

کاربرد روش اجزاء محدود در تحلیل جریان آب از روی سرریزهای اوجی و

بررسی میزان خطای سرعت

زینب سلمانی جلودار^۱، سید حسن گلماهی^۲، علی رحمانی فیروزجائی^۳، هادی ثانی خانی^{۴*}
تاریخ دریافت: ۹۰/ / تاریخ پذیرش: ۹۰/ /

چکیده

طراحی آبی صحیح و دقیق سرریزها به عنوان یکی از اجزاء اصلی سدها نقش بسزایی در پایداری و ایمنی آنها دارد. تعیین مشخصه‌های آبی جریان با استفاده از شبیه‌های فیزیکی مستلزم صرف وقت و هزینه‌ی زیاد می‌باشد. با ارائه‌ی روشهای عددی و حل معادلات پیچیده حاکم می‌توان از شبیه‌های ریاضی سرریز بهره گرفت. یکی از شبیه‌های ریاضی جریان، شبیه جریان بالقوه است که با فرض جریان غیر چرخشی، سیال بدون لزجت و غیرقابل تراکم حاصل می‌گردد. در این تحقیق، با به‌کارگیری این شبیه و با استفاده از روش اجزاء محدود، مشخصات جریان روی سرریز اوجی مورد تحلیل قرار گرفت. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش عددی با مقادیر تجربی و بررسی اندازه‌ی خطا، نشان دهنده‌ی عملکرد مناسب شبیه بود.

واژه‌های کلیدی: رریز اوجی، روش اجزاء محدود، شبیه‌های ریاضی، تحلیل جریان آب.

۱- کارشناسی ارشد مهندسی آب، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری.

۲- دانشیار گروه مهندسی آب، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری.

۳- دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت.

۴- دانشجوی دکتری مهندسی آب، عضو باشگاه پژوهشگران جوان دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز.

*- نویسنده‌ی مسوول: h.sanikhani@tabrizu.ac.ir

مقدمه

سرریز یک سازه‌ی آبی است که معمولاً در سدهای تأخیری و مخزنی برای رها کردن آب اضافی و سیلابی که نمی‌توان ذخیره کرد، به کار می‌رود. با افزایش شمار سدهای مخزنی و با توجه به لزوم ساختن سرریز بر روی این سازه‌ها، مطالعه‌ی دقیق در مورد سرریز سدها برای رفع مسائل و مشکلاتی که بر اثر استفاده از آنها به وجود می‌آید، الزامی است (چتیلا و تابارا، ۲۰۰۴). در دهه‌های گذشته معیارهای طراحی برای نیمرخ تاج سرریز توسعه یافته است، اما گاهی اوقات، به دلیل پایداری و یا مسائل اقتصادی، امکان استفاده از نیمرخ تاج معیار مقذور نمی‌باشد. پس از انتخاب نیمرخ تاج سرریز و ایجاد تغییرات مورد لزوم برای آن، لازم است که فراسنج‌هایی نظیر نیمرخ سطح آزاد جریان، مقدار سرعت در نقاط مختلف، اندازه‌ی فشار روی تاج سرریز و ... تعیین گردند. از دیرباز مطالعات تجربی و آزمایشگاهی برای یافتن چنین ویژگی‌هایی مورد توجه بوده‌اند، اما تهیه‌ی شبیه فیزیکی، پرهزینه است و ساختن آن به زمان زیادی نیاز دارد. باتوجه به مشکلات مذکور و از سوی دیگر، پیشرفت روزافزون علوم رایانه، تهیه‌ی شبیه ریاضی جریان آب بر روی سرریزها راه حلی منطقی و مقرون به صرفه می‌باشد (کیرک‌گوز و همکاران، ۲۰۰۹).

به دلیل اهمیت موضوع، بسیاری از محققین از گذشته تاکنون تلاش‌های فراوانی جهت دستیابی به نتایج بهتر انجام داده‌اند، ضمن این که به کمک شبیه‌های ریاضی می‌توان هندسه‌های مختلفی از سرریز را اجرا، سپس در خصوص بهترین گزینه از نظر شرایط آبی به ساختن شبیه فیزیکی اقدام کرد. در این شرایط در زمان زیادی که باید در ساختن شبیه فیزیکی برای تغییر هندسه سرریز تلف شود، صرفه‌جویی خواهد شد. کاسیدای (۱۹۶۵) برای اولین بار از روابط تحلیل ابعادی و فرض جریان‌های غیرچرخشی جهت تحلیل جریان روی سرریز استفاده کرد. وی توانست نیمرخ سطح آب و ضریب تخلیه‌ی سرریز را محاسبه کند. هندرسون و همکاران (۱۹۹۱) خطر حفره‌سازی روی سرریز را با کمک روش اجزاء مرزی^۱ مورد بررسی قرار داده و به نتایج قابل قبولی دست یافتند. سانگ و

زو (۱۹۹۹) از روش احجام محدود^۲ جهت بررسی تأثیر هندسی سرریزهای و سرسره‌ای و تونلی در مورد جریان سطح آزاد استفاده کردند. سوچ و جانسون (۲۰۰۱) به بررسی عملکرد شبیه FLOW3D در تحلیل مقادیر فشار و بدهی عبوری از سرریزهای اوجی پرداختند. نتایج به دست آمده از شبیه عددی در مقایسه با مقادیر شبیه فیزیکی از تطابق قابل قبولی برخوردار بودند. چانرانگ و همکاران (۲۰۰۲) برای شبیه‌سازی جریان در سرریز تاج دایره‌ای از روش حجم سیال^۳ و شبیه‌سازی هندسی^۴ استفاده کردند و نتایج شبیه عددی را در مقایسه با شبیه فیزیکی قابل قبول گزارش کردند.

