است. برای تیر ساده معادله به شکل رابطه (۴۷) و برای تیر یک سر گیردار به شکل رابطه (۴۸) در می‌آید:

$$\bar{\psi}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\psi}_i] + \cos \gamma \zeta_j \quad (40\text{-هـ})$$

$$\bar{\zeta}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i [T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\zeta}_i] + \sin \gamma \zeta_j \quad (40\text{-و})$$

و با قرار گرفتن توابع بازگشتی در جواب به دست آمده، تابع صریح $W(\zeta)$ به دست می‌آید. شکل جواب نهایی به صورت زیر است:

$$W(\zeta) = d_1 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta - \zeta_i) \bar{\mu}_i u(\zeta - \zeta_i)] + \cosh \alpha \zeta_i \right] + d_2 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta - \zeta_i) \bar{\eta}_i u(\zeta - \zeta_i)] + \sinh \alpha \zeta_i \right] + d_3 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta - \zeta_i) \bar{\gamma}_i u(\zeta - \zeta_i)] + \cos \beta \zeta_i \right] + d_4 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta - \zeta_i) \bar{\kappa}_i u(\zeta - \zeta_i)] + \sin \beta \zeta_i \right] + d_5 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta - \zeta_i) \bar{\psi}_i u(\zeta - \zeta_i)] + \cos \gamma \zeta_i \right] + d_6 \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\zeta - \zeta_i) \bar{\zeta}_i u(\zeta - \zeta_i)] + \sin \gamma \zeta_i \right] + \quad (41)$$

حال برای سهولت در اعمال شرایط مرزی، جواب مسئله به کمک توابع پایه بازنویسی می‌شود. مطابق با آنچه در قسمت قبل بیان شد، رابطه (۴۱) براساس رابطه (۱۳) بیان می‌شود. بنابراین در موقعیت‌های زیر داریم:

$$W(\zeta_j) = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i T(\zeta_j - \zeta_i) U(\zeta_j - \zeta_i) W(\zeta_i) + (H_1(\zeta_j)W(0) + H_2(\zeta_j)W'(0) + H_3(\zeta_j)M(0) + H_4(\zeta_j)S(0) + H_5(\zeta_j)\varphi(0) + H_6(\zeta_j)T(0)) \quad (42)$$

و اگر $W(\zeta_j)$ به شکل زیر تعریف شود:

$$W(\zeta_i) = W(0) \bar{\mu}_i + W'(0) \bar{\eta}_i + M(0) \bar{\gamma}_i + S(0) \bar{\kappa}_i + \varphi(0) \bar{\psi}_i + T(0) \bar{\zeta}_i \quad (43)$$

داریم:

$$W(\zeta_j) = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i T(\zeta_j - \zeta_i) U(\zeta_j - \zeta_i) (W(0) \bar{\mu}_i + W'(0) \bar{\eta}_i + M(0) \bar{\gamma}_i + S(0) \bar{\kappa}_i + \varphi(0) \bar{\psi}_i + T(0) \bar{\zeta}_i) + \quad (44)$$

فرکانس چهارم اختلاف بسیار ناچیزی بر اثر خطاهای محاسباتی روی می‌دهد، که با افزایش فرکانس مرتبه خطا نیز افزایش می‌یابد. در جدول ۳ چهار فرکانس اول برای شرایط مرزی تیر دوسر لولا (PP) بیان شده است، که در تحقیق بنرجی بیان نشده بود. نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد که فرکانس‌های تیر دوسر لولا بیش از فرکانس‌های متناظر تیر یک سرگیردار است.

