

rfathi@mail.uk.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۱۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۳/۳)

P S

S

MeV ۵۰ keV

فیزیک ماده چگال [۴] و فیزیک جو و زمین [۵ و ۶] به کار گرفته می‌شوند. بررسی برخورد پروتون با هلیوم ابعاد گسترده-تری از برخورد یون - اتم را مشخص کرده و وسیله‌ای مناسب برای ارائه مدل‌های صحیح کوانتومی جهت فرمول‌بندی مسائل مربوط به اتم‌های چند الکترونی را فراهم می‌سازد. در خصوص تهییج تک الکترونی هلیوم کارهای نظری [۷ - ۱۱] و تجربی [۱۲ - ۱۴] فراوانی انجام شده است. در مورد فرآیندهای دو الکترونی کار مشکل‌تر است. در واقع پیچیدگی این نوع فرآیند را برهم‌کنش الکترون - الکترون ایجاد می‌نماید و برخی مواقع

در خصوص تهییج، یونیزاسیون و انتقال بار تک الکترونی در برخورد یون - اتم نظریه واحدی که بتواند در تمام محدوده انرژی پاسخگو باشد وجود ندارد. لذا روش‌های نظری متعددی در محدوده‌های انرژی مختلف برای کانال‌های متفاوت برخورد مطرح گردیده است. فرآیندهای تهییج، انتقال بار و یونیزاسیون در برخورد یون - اتم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. نتایج مربوط به سطح مقطع پراکندگی در برخورد یون - اتم در اکثر شاخه‌های فیزیک از جمله نجوم [۱ و ۲]، فیزیک پلاسما [۳]،

این تقریب در انرژی‌های برخورد بالا، تقریب مناسبی است ولی در انرژی‌های میانی و پایین خالی از اشکال نبوده و می‌بایست از تقریب‌های دیگری مانند تقریب‌های موج مختل شده در محاسبات استفاده نمود. همچنین یادآور می‌شویم که در محاسبات از یکای اتمی استفاده می‌شود.

در یک تقسیم‌بندی کلی می‌توان کارهای نظری را به روش‌های نیمه کلاسیکی، حل مستقیم معادله شرودینگر و کوانتمی یا اختلالی تقسیم نمود. هنگامی که سرعت پرتابه زیاد باشد می‌توان روش‌های اختلالی را برای حل مسئله تهییج به کار برد به طوری که منجر به تقریبی در چارچوب سری بورن خواهد شد. سابقه کار در مورد تهییج اتم در برخورد با یون به سال‌های قبل از ۱۹۶۰ باز می‌گردد. یکی از این کارها به‌کارگیری تقریب مرتبه اول بورن بود که در سال ۱۹۵۳ توسط بیت و گریفینگ [۲۶] انجام پذیرفت. در همین راستا تقریب مرتبه اول اپنهایمر - برینکمن - کرامرز برای مطالعه کانال انتقال بار الکترون استفاده گردیده بود [۲۷]. در سال ۱۹۶۴ برای مطالعه این کانال مدل دیگری که موج خروجی را مختل شده در نظر می‌گرفت [۲۸] مطرح شد و در برخورد الکترون با اتم [۲۹] و در برخورد پروتون با اتم هیدروژن [۳۰] به کار گرفته شد. بعداً نشان داده شد که این تقریب در زوایای کوچک پراکندگی تقریب مناسبی نیست [۳۱]. روش‌های دیگری نظیر روش پارامتر برخورد و جفت شدگی [۳۲ و ۳۳] که در محدوده انرژی میانی مناسب بود، مورد استفاده قرار گرفت. از جمله روش‌های اختلالی که در کانال تهییج و در برخورد پروتون با اتم هیدروژن به کار برده شده، مدل موج کولنی (DCW) است [۳۴]. علاوه بر تصحیحاتی که بر روی امواج ورودی و خروجی انجام می‌شد، در سال ۱۹۵۳ جکسون و شیف [۳۵] پیشنهاد دادند که سهم برهم‌کنش هسته‌ای نیز در تقریب مرتبه اول بورن گنجانده شود.