درگاهی (۲۰۰۶)، جهت شبیه‌سازی جریان بر روی سرریز اوجی به صورت سه بعدی از شبیه Fluent استفاده کرد. وی برای شبیه‌سازی عددی آشفتگی جریان از شبیه $k-\epsilon$ معیار و RNG^۵ استفاده کرد. چتیلا و تابارا (۲۰۰۴) از نرم‌افزار ADINA برای شبیه‌سازی نیمرخ سطح آب روی سرریز اوجی و تعیین میدان جریان، استفاده کردند. تابارا و همکاران (۲۰۰۵)، با کمک نرم‌افزار ADINA نیمرخ سطح آب روی سرریزهای پلکانی را به دست آوردند. آنها از شبیه آشفتگی $k-\epsilon$ جهت تحلیل جریان استفاده کردند. فراری (۲۰۱۰) جهت تحلیل جریان بر روی سرریز لبه تیز از یک روش بدون شبکه بنام SPH^۶ استفاده کرد. نتایج به دست آمده با شبیه عددی در مقایسه با شبیه فیزیکی از تطابق خوبی برخوردار بودند. هدف اصلی در روش‌های عددی، از جمله روش اجزاء محدود، یافتن حل یک مسأله‌ی پیچیده از طریق جایگزینی آن با یک شبیه ساده‌تر می‌باشد و هنگامی که مسأله‌ی واقعی با شبیه ساده‌تری برای یافتن حل آن جایگزین گردید، قادر به یافتن حل تقریبی آن خواهیم بود. ابزارهای ریاضی موجود برای یافتن جواب دقیق بیشتر مسائل عملی (گاهی حتی برای یافتن یک حل تقریبی) کافی نیستند، بنابراین، جهت یافتن حتی جواب تقریبی برای یک مسأله داده شده، ناگزیر از توسل به

^۲ finite volume

^۳ volume of fluid (VOF)

^۴ geo-reconstruct model

^۵ re-normalization group model

^۶ smooth particle hydrodynamics

^۱ boundary element

پایا تا پیچیده‌ترین مسائل پویا گسترده است. این روش، که اولین مرتبه در علوم هوا-فضا ابداع و به کار گرفته شد سریعاً در سایر علوم نیز توسعه یافت و قابلیت آن در حل مسائل مختلف به خوبی به اثبات رسیده است (زینکوویچ و تیلور، ۱۹۸۹؛ ردی، ۱۹۹۳).

این روش بسیار مشابه روش حجم محدود می‌باشد. در این روش، بازه‌ی محاسبات به حجم‌ها یا اجزاء مجزا که عموماً نامنظم می‌باشند، تقسیم می‌شود. روش اجزاء محدود مبتنی بر ۲ روش کلی حساب تغییرات و باقیمانده‌ی وزنی می‌باشد. مزیت روش باقیمانده‌ی وزنی این است که در این روش، معادلات قبل از آن که بر روی تمام بازه‌ی انتگرال‌گیری شوند، با استفاده از تابع وزنی^۱ تقریب زده می‌شوند. متداول‌ترین روش اجزاء محدود بر اساس روش باقیمانده‌ی وزنی، روش گالرکین می‌باشد. یکی از مزیت‌های مهم روش اجزاء محدود قابلیت کاربرد آن در هندسه‌های دلخواه و متفاوت است و برای تحلیل‌های ریاضی نیز غالباً ساده‌تر می‌باشد (فرزیگر و پریک، ۲۰۰۲).

معادلات حاکم بر جریان

معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان آب از روی سرریزها در شرایط دو بعدی و با فرض غیرچرخشی و غیرگرانروی بودن سیال بر حسب یک معادله‌ی پیوستگی و دو معادله‌ی اندازه حرکت می‌باشد. در چنین جریان‌هایی می‌توان شمار معادلات حاکم و در نتیجه مجهولات مسأله را با استفاده از تابع‌های جریان و گردابی کاهش داد و به این ترتیب هزینه‌ی کمتری را در تحلیل عددی چنین جریان‌هایی متحمل شد. اگر از مؤلفه‌ی x معادلات اندازه‌ی حرکت نسبت به y ، و از مؤلفه‌ی y معادلات اندازه‌ی حرکت نسبت به x مشتق گرفته و آنها را از هم کم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

جملات چهارم و پنجم رابطه (۱) مضربی از رابطه‌ی

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ می‌باشند که بر اساس معادله پیوستگی دارای

روش‌های عددی نظیر روش اجزاء محدود می‌باشیم. علاوه بر این در روش اجزاء محدود، اغلب این امکان وجود دارد که با صرف محاسبات رایانه‌ای بیشتر، حل تقریبی را اصلاح نموده و یا بهبود بخشید (مجدوبی، ۱۹۹۷). این روش توسط محققان مختلف برای تحلیل جریان روی سرریزها به کار گرفته شده است.

کیرک‌گوز و همکاران (۲۰۰۹) به تحلیل جریان عبوری از سرریز سرسره‌ای با استفاده از روش اجزاء محدود پرداختند. نتایج به دست آمده حاکی از کارایی قابل قبول روش اجزاء محدود در تعیین نیمرخ سطح آب و سرعت بود. کریمی و موسوی جهرمی (۲۰۱۰) وضعیت جریان را بر روی سرریز پلکانی که با استفاده از نرم‌افزار ANSYS، که بر اساس روش اجزاء محدود عمل می‌کند، مورد بررسی قرار داده و دقت شبیه‌سازی جریان را مناسب گزارش نمودند.

با بررسی تحقیقات گذشته می‌توان نتیجه گرفت که بیشتر مطالعات انجام شده در خصوص به کارگیری روش اجزاء محدود معطوف به مکانیک جامدات بوده و دامنه‌ی مطالعات انجام شده با استفاده از روش اجزاء محدود در شاخه‌ی مکانیک سیالات، نظیر تحلیل جریان بر روی سرریزها، محدود می‌باشد. همچنین، در مطالعات قبلی بیشتر از بسته‌های نرم‌افزارهای آماده برای به کارگیری این روش استفاده شده است. هدف از این تحقیق، تحلیل جریان آب عبوری از روی سرریز اوجی با استفاده از روش اجزاء محدود می‌باشد. همچنین، مقایسه‌ای بین نتایج شبیه عددی اجزاء محدود و شبیه تجربی و دقت شبیه در تعیین نیمرخ سرعت آب و مقدار سرعت مورد نظر است. جهت به کارگیری روش اجزاء محدود از یک برنامه به زبان فرترن ۹۰ که توسط نویسندگان مقاله تدوین شده است، استفاده گردید.