ب: در حالت دوم تأثیر یک جرم متمرکز در انتهای تیر یک سرگیردار کامپوزیتی با چیدمان متعامد از جنس کربن-اپوکسی مطالعه شده و با نتایج مدل فلزی مقایسه گردیده است. ثابت‌های الاستیک ماده ارتوتروپیک کربن-اپوکسی در جدول ۴ بیان شده است. مقدار نسبت جرم متمرکز در انتهای تیر به جرم تیر با نسبت‌های ۱، ۵ و ۱۰ تغییر داده شده است. آنگاه نسبت‌های چهار فرکانس اول تیر برای تیر کامپوزیتی با تیر فلزی [۱] در جدول ۵ مقایسه شده است. اگر چه جنس دو تیر، یکی ایزوتروپیک و دیگری ارتوتروپیک بوده و با یکدیگر متفاوت است، اما نتایج بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشد. برای هر دو تیر، جرم متمرکز سبب کاهش نسبت فرکانسی می‌شود و با افزایش جرم متمرکز، اثرات آن افزایش یافته و نسبت فرکانس بیشتر کاهش می‌یابد.

در ادامه تأثیر پارامترهایی هم‌چون تعداد جرم متمرکز، مقدار جرم و مکان جرم متمرکز بر مقادیر فرکانس‌ها و مودشیپ‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است.

۵-۲- مطالعه فرکانس‌های طبیعی یک تیر کامپوزیت بدون

جرم متمرکز

یک تیر کامپوزیت از جنس کربن-اپوکسی (جدول ۴) با چیدمان متعامد $[0/90/0/90]_S$ و مشخصات فیزیکی و هندسی ذکر شده در جدول ۱ در نظر گرفته شده است. نتایج تحلیل چهار فرکانس اول برای شرایط مرزی تیر دوسر لولا و تیر یک‌سرگیردار در جدول ۶ بیان شده است، که ω_{0i} نشان‌دهنده فرکانس در حالت بدون جرم متمرکز است. نتایج جدول ۶ نشان می‌دهد که در هر شماره فرکانس، فرکانس طبیعی تیر دوسر لولا از فرکانس طبیعی تیر یک‌سرگیردار بیشتر

$$W(\zeta) = W'(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \left[T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\eta}_i u(\zeta - \zeta_i) \right] + H_2(\zeta) \right] + S(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \left[T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\kappa}_i u(\zeta - \zeta_i) \right] + H_4(\zeta) \right] + T(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \left[T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\zeta}_i u(\zeta - \zeta_i) \right] + H_6(\zeta) \right] \quad (47)$$

$$W(\zeta) = M(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \left[T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\gamma}_i u(\zeta - \zeta_i) \right] + H_3(\zeta) \right] + S(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \left[T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\kappa}_i u(\zeta - \zeta_i) \right] + H_4(\zeta) \right] + T(0) \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \left[T(\zeta_j - \zeta_i) \bar{\zeta}_i u(\zeta - \zeta_i) \right] + H_6(\zeta) \right] \quad (48)$$

با اعمال شرایط مرزی در ابتدا و انتهای تیر یک دستگاه سه معادله، سه مجهول به‌دست خواهد آمد که با مساوی صفر قرارداد در ترمینان ضرایب آن، معادله فرکانسی و به ازای هر فرکانس مودشیپ مربوطه به‌دست می‌آید.

۵- مقایسه و ارزیابی نتایج

۵-۱- مقایسه با نتایج دیگران

در این بخش ابتدا صحت انجام محاسبات بررسی شده و سپس نتایج عددی مطالعه و تحلیل خواهند شد. برای این منظور مسئله برای دو حالت مشخص با نتایج موجود مقایسه و ارزیابی شده است. الف: در حالت اول برای تحلیل و مقایسه نتایج، مقدار جرم متمرکز را مساوی صفر قرار داده و ارتعاشات تیر کامپوزیت یک سرگیردار از جنس کربن-اپوکسی با مقطع مستطیلی و چیدمان $[45^\circ/0^\circ]_S$ با نتایج بنرجی [۱۱] مقایسه شده است. مشخصات هندسی و فیزیکی تیر مطالعه شده در جدول ۱ و چهار فرکانس اول تیر و مقایسه با نتایج دیگران به‌همراه محاسبه خطا در جدول ۲ بیان شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که در سه فرکانس اول داده‌ها کاملاً منطبق برهم بوده و تنها در