یکی از مهمترین جنبه‌های پراکندگی اتمی بلند برد بودن پتانسیل کولنی بوده که در نظریه‌های مبتنی بر ماتریس گذار

بسته به سرعت پرتابه [۱۵ و ۱۶] و مشخصات پراکننده [۱۷] این برهم‌کنش از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده و نمی‌توان از آن صرف نظر نمود. در فرآیندهای برخورد دو الکترونی و جایی که حتی از مدل الکترون مستقل استفاده می‌گردد می‌توان نشان داد که برهم‌کنش الکترون - الکترون در دینامیک برخورد نقش اساسی ایفا می‌کند [۱۸]. به دلیل نادیده گرفتن برهم‌کنش‌های بین الکترونی در فرآیندهای برخورد چند الکترونی مشاهده می‌گردد که همخوانی خوبی بین نتایج نظری و تجربی وجود ندارد [۱۹]. مشکل دیگر در برخورد یون با اتم‌های چند الکترونی این است که در انرژی‌های میانی کانال‌های مختلف غیر قابل تفکیک شده و این امر باعث پیچیدگی مسئله می‌گردد [۲۰]. لذا تعداد زیادی از نتایج تجربی مربوط به برهم‌کنش‌های چند الکترونی غیرقابل توجیه باقیمانده‌اند. البته در سال‌های اخیر کارهای فراوانی برای جلوگیری از پیچیدگی اتم‌های چند الکترونی با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های الکترونی صورت پذیرفته است [۲۱]. یکی از روش‌های بررسی پراکندگی در برخورد یون با اتم‌های چند الکترونی نظریه چگالی تابعی وابسته به زمان می‌باشد [۲۲].

هلیوم ساده‌ترین گزینه برای بررسی فرآیندهای چند الکترونی است. دینامیک و سینماتیک برخورد یون با هدف‌های چند الکترونی پیچیده است. برای حذف این پیچیدگی و ایجاد مدلی که برخورد را به صورت سه جسمی مورد بررسی قرار دهد مدل الکترون فعال مطرح می‌شود. در این مدل یک الکترون به صورت فعال و سایر الکترون‌ها در طول برخورد بدون تغییر در حالت در نظر گرفته می‌شود لذا الکترون‌های غیرفعال و هسته یک ذره بدون ساختار فرض می‌شوند. چیزی که در این مدل اهمیت دارد انتخاب پتانسیل مؤثر مناسب بین الکترون فعال و ذره‌ای که به جای دیگر الکترون‌ها و هسته فرض می‌شود است که بتواند حالت و انرژی یکسانی را با الکترون فعال نتیجه دهد. البته این کمیات به هم وابسته‌اند و روش خودسازگار را برای محاسبه آنها به کار می‌گیریم. [۲۳-۲۵]. لازم به ذکر است که در محاسبات انجام شده تابع موج ذره پرتابه را به صورت موج تخت در نظر خواهیم گرفت که البته

فادیف به دهه ۶۰ میلادی [۴۹ و ۵۰] بر می‌گردد. در سالیان اخیر نیز از این فرمول‌بندی برای مطالعه کانال‌های مختلف در برخوردهای اتمی استفاده شده است [۵۱-۵۴].

استفاده از فرمول‌بندی FWL (فادیف - واتسون - لاولیس) در فیزیک اتمی به علت بلند برد بودن باعث تکینگی روی پوسته انرژی می‌شود [۵۵]. برای رفع این اشکال، شکل‌های تقریبی ماتریس گذار دو جسمی نزدیک پوسته انرژی ارائه گردیده و یا معادلات فادیف برای گریز از جنبه‌های منفی بلند برد بودن پتانسیل کولنی تعدیل یافته‌اند [۵۶-۵۹]. در سال‌های اخیر روش دیگری شبیه به روش‌های تعدیل یافته فادیف که ماتریس گذار را با پتانسیل برهم‌کنش کولنی جایگزین نموده و آن را برای مطالعه در کانال تسخیر الکترون تحت عنوان تقریب مرتبه دوم بورن-فادیف به کار گرفته‌اند نیز مطرح شده است [۶۰]. کانال تهییج به صورت:

$$P + (T + e) \rightarrow P + (T + e)^* \quad (1)$$

تعریف می‌شود که در آن P پرتابه به جرم M_p و $T+e$ هدفی با یک الکترون فعال است. در این مقاله از علائم و روابط مقاله [۳۷] استفاده شده است. در رابطه با هدف هلیوم نیاز به طرح مدل الکترون است که در رابطه با اتم هیدروژن موضوعیت ندارد. در دستگاه مختصات مرکز جرم دستگاه سه ذره‌ای، سطح مقطع دیفرانسیلی در گذار از حالت اولیه i به حالت نهایی f با رابطه:

$$\left(\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} \right)_{C.M} = \frac{v_i v_f K_f}{4\pi^2 K_i} |T_{i \rightarrow f}|^2 \quad (2)$$

به ماتریس گذار T مرتبط می‌شود. در این رابطه v_i و v_f به ترتیب جرم‌های کاهش یافته و K_i و K_f اندازه حرکت‌های نسبی اولیه و نهایی پرتابه می‌باشند.

دقت می‌نمائیم که در محاسبات سطح مقطع دیفرانسیلی توسط روش فادیف به جای $T_{i \rightarrow f}$ کمیت A_{FWL} که دامنه پراکندگی فادیف - واتسون - لاولیس جایگزین خواهد شد. سطح مقطع دیفرانسیلی در چارچوب آزمایشگاه و مرکز جرم به صورت:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{lab} = \frac{(1 + \tau^2 + 2\tau \cos \theta)^{3/2}}{|1 + \tau \cos \theta|} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{C.M} \quad (3)$$

استاندارد (اختلالی توسعه یافته) باعث بروز تکینگی می‌شود [۳۶]. بنابراین برخی محققین با اعمال شرایط مرزی تصحیح شده نظریه موج واپیچیده پوسته بورن (CDWB) در فیزیک اتمی را مطرح کردند. کار حاضر مطالعه کانال تهییج در برخورد پروتون با اتم هلیوم به عنوان یک فرآیند سه ذره‌ای به دنبال کار مشابه در برخورد پروتون با اتم هیدروژن [۳۷] است.

اگر چه پیشرفت‌هایی برای حل مسئله سه جسمی صورت پذیرفته [۳۸ و ۳۹] ولی در حالت کلی حل چنین مسئله‌ای به طور دقیق بسیار مشکل است. در برخوردهای با انرژی بالا می‌توان از روش‌های اختلالی برای حل مسئله سه جسمی بهره گرفت ولی همگرایی جواب در استفاده از چنین روشی برای برخوردهای سه جسمی هنوز نامعلوم است [۴۰].

حل معادله پراکندگی سه جسمی توسط امواج جزئی از سال ۱۹۵۰ آغاز گردیده ولی مشکل این روش، همگرایی آن بسته به کاربرد پراکندگی و انرژی برخورد است. راحت‌تر است که از روش جایگزینی، با عنوان رهیافت معادله انتگرالی به جای معادله دیفرانسیلی استفاده کنیم. در این جایگزینی معادله شرودینگر به مجموعه‌ای از معادلات انتگرالی نظیر معادلات لیپمن - شوینگر یا معادلات انتگرالی فادیف تبدیل می‌شود. در واقع یک از پیشگامان مطرح نمودن این نظریه، فادیف می‌باشد [۴۱-۴۳] و می‌توان گفت که روش فادیف به طور غیرمستقیم به معادلات لیپمن - شوینگر برای برخوردهای سه جسمی مرتبط است. این روش توسط افرادی چون واتسون [۴۴]، لاولیس [۴۵]، آلت-گراسبرگر و سندهاوس [۴۶] و گلوکل [۴۷] بهینه گردیده‌اند. اساس این فرمول‌بندی استفاده از ماتریس گذار دو جسمی به همراه معادله لیپمن-شوینگر [۴۸] می‌باشد که فادیف با بازچینی مناسب معادلات انتگرالی، جملات ناهمبند را که عامل ابهام در هسته این معادلات انتگرالی بودند از بین برد زیرا به دلیل خوش تعریف نبودن هسته معادلات لیپمن-شوینگر در برخوردهای سه جسمی به‌کارگیری این معادلات به صورت مستقیم امکان‌پذیر نمی‌باشد. اولین محاسبات براساس فرمول‌بندی