مواد و روشها

روش اجزاء محدود

روش اجزاء محدود، یک شیوه‌ی حل عددی است که می‌تواند در درک چگونگی پاسخ‌ها، تنش‌ها و ... ما را در تجزیه و تحلیل سامانه‌ها یاری نماید. طیف کارایی این روش از مسائل نیرویی تا انتقال حرارت و از مسائل ساده‌ی

^۱ weight function

به این ترتیب معادله‌ی فشار به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$-\nabla^2 p = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (۸)$$

که با توجه به رابطه‌ی (۹):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (۹)$$

صورت نهایی معادله‌ی پواسون فشار به صورت رابطه‌ی (۱۰) به دست می‌آید:

$$\nabla^2 p = 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] \quad (۱۰)$$

از آن جا که معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله را نمی‌توان با روش تحلیلی حل کرد، لذا روش‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بدین ترتیب در این تحقیق، روش اجزاء محدود برای نمایش جبری معادلات حاکم بر جریان به کار گرفته شد.

مشخصات سرریز مورد مطالعه

جهت بررسی کارایی روش اجزاء محدود در تحلیل جریان آب بر روی سرریز اوجی، نتایج شبیه عددی با نتایج شبیه تجربی مورد مقایسه قرار گرفت. در این خصوص از نتایج مربوط به سرریز اوجی سد مخزنی دامغان به عنوان مطالعه‌ی موردی استفاده گردید. سرریز سد مخزنی دامغان از نوع ریزشی آزاد و بدون دریچه می‌باشد. مشخصات سرریز در جدول (۱) ارائه شده اند (حسنی، ۲۰۰۳). در این تحقیق، نیمرخ سطح آزاد آب برای سرریز به ازای بده ی طراحی برابر $\frac{m^3}{s}$ ۶/۱۵ ترسیم گردید. در این سرریز، مقادیر نیمرخ سطح آب با استفاده از مقیاس با دقت ۱ سانتی‌متر و مقادیر سرعت با استفاده از پروانه‌ی آبی اندازه‌گیری شده‌اند.

مقدارش برابر با صفر است. با جایگزینی تعریف تابع انتقال چرخش دو بعدی مطابق رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱)، رابطه (۳) به دست خواهد آمد:

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (۲)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (۳)$$

از طرفی تابع جریان ψ به صورت روابط (۴) و (۵) تعریف می‌شود:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (۴)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۵)$$

بر این اساس، معادله‌ی مربوط به تابع چرخشی، منجر به معادله‌ی پواسون مطابق رابطه‌ی (۶) خواهد شد:

$$\nabla^2 \psi = \zeta \quad (۶)$$

به این ترتیب، سه معادله‌ی پیوستگی و اندازه‌ی حرکت بر جریان دو بعدی سیالات تراکم ناپذیر، به دو معادله‌ی انتقال چرخش^۱ ζ و معادله‌ی پواسون تابع جریان ψ تبدیل می‌شوند. با حل دو معادله بالا و به‌دست آوردن توزیع توابع انتقال چرخش و جریان، توزیع سرعت‌های u و v را با استفاده از تعریف تابع جریان حاصل می‌گردد. پس از محاسبه مقادیر تابع جریان می‌توان توزیع فشار را نیز از طریق حل معادله پواسون فشار به‌دست آورد. رابطه‌ی فشار را به سادگی می‌توان با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های u و v معادلات اندازه‌ی حرکت نسبت به x و y و جمع کردن آنها به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -\nabla^2 p \end{aligned} \quad (۷)$$

جملات اول، پنجم و ششم معادله‌ی (۷) ضربی از معادله‌ی پیوستگی و در نتیجه دارای مقادیری برابر صفر هستند.

¹ vorticity transport equation

جدول ۱- مشخصات سرریز اوجی سد مخزنی دامغان

WES	نوع سرریز
74 متر	طول خالص تاج سرریز
1 افقی به 3 عمودی	شیب وجه بالادست
$y = .278x^{1.84}$	معادله‌ی آستانه‌ی سرریز
$C = 2.174$	ضریب آب‌گذری سرریز
1320.5 متر از سطح دریا	رقوم آستانه‌ی سرریز
1315.5 متر از سطح دریا	رقوم کف در پاشنه‌ی سرریز
1313.5 متر از سطح دریا	رقوم کف در پنجه‌ی سرریز

روش حل مسأله

جریان از روی تاج سرریز اوجی به صورت ریزشی آزاد است؛ از این رو، حل معادلات حاکم بر جریان، با توجه به این که موقعیت سطح آزاد از همان ابتدا مشخص نمی‌باشد، کاری دشوار است. برای تحلیل چنین جریانی، موقعیت سطح آزاد در ابتدا فرض گردید، سپس ناحیه‌ی مورد نظر شبکه‌بندی شد. بعد از شبکه‌بندی محدودده‌ی مورد بررسی، شرایط مرزی اعمال گردید. معادلات حاکم بر مسأله شامل تابع پواسون جریان و تابع پواسون فشار بودند که از حل تابع جریان، سرعت در نقاط مختلف مسأله و از حل تابع فشار، فشار در گره‌ها به دست آمد. تنها تفاوت اساسی میان این دو معادله در شرایط مرزی آنها می‌باشد. شرایط مرزی معادله‌ی تابع جریان عمدتاً از نوع دیریچله^۱ بوده، در صورتی که شرایط مرزی معادله‌ی فشار غالباً از نوع شرایط مرزی نیومن^۲ است.

جهت یافتن مجهولات مسأله ابتدا باید معادله‌ی پواسون تابع جریان حل می‌شود، لذا شرایط مرزی مربوط به مسأله بر اساس تابع جریان بود. نکته‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد این است که در سطح آزاد دو نوع شرط مرزی باید تامین گردد، که عبارتند از: فشار نسبی صفر روی سطح آزاد و سرعت عمود بر سطح آزاد، که برابر با صفر است، یعنی روی سطح آزاد فقط سرعت مماسی دارای مقدار می‌باشد. اما، به علت فرضی بودن سطح آزاد برقراری هر دو شرط مرزی در ابتدای کار امکان‌پذیر نبود.

پس از اعمال شرایط مرزی و حل معادله، تابع جریان، سرعت‌های u (مؤلفه‌ی سرعت در جهت X) و v (مؤلفه‌ی سرعت در جهت Y) محاسبه شدند و از آن جا سرعت کل جریان (V) از رابطه‌ی زیر به دست آمد.