جدول ۱- مشخصات فیزیکی و هندسی یک تیر کامپوزیت یک سرگیردار [۱۱]

m (kg/m)	L (m)	b (m)	h (m)	EI (N.m ²)	GJ (N.m ²)	k (N.m ²)	چیدمان لایه‌ها
۰/۰۲۳۸	۰/۵۶	۰/۰۳	۰/۰۰۰۵۴	۰/۰۱۴۳	۰/۰۱۹۵	۰/۰۰۶۳۲	[45/0] _S

جدول ۲- مقایسه نتایج چهار فرکانس تیر یک سرگیردار با دیگران [۱۱]

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
این تحقیق	۸/۰۴	۵۰/۳۹	۱۴۱/۰۰	۲۷۵/۹۰
مرجع [۱۱]	۸/۰۴	۵۰/۳۹	۱۴۱/۰۰	۲۷۶/۰۰
درصد اختلاف	۰	۰	۰	۰/۰۴

جدول ۳- چهار فرکانس اول برای شرط مرزی دو سر لولا (pp)

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
PP	۲۴/۰۱۷	۹۰/۱۹۴	۲۰۴/۴۰۶	۳۵۸/۶۰۶

جدول ۴- ثوابت الاستیک ماده ارتوتروپیک

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
۱۵۵/۸	۱۰/۳۶	۰/۲۸	۶/۶۷

جدول ۵- مقایسه نسبت فرکانسی تیر یک سرگیردار کامپوزیتی و تیر فلزی [۱] همراه با یک جرم متمرکز در انتهای آزاد ($\zeta=1$)

CF	$\alpha=1$			$\alpha=5$			$\alpha=10$		
	تحقیق	مرجع	درصد	تحقیق	مرجع	درصد	تحقیق	مرجع	درصد
	حاضر	[۱۳]	خطا	حاضر	[۱۳]	خطا	حاضر	[۱۳]	خطا
ω_1/ω_{01}	۰/۶۶۵۹	۰/۶۶۵۵	۰/۰۶	۰/۴۶۴۳	۰/۴۶۴۱	۰/۰۴	۰/۳۹۲۷	۰/۳۹۲۴	۰/۰۸
ω_2/ω_{01}	۰/۸۵۹۶	۰/۸۵۸۸	۰/۰۹	۰/۸۴۲۳	۰/۸۴۱۵	۰/۰۹	۰/۸۳۹۹	۰/۸۳۹۰	۰/۱۱
ω_3/ω_{01}	۰/۹۰۹۱	۰/۹۰۸۳	۰/۰۹	۰/۹۰۲۶	۰/۹۰۱۷	۰/۱۰	۰/۹۰۱۷	۰/۹۰۰۸	۰/۱۰
ω_4/ω_{01}	۰/۹۳۳۷	۰/۹۳۲۸	۰/۱۰	۰/۹۳۰۴	۰/۹۲۹۵	۰/۱۰	۰/۹۲۹۹	۹۲۹۰	۰/۱۰

جدول ۶- چهار فرکانس اول برای شرایط مرزی مختلف یک تیر کامپوزیتی با چیدمان متعامد

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
PP	۵۷/۷۶	۸۱/۶۸	۱۰۰/۰۴	۱۱۵/۵۲
CF	۴۴/۶۲	۷۰/۶۰	۹۱/۳۳	۱۰۸/۰۶

جدول ۷- نسبت فرکانسی برای مقادیر و موقعیت‌های مختلف جرم متمرکز (شرط مرزی دوسر لولا)

PP	$\zeta=0/25$			$\zeta=0/5$			$\zeta=0/75$		
	$\alpha=0/1$	$\alpha=1$	$\alpha=10$	$\alpha=0/1$	$\alpha=1$	$\alpha=10$	$\alpha=0/1$	$\alpha=1$	$\alpha=10$
ω_1/ω_{01}	0/988	0/913	0/731	0/977	0/871	0/682	0/988	0/913	0/731
ω_2/ω_{02}	0/979	0/917	0/884	1	1	1	0/979	0/917	0/884
ω_3/ω_{03}	0/991	0/975	0/969	0/980	0/935	0/916	0/991	0/975	0/969
ω_4/ω_{04}	1	1	0/999	1	0/999	0/999	1	1	0/999