هارتری - فاک و کوگا [۶۴، ۶۵ و ۶۶] محاسبه گردیده می‌توان پتانسیلی را به عنوان پتانسیل مؤثر که الکترون فعال در آن واقع گردیده در نظر گرفت که این پتانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V_{eff}(r) = \varepsilon + \frac{\nabla^2 \varphi_i(r)}{2\varphi_i(r)} \quad (۶)$$

از آن جا که شکل این پتانسیل پیچیده می‌شود می‌توان آن را به صورت ترکیب یک پتانسیل کولنی و یک پتانسیل کوتاه برد یوکاوا تقریب زده و توسط تعریف ضرابی که باید محاسبه گردند دو پتانسیل را به صورت دقیق بر روی یکدیگر منطبق نمود. باید دقت کرد که اثر پتانسیل کوتاه برد در ماتریس گذار ظاهر گردیده و دامنه پراکندگی کوتاه برد و جابجایی فازی را می‌بایست به این پتانسیل نسبت داد.

در مدل الکترون فعال که در محاسبات از آن استفاده نموده‌ایم یکی از الکترون‌های هدف چند الکترونی را به صورت فعال در نظر گرفته و مابقی الکترون‌ها غیرفعال فرض می‌گردند و به همراه هسته به عنوان یک ذره هدف در نظر گرفته می‌شوند. در این مدل از اثر پوشاندگی الکترون‌های غیرفعال بر روی بار هسته استفاده کرده و فرض خواهیم نمود که الکترون فعال بار مؤثر هسته را که روش محاسبه آن را شرح خواهیم داد مشاهده می‌کند. ساده‌ترین وضعیت در محاسبات بدین گونه است که برهم‌کنش‌ها را کولنی با بار مؤثر در نظر گرفته و با داشتن انرژی تراز مورد نظر که از سایر روش‌های موجود نظری و تجربی به دست آمده ترکیب توابع موج هیدروژنی را با بار مؤثر و با ضرائب مناسب چنان انتخاب نمائیم که با حل معادله شرودینگر انرژی قیدی تراز مورد نظر را برای الکترون فعال به دست آوریم.

برای محاسبه بار مؤثر کافی است که ضریب پوشاندگی را محاسبه نمائیم. طبق تعریف $Z_{eff} = Z - \lambda_i$ بوده [۶۷] که Z_{eff} بار مؤثر، Z بار هسته و λ_i ضریب پوشاندگی است. به این منظور و برای راحتی بحث، گروه‌های الکترونی را در اتم به ترتیب نزدیکی آنها به هسته طبق جدول ۱ شماره گذاری

به هم مرتبط می‌شوند به طوری که در این رابطه θ زاویه پراکندگی در چارچوب مرکز جرم برای جسم پراکنده شده و τ برابر با نسبت جرم پرتابه به جرم هدف (M_P/M_T) می‌باشد. سری پراکندگی فادیف - واتسون - لاولیس برای عملگر گذار متناظر با کانال تهییج به صورت [۶۱]:

$$\tau_E = T_{Pe} + T_{PT} + T_{PT} G_0^+ T_{Pe} + T_{Pe} G_0^+ T_{PT} + \dots \quad (۴)$$

می‌باشد که T_{xy} عملگر گذار دو جسمی مربوط به اندرکنش دو جسم x و y است. اگر پتانسیل برهم‌کنش این دو ذره با V_{xy} نمایش داده شود، عملگر گذار دو جسمی به صورت:

$$T_{xy} = V_{xy} + V_{xy} G_0^+ T_{xy} \quad (۵)$$

تعریف می‌شود. G_0^+ عملگر گرین انتشار آزاد کل سیستم سه ذره‌ای است.