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (11)$$

در مرحله‌ی بعد، معادله‌ی پواسون فشار حل شد تا شرایط فشار مورد بررسی قرار گیرند. با بررسی سرعت قائم و همچنین فشار نسبی روی سطح آزاد، در صورت درست نبودن موقعیت فرضی سطح آزاد، موقعیت آن بطور عمودی تغییر داده شد و بار دیگر معادلات جریان و فشار حل شدند. این کار آنقدر ادامه یافت تا همگرایی کافی حاصل گردیده و هر دو شرط مرزی روی سطح آزاد برقرار شدند. لازم به ذکر است که کلیه‌ی مراحل فوق با کاربرد برنامه‌ای که در محیط نرم افزار فرترن ۹۰ بر اساس روش اجزاء محدود تهیه شده بود، اجرا گردید.

مشخصات شبیه اجزاء محدود سرریز

جهت اجزاء‌بندی ناحیه مورد بررسی از اجزاء مثلثی سه گره‌ای استفاده شد. در شکل ۲ چگونگی اجزاء بندی محدودده‌ی جریان نشان داده شده است. شمار اجزای به کار رفته در شبیه اولیه ۲۰۴ و شمار گره‌های مورد استفاده ۱۲۸ بود. حدود ۱۳ متر در بالادست سرریز تا پنجه‌ی آن جهت تحلیل جریان، شبیه سازی گردید.

شرایط مرزی

همان‌طور که گفته شد، در حل مسأله از هر دو رابطه سازی تابع جریان و تابع بالقوه‌ی سرعت استفاده گردید.

¹ dirichlet

² neumann

از روش آزمون و خطا استفاده می‌گردد. برای این حالت بدهی $\frac{m^3}{s}$ ۶/۱۵ در واحد عرض که بدهی طراحی می‌باشد، در نظر گرفته شده است. موقعیت نیمرخ سطح آزاد در شروع تکرارها فرض گردید. در ابتدا برنامه با استفاده از نیمرخ فرض شده و شبکه‌ی اجزاء محدود اولیه، که در شکل ۲ نشان داده شده است، اجرا گردید. در هر مرحله از تکرار نیمرخ سطح آزاد و مقادیر فشار روی این سطح مورد بررسی قرار گرفت. با نزدیک شدن به سطح آزاد واقعی، عمل تکرار قطع گردید و نتایج حاصل از آخرین تکرار را به عنوان جواب مسأله در نظر گرفته شد. در مسأله مذکور پس از هفت تکرار همگرایی حاصل شد. در شکل ۳ نیمرخ واقعی سطح آزاد آب به همراه نیمرخ سطح آب محاسباتی به وسیله‌ی شبیه ریاضی به ازای بدهی طراحی نشان داده شده است. با توجه به شکل ۳ بیشترین خطای نسبی شبیه ریاضی در مقایسه با شبیه تجربی در محاسبه نیمرخ سطح آب مربوط به گره‌ی شماره‌ی ۳۵ بوده و درصد خطای شبیه در این گره برابر ۱۰/۴۸ است. همچنین، میانگین درصد خطای نسبی شبیه ریاضی در محاسبه‌ی نیمرخ سطح آب برابر با ۳/۶ بود که با توجه به شمار اجزاء در نظر گرفته شده‌ی برابر با ۲۰۶، قابل قبول می‌باشد. با مقایسه‌ی مقادیر محاسبه شده با استفاده از شبیه ریاضی با شبیه تجربی می‌توان دید که مقادیر محاسباتی توسط شبیه ریاضی در بالادست سرریز کمتر از مقادیر شبیه تجربی و در ناحیه‌ی سرریز و پایین دست آن بیشتر از مقادیر تجربی به دست آمده‌اند. همچنین برای چندین گره در بالادست سرریز، مقادیر محاسباتی و مقادیر شبیه تجربی تطابق کاملی با یکدیگر دارند که این حالت در شکل ۳ کاملاً مشهود است.

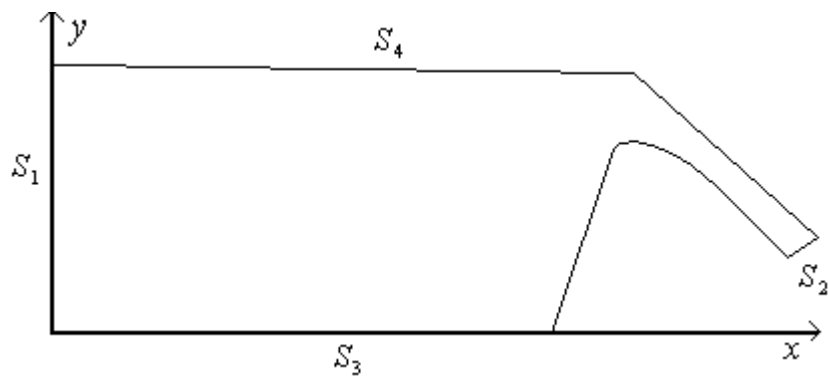
اما از آن جا که در مرحله‌ی اول اجرای برنامه، رابطه‌ی سازی تابع جریان به کار برده می‌شود، لذا اعمال شرایط مرزی بر اساس این مطلب انجام شد. مطابق شکل ۱ جهت حل معادله جریان روی سرریز چهار مرز S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 وجود دارد که بایستی در هر یک از آنها شرط مرزی مناسب اعمال گردد:

$$\begin{aligned} S_1 : & \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \\ S_2 : & \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (12) \\ S_3 : & \quad \psi = 0 \\ S_4 : & \quad \psi = q = 6.15 \end{aligned}$$