جدول ۸- نسبت فرکانسی برای مقادیر و موقعیت‌های مختلف جرم متمرکز (شرط مرزی یک‌سر گیردار)

CF	$\zeta=0/25$			$\zeta=0/5$			$\zeta=0/75$		
	$\alpha=0/1$	$\alpha=1$	$\alpha=10$	$\alpha=0/1$	$\alpha=1$	$\alpha=10$	$\alpha=0/1$	$\alpha=1$	$\alpha=10$
ω_1/ω_{01}	0/999	0/995	0/953	0/994	0/952	0/798	0/980	0/882	0/695
ω_2/ω_{02}	0/991	0/927	0/774	0/978	0/896	0/831	0/999	0/996	0/995
ω_3/ω_{03}	0/977	0/905	0/872	0/999	0/999	0/999	0/986	0/946	0/927
ω_4/ω_{04}	0/984	0/959	0/952	0/981	0/942	0/928	0/986	0/964	0/957

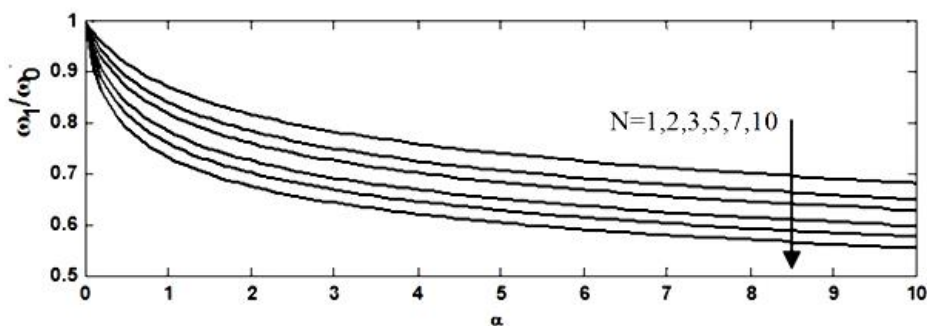
مساوی و یا کوچک‌تر از یک هستند. هم‌چنین شرط تقارن در تیر دو سر لولا به‌خوبی نمایان بوده و فرکانس‌ها برای موقعیت یک‌چهارم و سه‌چهارم طول تیر برهم منطبق هستند. نکته قابل توجه دیگر برای تیر دو سر لولا آن است که هرگاه جرم متمرکز در نقطه گره شکل مود قرار گیرد، تقریباً هیچ تأثیری بر روی فرکانس ندارد. بنابراین در جدول ۷ هرگاه جرم متمرکز در وسط تیر قرار گیرد، نسبت فرکانسی دوم برابر یک بوده و هرگاه جرم متمرکز در یک‌چهارم و سه‌چهارم طول تیر واقع شود، فرکانس چهارم تیر برابر فرکانس تیر بدون جرم متمرکز می‌شود. به‌علاوه در تیر دوسر لولا هر چه جرم به مرکز تیر نزدیک شود، فرکانس‌های بی‌بعد بیشتر کاهش می‌یابند. این واقعیت برای تیر یک‌سر گیردار با نزدیک شدن جرم متمرکز به انتهای آزاد تیر رخ داده و با نزدیک شدن جرم متمرکز به انتهای آزاد تیر، کاهش بیشتر فرکانس‌های طبیعی مشاهده می‌شود. نتایج جدول ۷ و جدول ۸ نشان می‌دهند که اثرات جرم متمرکز در فرکانس‌های پایین بسیار

است. لیکن اختلاف بین فرکانس طبیعی تیر دوسر لولا و تیر یک‌سر گیردار در فرکانس‌های پایین بیشتر بوده و این اختلاف در فرکانس‌های بالا کاهش می‌یابد. هم‌چنین مقدار این اختلاف به چیدمان لایه‌ها بستگی دارد، و در چیدمان متعامد مذکور کمتر از چیدمان $[45^0/0^0]_S$ است.

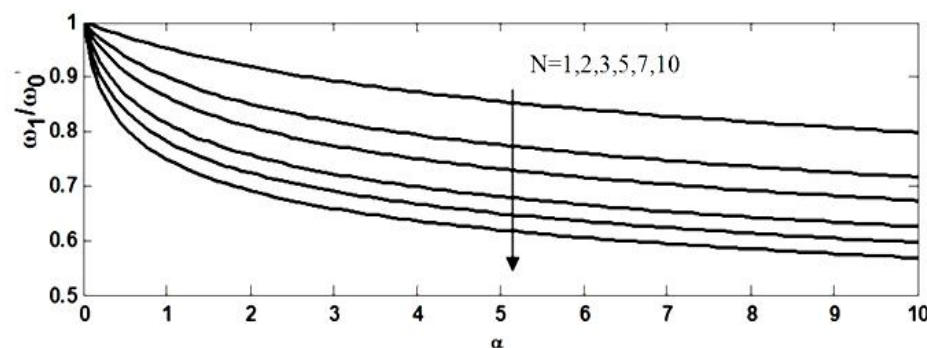
۳-۵- مطالعه تأثیر مقدار و موقعیت جرم متمرکز بر روی

فرکانس طبیعی

برای بررسی تأثیر مقدار جرم متمرکز و مکان آن، سه مقدار و سه مکان برای یک جرم در نظر گرفته شده است و نتایج برای شرایط مرزی دوسر لولا (PP) در جدول ۷ و برای شرایط مرزی یک سر درگیر (CP) در جدول ۸ بیان شده است. در این دو جدول α_i نشان‌دهنده نسبت مقدار جرم متمرکز به جرم کل تیر و \bar{y}_i بیانگر نسبت موقعیت جرم به طول تیر می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که وجود جرم متمرکز سبب کاهش فرکانس‌های بی‌بعد می‌شود، و تمام نسبت‌های فرکانس در جداول ۷ و ۸



شکل ۳- اثر افزایش تعداد جرم متمرکز بر نسبت فرکانس برای تیر دوسر لولا



شکل ۴- اثر افزایش تعداد جرم متمرکز بر نسبت فرکانس برای تیر یکسر گیردار

دریافت که در تیر یکسر آزاد، نمودارهای نسبت فرکانس فاصله بیشتری نسبت به هم دارند و افزایش تعداد جرم تأثیر بیشتری در کاهش نسبت فرکانسی دارد. لیکن در هر دو شکل به وضوح مشاهده می‌شود که فاصله خطوط از یکدیگر با افزایش تعداد جرم کاهش می‌یابد و همواره اثر یک جرم متمرکز بر روی فرکانس نسبت به تیر بدون جرم شدیدتر از نسبت فرکانس تیر با دو جرم متمرکز به تیر با یک جرم متمرکز می‌باشد و به همین صورت اختلاف بین اثرات N جرم متمرکز با $N+1$ جرم متمرکز با افزایش N کاهش می‌یابد.

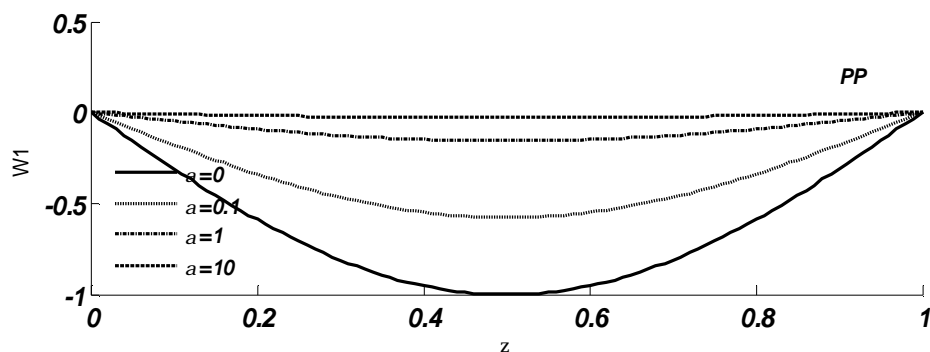
۵-۵- مطالعه تأثیر مقدار جرم متمرکز بر روی شکل مودهای ارتعاشی