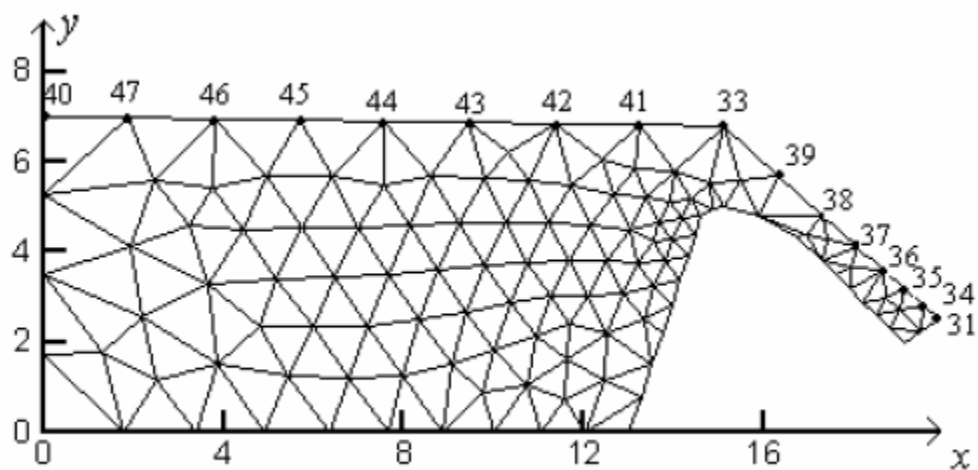
با توجه به شکل ۱، S_1 و S_2 به ترتیب مرزهای بالادست و پایین دست می‌باشند که S_1 مرز ورودی و S_2 مرز خروجی نامیده می‌شود. در این مرزها، توزیع سرعت در مقطع یکنواخت فرض شد. S_3 و S_4 به ترتیب مرز جامد و مرز سطح آزاد می‌باشند که هر کدام در واقع یک خط جریان به حساب می‌آید. جهت معلوم کردن ناحیه‌ی حل، مرز S_4 ، که همان سطح آزاد می‌باشد، به‌طور تقریبی مشخص شد. علاوه بر شرطهای مذکور، در مرز S_4 باید یک شرط اضافی یعنی فشار نسبی صفر، نیز اعمال می‌شد، اما ارضای این شرط با توجه به تقریبی بودن سطح آزاد در ابتدای کار مقدور نبود؛ لذا، با تکرار و انجام آزمون و خطا، با نزدیک شدن به سطح آزاد واقعی این شرط نیز برقرار گردید.

نتایج و بحث

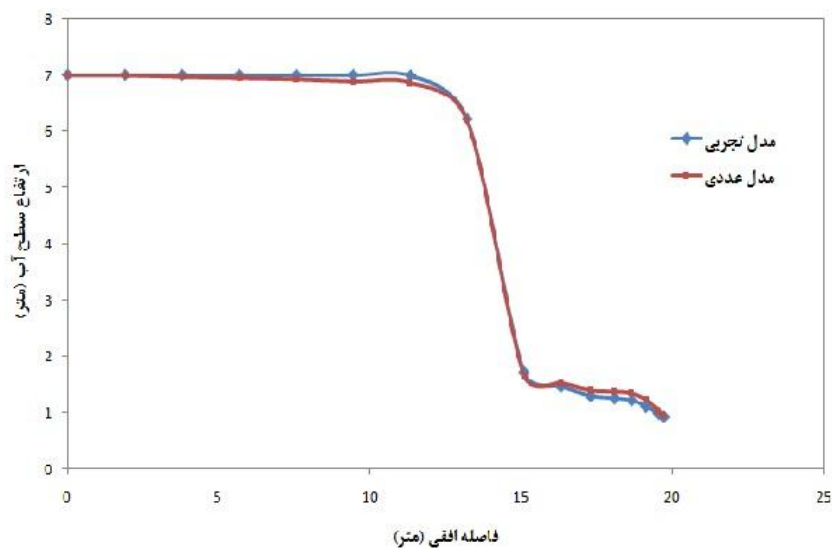
پس از تعیین محدوده‌ی جریان، اجزاء بندی و همچنین اعمال شرایط مرزی، با کمک برنامه رایانه‌ای و با آزمون و خطا طی چند مرحله، سطح آزاد جریان به دست آمد. به علت روابط غیرخطی حاکم بر مسائل با سطح آزاد، معمولاً



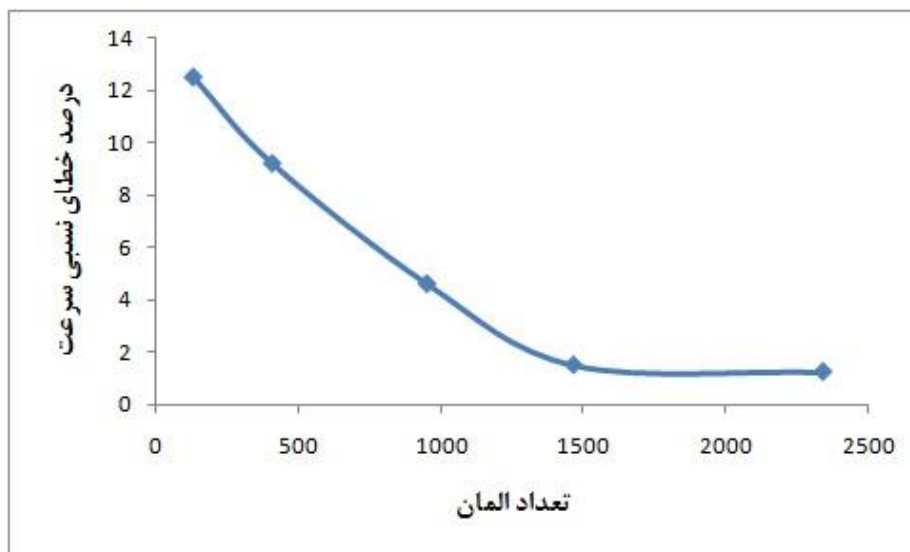
شکل ۱- دامنه‌ی محاسباتی و شرایط مرزی اعمال شده



شکل ۲- چگونگی اجزاء بندی محدوده‌ی جریان و موقعیت قرارگیری گره‌های مورد بررسی.



شکل ۳- نمودار نیمرخ سطح آب در شبیه عددی و شبیه‌های تجربی به ازای شمار اجزاء اولیه



شکل ۴- نمودار درصد متوسط خطای نسبی شبیه ریاضی در تعیین سرعت نسبت به شمار اجزاء

آمد. در جدول ۲ مقادیر سرعت در دو حالت تجربی و محاسباتی، اختلاف بین این مقادیر در تمامی نقاط واقع در سطح آزاد و اندازه ی درصد خطای شبیه ریاضی به ازای شبکه بندی اولیه (شمار اجزاء برابر با ۲۰۴) نشان داده شده اند.