در این بخش به بررسی اثر تغییرات مقدار جرم متمرکز بر مود شکل اول پرداخته می‌شود. در شکل ۵، مود اول ارتعاشی تیر دو سرلولا و در شکل ۶ مود اول ارتعاشی تیر یکسر گیردار برای مقادیر مختلف جرم بی‌بعد α نشان داده شده است. در هر دو

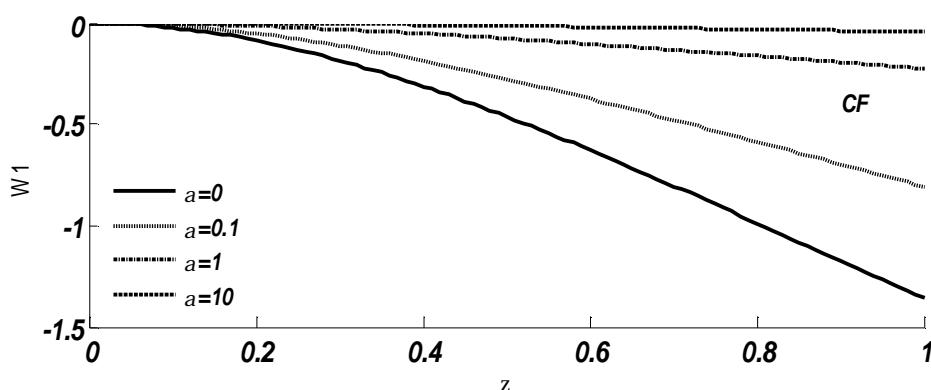
بیشتر از فرکانس‌های بالا می‌باشد. برای مثال هنگامی که جرم متمرکز در سه‌چهارم طول تیر یک سر گیردار قرار دارد و مقدار جرم برابر جرم تیر باشد، نسبت کاهش فرکانس اول به فرکانس اول تیر بدون جرم متمرکز $0/118$ می‌باشد، در صورتی که این نسبت کاهش برای فرکانس چهارم تنها برابر $0/036$ است.

۵-۴- مطالعه تأثیر تعداد جرم متمرکز بر روی فرکانس طبیعی

در این بخش به بررسی اثر تعداد جرم متمرکز پرداخته شده است. برای این منظور تعداد مختلف جرم ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۰ در موقعیت متقارن از طول تیر مورد مطالعه قرار گرفته و معادله فرکانسی برحسب مقدار جرم بی‌بعد α_i در شکل ۳ و ۴ به ترتیب برای شرایط مرزی تیر دوسر لولا و یکسر درگیر ترسیم شده است. در هر دو شکل صرف‌نظر از تعداد جرم، وجود جرم متمرکز سبب کاهش نسبت فرکانسی شده است و با افزایش تعداد جرم به دلیل افزایش جرم کل سیستم، این کاهش بیشتر است. هم‌چنین از مقایسه شکل‌های ۳ و ۴ می‌توان



شکل ۵- اثر افزایش مقدار جرم متمرکز بر مودشکل اول برای تیر دو سر لولا



شکل ۶- اثر افزایش مقدار جرم متمرکز بر مودشکل اول برای تیر یک سر گیردار

گیردار نیز بیانگر آن است که هرگاه جرم متمرکز به انتهای آزاد تیر نزدیک شود، تأثیر آن بر کاهش دامنه فرکانسی بیشتر بوده و با نزدیک شدن جرم به انتهای ثابت تیر اثرات آن بر کاهش دامنه فرکانسی کمتر می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