با توجه به اهمیت اندازه ی سرعت در نقاط مختلف سرریز و اثرات آن بر پدیده حفره سازی و بازده ی آبی سرریز، در این بخش نتایج حاصل از روش اجزاء محدود و شبیه تجربی مورد بررسی قرار می گیرد. با کمک شبیه ریاضی مورد نظر، مقدار سرعت در هر یک از گره ها در جهات افقی و قائم محاسبه شده و مقدار سرعت کل به دست

جدول ۲- درصد خطای شبیه در تعیین سرعت نقاط مختلف روی سرریز به ازای شبکه بندی اولیه

شماره ی گره	مختصات x گره (m)	مختصات y گره (m)	سرعت حاصل از شبیه ریاضی ($\frac{m}{s}$)	سرعت حاصل از شبیه تجربی ($\frac{m}{s}$)	اختلاف	درصد خطا
۴۰	۰/۰۰	۷/۰۰	۰/۸۸	۰/۸۸	۰/۰۰	۰/۰۰
۴۷	۱/۹۰	۷/۰۰	۰/۸۸	۰/۸۸	۰/۰۰	۰/۰۰
۴۶	۳/۷۹	۶/۹۷	۰/۸۸	۰/۸۹	۰/۰۱	۱/۱۲
۴۵	۵/۶۸	۶/۹۵	۰/۸۸	۰/۹۲	۰/۰۴	۴/۳۵
۴۴	۷/۵۷	۶/۹۳	۰/۹۲	۰/۹۷	۰/۰۵	۵/۰۰
۴۳	۹/۴۵	۶/۸۹	۱/۰۲	۱/۰۸	۰/۰۶	۵/۵۶
۴۲	۱۱/۳۴	۶/۸۷	۱/۲۸	۱/۳۹	۰/۱۱	۷/۹۱
۴۱	۱۳/۲۲	۶/۸۶	۱/۶۰	۲/۲۸	۰/۶۸	۲۹/۸۰
۳۳	۱۵/۱۰	۶/۶۶	۳/۵۱	۳/۹۰	۰/۳۹	۱۰/۰۰
۳۹	۱۶/۳۲	۶/۰۹	۴/۱۸	۵/۱۴	۰/۹۶	۱۸/۶۷
۳۸	۱۷/۳۱	۵/۲۰	۴/۶۵	۵/۵۰	۰/۸۵	۱۵/۴۵
۳۷	۱۸/۰۹	۴/۴۰	۴/۸۵	۶/۱۶	۱/۳۱	۲۱/۲۷
۳۶	۱۸/۶۶	۳/۸۰	۵/۰۱	۶/۶۰	۱/۵۹	۲۴/۰۹
۳۵	۱۹/۱۳	۳/۲۲	۵/۵۳	۷/۵۰	۱/۹۷	۲۶/۲۷

۲۰/۳۸	۱/۶۱	۶/۲۹	۷/۹۰	۲/۶۱	۱۹/۵۴	۳۴
۱۷/۰۸	۱/۳۸	۶/۷۰	۸/۰۸	۲/۳۵	۱۹/۷۲	۳۱

مناسب نیست، زیرا کوچک کردن اجزاء تا حد زیادی در همگرایی جوابها تأثیر دارد. لذا، محدوده‌ی جریان بار دیگر و با سطح آزاد به دست آمده از آخرین تکرار گسسته‌سازی شد. برای بار دوم قسمت تاج و پایین‌دست سرریز با اجزای کوچکتر تقسیم‌بندی گردید. در این حالت شمار اجزای به‌کار رفته ۴۰۶ و شمار گره‌ها نیز ۲۵۰ در نظر گرفته شد. در واقع، دلیل این کار حساسیت بالای ناحیه‌ی مورد نظر می‌باشد، که می‌توان از روی درصد به خطای زیاد نیمرخ سرعت و نیمرخ سطح آب در این قسمت‌ها پی برد.

پس از جزءبندی محدوده‌ی جریان، اعمال شرایط مرزی و ساخت پرونده‌ی ورودی، برنامه اجرا گردید. اندازه‌ی سرعت در نقاط گره‌ی به دست آمد و با مقادیر تجربی مقایسه شد. در این حالت بیشترین خطای نسبی شبیه ریاضی مربوط به گره ۴۱ بود و مقدار آن برابر با ۲۶/۲۰ درصد به دست آمد. همچنین، متوسط خطای نسبی شبیه در این حالت در گره‌های مورد بررسی برابر با ۹/۲ درصد بود. در این حالت بیشترین خطای نسبی شبیه ریاضی در تعیین نیمرخ سطح آب مربوط به گره شماره ۳۵ بود و مقدار آن برابر با ۴/۸۱ درصد بدست آمد. همچنین، متوسط خطای نسبی شبیه ریاضی در تعیین نیمرخ سطح آب به ازای تعداد اجزاء برابر ۴۰۶ عدد، کمتر از ۱ درصد بود.

با توجه به بالا بودن درصد خطای نسبی اندازه‌ی سرعت در شبیه ریاضی در مقایسه با مقادیر تجربی، شبکه‌بندی‌های جدیدی با شمار اجزاء برابر ۹۵۰، ۱۴۶۵ و ۲۳۴۲ نیز مورد بررسی قرار گرفتند. در جدول ۳ نتایج مقادیر سرعت در شبیه تجربی و ریاضی و درصد خطای شبیه ریاضی به ازای شمار اجزاء برابر با ۲۳۴۲ ارائه شده‌اند. همچنین، در شکل ۴ نمودار درصد خطای نسبی شبیه ریاضی در تعیین مقادیر سرعت جریان نسبت به شمار اجزاء نشان داده شده است. با توجه به این شکل، با افزایش شمار اجزاء و استفاده از شبکه‌بندی کوچکتر، اندازه‌ی درصد خطای شبیه به طور محسوسی کاهش یافت.

در مورد مقادیر سرعت به دست آمده از روش محاسباتی می‌توان گفت که اندازه‌ی خطا در قسمت بالادست سرریز ناچیز بوده، اما در قسمت روی تاج و پایین‌دست سرریز مقدار آن نسبتاً زیاد بوده است. با توجه به جدول ۲ حداکثر خطای نسبی شبیه ریاضی برابر با ۲۹/۸۰ درصد است که مربوط به گره‌ی شماره ۴۱ می‌باشد. همچنین، در گره‌های واقع شده در ناحیه‌ی سرریز جریان، که در این ناحیه وضعیت جریان فوق بحرانی بوده و تلاطم ناشی از جریان زیاد می‌باشد، مقدار خطای نسبی شبیه ریاضی به نسبت زیاد بود. با توجه به جدول ۲ می‌توان گفت که مقادیر محاسباتی سرعت جریان با شبیه ریاضی در مقایسه با شبیه تجربی به ازای کلیه‌ی گره‌های مورد بررسی بیشتر تخمین زده شده‌اند. متوسط خطای نسبی شبیه به ازای شبکه‌بندی اولیه برابر با ۱۲/۵ درصد به دست آمد.