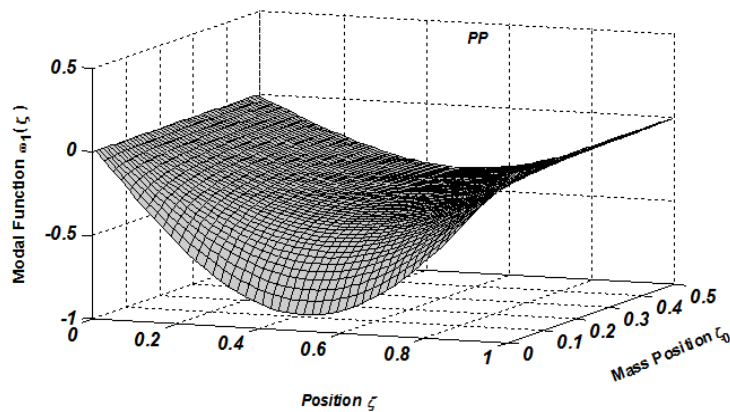
در این تحقیق اثرات مقدار، موقعیت و تعداد جرم متمرکز بر روی ارتعاشات تیرهای کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفت و نتایج زیر را به دنبال داشت:

- فرکانس طبیعی تیر دوسر لولا از فرکانس طبیعی تیر یک‌سر گیردار بیشتر است.
- مقدار فرکانس طبیعی تیر کامپوزیتی به چیدمان لایه‌ها بستگی زیادی دارد. اختلاف بین فرکانس طبیعی تیر با شرایط تکیه‌گاهی مختلف در فرکانس‌های پایین بیش از فرکانس‌های

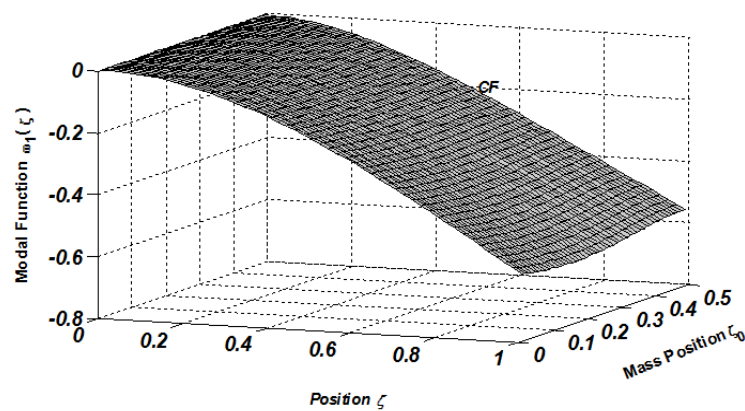
شکل با افزایش مقدار جرم، دامنه ارتعاشی حرکت کاهش می‌یابد، و می‌تواند به مقدار اندکی برسد، اما این کاهش نسبت به نرخ افزایش مقدار جرم، نرخ کمتری دارد و با افزایش مقدار جرم متمرکز سرعت کاهش دامنه فرکانسی کمتر می‌شود.

۶-۵- مطالعه تأثیر موقعیت جرم متمرکز بر روی شکل مودهای ارتعاشی

اثر تغییر موقعیت یک جرم متمرکز به اندازه جرم تیر ($\alpha=1$) برای تیر با شرایط مرزی دو سر لولا و تیر یک‌سر گیردار به ترتیب در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۷ هرگاه جرم متمرکز از مرکز تیر دوسر لولا دورتر باشد، تأثیر آن بر دامنه فرکانسی کمتر است و با نزدیک شدن جرم متمرکز به مرکز تیر کاهش دامنه ارتعاشی بیشتر است. نمودارهای نشان داده شده در شکل ۸ برای تیر یک‌سر



شکل ۷- اثر تغییر موقعیت جرم متمرکز بر مودشکل اول برای تیر دو سر لولا ($\alpha=1$)



شکل ۸- اثر تغییر موقعیت جرم متمرکز بر مودشکل اول برای تیر یک سر گیردار ($\alpha=1$)

- هرچه تعداد جرم بیشتر شود، فرکانس کمتر می‌شود، اما این کاهش خطی نیست.
- ارتباط بین کاهش دامنه و افزایش تعداد جرم متمرکز خطی نبوده و نرخ کاهش فرکانس با نرخ افزایش تعداد جرم یکسان نیست.
- افزایش تعداد جرم در تیر یک سر آزاد، تأثیر بیشتری در کاهش نسبت فرکانسی نسبت به تیر دو سر لولا دارد.
- هرچه مقدار جرم متمرکز بیشتر شود، فرکانس کمتر می‌شود. اثرات جرم متمرکز در فرکانس‌های پایین نسبت به فرکانس‌های بالا بیشتر است.
- اگر جرم متمرکز در نقطه گره شکل مود واقع شود، اثری بر روی فرکانس ندارد.
- در شرایط مرزی متقارن کاهش فرکانس در دو طرف تیر یکسان است.

۷- قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب تشکر و قدردانی خود را از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه کاشان بابت حمایت از نویسندگان این مقاله با ابلاغ پژوهانه ۲۵۵۹۸۰/۰۳ اعلام می‌دارند.

- در تیرهای متقارن کمترین فرکانس مربوط به حالتی است که جرم در مرکز قرار دارد.
- در تیر یک سر گیردار وجود جرم در انتهای آزاد تیر بیشترین کاهش فرکانس و در نتیجه کمترین فرکانس را به دنبال خواهد داشت.

1. Laura, P. A. A., Pombo, J. L., and Susemihl, E. A., "A Note on the Vibrations of a Clamped-Free Beam with a Mass at the Free End", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37(2), pp. 161-168, 1974.
2. Goel, R. P., "Free Vibrations of a Beam-Mass System with Elastically Restrained Ends", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47(1), pp. 9-14, 1976.
3. Parnell, A., and Cobble, M. H., "Lateral Displacements of a Vibrating Cantilever Beam with a Concentrated Mass", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 44(4), pp. 499-511, 1976.
4. Laura, P. A. A., and Gutierrez, R. H., "Vibrations of an Elastically Restrained Cantilever Beam of Varying Cross Section with Tip Mass of Finite Length", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108(1), pp. 123-131, 1986.
5. Liu, W. H., and Huang, C. C., "Free Vibration of Restrained Beam Carrying Concentrated Masses", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 123(1), pp. 31-42, 1988.
6. Low, K. H., "Natural Frequencies of a Beam-Mass System in Transverse Vibration: Rayleigh Estimation Versus Eigenanalysis Solutions", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, pp. 981-993, 2003.
7. Yaman, M., "Finite Element Vibration Analysis of a Partially Covered Cantilever Beam with Concentrated Tip Mass", *Materials and Design*, Vol. 27, pp. 243-250, 2006.
8. Maiz, S., Bambill, D. V., Rossit, C. A., and Laura, P. A. A., "Transverse Vibration of Bernoulli-Euler Beams Carrying Point Masses and Taking into Account their Rotatory Inertia: Exact Solution", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 303, pp. 895-908, 2007.
9. De_Rosa, M. A., Lippiello, M., Maurizi, M. J., and Martin, H. D., "Free Vibration of Elastically Restrained Cantilever Tapered Beams with Concentrated Viscous Damping and Mass", *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, pp. 261-264, 2010.
10. Weisshaar, T. A., and Foist, B. L., "Vibration Tailoring of Advanced Composite Lifting Surfaces", *Journal of Aircraft*, Vol. 22(2), pp. 141-147, 1985.
11. Banerjee, J. R., "Explicit Analytical Expressions for Frequency Equation and Mode Shapes of Composite Beam", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38(14), pp. 2415-2426, 2001.
12. Qatu, M. S., and Iqbal, J., "Transverse Vibration of a Two-Segment Cross-Ply Composite Shaft with a Lumped Mass", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 1126-1131, 2010.