از عوامل تاثیرگذار بر خطای شبیه ریاضی می‌توان به فرضیه‌ی مهمی که در جریانهای بالقوه به‌کار می‌رود، اشاره کرد. این فرض، موازی بودن خطوط جریان و استفاده از قانون فشار هیدروپایا می‌باشد، در صورتی‌که در قسمت تاج و پایین‌دست سرریز، خطوط جریان دیگر موازی نبوده و دارای انحنای زیادند، که موجب ایجاد مؤلفه‌ی شتاب می‌گردند. این امر خود باعث ایجاد نیروی گریز از مرکز که عمود بر جهت جریان است، می‌شود؛ بنابراین، در قسمت انحنادار سرریز فرض جریان‌های بالقوه بطور فاحشی نقض می‌شود که تا حد زیادی باعث ایجاد خطای شبیه در محاسبه‌ی سرعت می‌گردد.

از طرفی، در تهیه‌ی شبیه تقریب‌هایی به کار رفته اند که این امر هم تا حدودی در افزایش اندازه‌ی خطای شبیه دخیل می‌باشد. از دیگر عوامل مؤثر می‌توان به استفاده از پروانه‌ی آبی جهت اندازه‌گیری سرعت جریان در سرریز واقعی اشاره کرد. شاید استفاده از ابزار دقیق جهت اندازه‌گیری سرعت می‌توانست امکان مقایسه دقیق‌تری را از نتایج شبیه ریاضی با شبیه تجربی فراهم نماید.

پس از مطالعه‌ی روند اجرای برنامه و همچنین بررسی فراسنج‌های مؤثر، می‌توان استنتاج کرد که شبکه‌ی اجزاء محدود مورد استفاده برای تعیین مقادیر سرعت در گره‌ها

اجزاء با توجه به متوسط خطای نسبی شبیه کافی بوده و در این حالت می‌توان گفت که شبیه ریاضی مستقل از شبکه عمل می‌کند.

گفتنی است که با افزایش شمار اجزاء، زمان لازم جهت محاسبات نیز افزایش قابل توجهی داشت. لذا، بهتر است در گسسته‌سازی، بسته به اندازه‌ی حساسیت نواحی حل، از اجزاء با اندازه‌های متفاوت استفاده نمود تا بتوان با اجزای به‌کارگرفته بهترین نتایج را به دست آورد.

مقدار متوسط خطای نسبی شبیه ریاضی به ازای شمار اجزاء برابر با ۹۵۰، ۱۴۶۵ و ۲۳۴۲، به ترتیب برابر با ۴/۶، ۱/۵ و ۱/۲۴ درصد به‌دست آمد. همچنین، بیشترین خطای نسبی شبیه ریاضی مربوط به گره ۴۱ و مقدار آن به‌ازای شمار اجزاء برابر با ۹۵۰، ۱۴۶۵ و ۲۳۴۲، به ترتیب برابر با ۱۸/۸۰، ۱۲/۴۱ و ۵/۸۸ حاصل گردید. با افزایش شمار اجزاء به بیش از ۲۳۴۲، درصد خطای نسبی شبیه کاهش محسوسی نداشت و به نظر می‌رسد که این شمار

جدول ۳- درصد خطای شبیه در تعیین سرعت نقاط مختلف روی سرریز به ازای بهترین شبکه‌بندی مورد نظر (۱۴۶۵ اجزاء)

شماره‌ی گره	مختصات x گره (m)	مختصات y گره (m)	سرعت حاصل از شبیه ریاضی ($\frac{m}{s}$)	سرعت حاصل از شبیه تجربی ($\frac{m}{s}$)	اختلاف	درصد خطا
۴۰	۰/۰۰	۷/۰۰	۰/۸۸	۰/۸۸	۰/۰۰	۰/۰۰
۴۷	۱/۹۰	۷/۰۰	۰/۸۸	۰/۸۸	۰/۰۰	۰/۰۰
۴۶	۳/۷۹	۶/۹۷	۰/۸۸	۰/۸۸	۰/۰۰	۰/۰۰
۴۵	۵/۶۸	۶/۹۵	۰/۸۸	۰/۸۸	۰/۰۰	۰/۰۰
۴۴	۷/۵۷	۶/۹۳	۰/۹۳	۰/۹۲	۰/۰۱	۱/۰۸
۴۳	۹/۴۵	۶/۸۹	۱/۰۳	۱/۰۲	۰/۰۱	۰/۹۷
۴۲	۱۱/۳۴	۶/۸۷	۱/۲۸	۱/۲۸	۰/۰۰	۰/۰۰
۴۱	۱۳/۲۲	۶/۸۶	۱/۷۰	۱/۶۰	۰/۱۰	۶/۴۳
۳۳	۱۵/۱۰	۶/۶۶	۳/۵۵	۳/۵۱	۰/۰۴	۱/۱۳
۳۹	۱۶/۳۲	۶/۰۹	۴/۲۲	۴/۱۸	۰/۰۴	۰/۹۵
۳۸	۱۷/۳۱	۵/۲۰	۴/۸۱	۴/۶۵	۰/۱۶	۳/۳۳
۳۷	۱۸/۰۹	۴/۴۰	۴/۹۲	۴/۸۵	۰/۰۷	۱/۴۲
۳۶	۱۸/۶۶	۳/۸۰	۵/۱۰	۵/۰۱	۰/۰۹	۱/۷۶
۳۵	۱۹/۱۳	۳/۲۲	۵/۷۲	۵/۵۳	۰/۱۹	۳/۳۳
۳۴	۱۹/۵۴	۲/۶۱	۶/۴۴	۶/۲۹	۰/۱۵	۲/۳۳
۳۱	۱۹/۷۲	۲/۳۵	۶/۸۲	۶/۷۰	۰/۱۲	۱/۷۶

درصد خطای پایینی بود ولی به تدریج و با نزدیک شدن

به محل تاج، درصد خطا افزایش یافت.

بیشترین خطاها مربوط به گره‌هایی بودند که در پایین‌دست تاج سرریز قرار داشتند که در این ناحیه سرریز دارای انحنا می‌باشد. به تدریج، با حرکت به سمت پایین، اندازه‌ی درصد خطا تا حدودی کاهش یافت. بیشترین اندازه‌ی خطا به ازای شبکه‌بندی اولیه حدود ۱۰ درصد به دست آمد، که با افزایش شمار اجزاء و استفاده از شبکه‌بندی کوچکتر، این اندازه به کمتر از ۵ درصد کاهش

نتیجه‌گیری

در این تحقیق روش اجزاء محدود جهت بررسی نیمرخ سطح آب و اندازه‌ی سرعت آب در سرریز اوجی سد مخزنی دامغان مورد بررسی قرار گرفت و مقادیر به دست آمده از شبیه ریاضی با مقادیر اندازه‌گیری شده (شبیه تجربی) مقایسه شدند. موقعیت نیمرخ سطح آزاد در حالت بدهی طراحی تطابق نسبتاً خوبی با نتایج حاصل از روش تجربی داشت. نیمرخ سطح آب محاسباتی در ابتدا دارای

منابع:

1. Cassidy, J. J. 1965. Irrotational flow over spillways of finite height. *J. Engin Mech Div.* 91(6): 155-173.
2. Chatila, J and M. Tabbara. 2004. Computational modeling of flow over an ogee spillway. *Comput Struct.* 82: 1805-1812.
3. Chunrong, L., H. Aode, and M. Wenju. 2002. Numerical and experimental investigation of flow over a semicircular weir. *Acta Mech Sinica.* 18: 594-602.
4. Dargahi, B. 2006. Experimental study and 3D numerical simulations for a free over flow spillway. *J. Hydraul Eng-ASCE.* 132: 899-907.
5. Ferrari, A. 2010. SPH simulation of free surface flow over a sharp-crested weir. *Adv Water Resour.* 33: 270-276.
6. Ferziger J. H. and M. Peric. 2002. Computational methods for fluid dynamics. Third edition, Springer publisher. 374 pp.
7. Hasani, A. 2003. The analysis of potential flow over the weir by application of mathematical optimization method, MSc. Thesis. University of Science and Technology, 77 pp (In Persian).
8. Henderson, H. C., M. Kok, and W. L. Dekoning. 1991. Computer-aided spillway design using the boundary element method and non-linear programming. *Int J. Numer meth Fl.* 13: 625-641.
9. Kirkgoz M. S., M. S. Akoz, and A. Oner. Numerical modeling of flow over a chute spillway. *J. Hydraul Res.* 47(6): 790-797.
10. Karimi, M and H. Mussavi Jahromi. 2010. Characterization of flow regimes over stepped spillways by applying ANSYS. *Proceeding of 9th Hydraulic Conference.* Tarbiat Modares University (In Persian).
11. Majzubi, GH. 1997. The finite element method in engineering. Bu-

یافت. پس از محاسبه‌ی اندازه‌های سرعت روی گره‌ها و مقایسه‌ی آنها با مقادیر تجربی به‌ازای شبکه‌بندی اولیه، مشاهده شد که اختلاف میان آنها نسبت به اختلاف به‌دست آمده در محاسبه‌ی نیمرخ سطح آب بیشتر است. روند افزایش و کاهش درصد خطای سرعت نیز مانند نیمرخ سطح آب بود. نتایج به دست آمده حاکی از آن بودند که حساسیت مقادیر سرعت به شمار اجزاء در نظر گرفته شده در روش اجزاء محدود به مراتب بیشتر از اندازه‌های نیمرخ سطح آب می‌باشد. با توجه به نتایج به دست آمده از شبیه ریاضی و مقایسه آن با مقادیر شبیه تجربی، حداکثر و متوسط خطای نسبی شبیه ریاضی در تعیین سرعت جریان به ازای شبکه‌بندی اولیه به ترتیب برابر با ۲۹/۸ و ۱۲/۵ درصد به دست آمدند.

با به‌کارگیری شبکه‌بندی‌های کوچکتر و شمار اجزاء بیشتر، مقدار خطای نسبی شبیه ریاضی به‌طور محسوسی کاهش یافت و به ازای شمار اجزاء برابر با ۲۳۴۲، متوسط خطای نسبی شبیه ریاضی بیش از ۱۱ درصد کاهش یافت. اختلاف بین مقایر محاسباتی و اندازه‌گیری شده برای نیمرخ سطح آب و سرعت جریان در بخش تاج سرریز و پایین دست آن به مراتب بیشتر از سایر نقاط بود که از مهمترین عوامل تاثیرگذار بر آن می‌توان به عدم برقراری فرضیات موجود در جریان بالقوه‌ای در این نواحی اشاره کرد. پس از بررسی نتایج شبیه ریاضی و مقایسه آن با نتایج شبیه تجربی می‌توان گفت که تطابق خوبی میان مقادیر محاسباتی و تجربی وجود دارد که این امر حاکی از قابلیت بالای روش اجزاء محدود در تحلیل جریان آب روی سرریزهای اوجی می‌باشد.

در پایان پیشنهاد می‌گردد تا مقایسه‌ای بین کارایی روش اجزاء محدود و شبیه‌های رایانه‌ای سه بعدی *Fluent* و *Flow3D*، که بر اساس روش عددی روش حجم محدود عمل می‌کنند و به دفعات به وسیله‌ی محققین مختلف جهت تحلیل جریان جریان آب بر روی سرریزها به کار گرفته شده‌اند، صورت گیرد.

سپاسگزاری

از داوران محترم این مقاله و پروفیسور هاگر که نظرات سازنده آنها موجب ارتقای علمی این مقاله گردیده است، قدردانی می‌شود.

- spillway. J. Hydraul Eng-ASCE. 125(9): 959-967.
15. Tabbara, M, J. Chatila, and R. Awwad. 2005. Computational simulation of flow over stepped spillways. Comput Struct. 83: 2215-2224.
16. Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor. 1989. The finite element method. 4th. edition. Vol. 1. London: MC Graw-Hill C
- Ali Sina University Publication. 776 pp (In Persian).
12. Reddy, J. N. 1993. An introduction to finite element method. 2nd edition. New York: MC Graw-Hill, Inc.
13. Savage B. M. and C. Johnson. 2001. Flow over ogee spillway: Physical and numerical model case study. J. Hydraul Eng-ASCE. 127(8): 640-649.
14. Song, C., and F. Zhou. 1999. Simulation of free surface flow over