دامنه پراکندگی فادیف - واتسون - لاولیس، A_{FWL} ، با محاسبه عناصر ماتریس گذار بین حالت‌های اولیه و نهایی سیستم به دست می‌آیند و می‌توان شکل انتگرالی دامنه تهییج مرتبه اول را در مرجع [۳۷] مشاهده کرد.

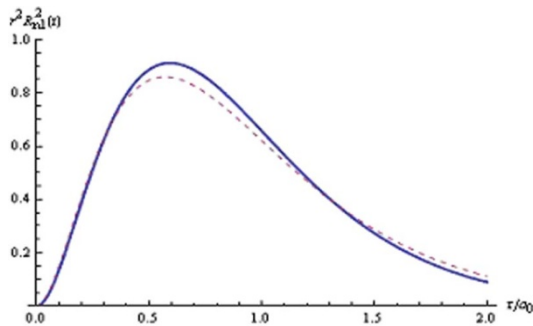
جهت ساده‌تر شدن محاسبات از جملاتی که از مرتبه نسبت جرم الکترون به جرم هدف، m/M_P ، یا پرتابه، m/M_T ، می‌باشند، صرف‌نظر کرده‌ایم.

در برهم‌کنش کولنی به دلیل بلند برد بودن این پتانسیل جنبه‌های منفی ماتریس گذار ظاهر گردیده و می‌توان نشان داد که این عملگر بر روی پوسته انرژی دارای تکینگی است و شکل صریحی برای آن وجود ندارد. بنابراین در محاسبات از شکل تقریبی این ماتریس گذار، نزدیک پوسته انرژی بهره گرفته می‌شود. در خصوص این ماتریس گذار و نحوه محاسبه آن نزدیک پوسته انرژی و رسیدن به شکل استفاده شده این ماتریس گذار در محاسبات مورد نظر، خواننده را به مراجع [۵۶، ۶۲ و ۶۳] ارجاع می‌دهیم.

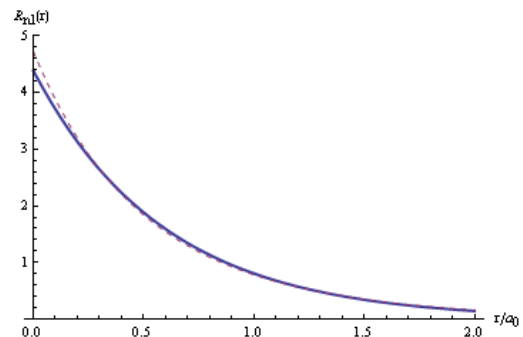
در محاسبات مربوط به اتم‌های چند الکترونی می‌توان از روش پتانسیل مؤثر بهره گرفت. این مطلب بحث این مقاله را با مقاله [۳۷] مجزا می‌نماید. با این فرض که الکترون فعال در حالت اولیه و پایه خود با تابع موج φ_i توصیف می‌گردد و این تابع موج برای اکثر اتم‌های چند الکترونی توسط

جدول ۱. شماره گذاری گروه‌های الکترونی

۱s	(۲s, ۲p)	(۳s, ۳p)	۳d	(۴s, ۴p)	نمایش الکترونی گروه
۱	۲	۳	۴	۵	



شکل ۲. خط ممتد توزیع چگالی احتمال تابع موج تک‌تایی و خط چین توزیع چگالی احتمال تابع موج دو تایی است.



شکل ۱. خط ممتد تابع موج تک‌تایی و خط چین تابع موج دو تایی است.

به همین ترتیب برای ساختار الکترونی (۱s۲s) و الکترونی که در تراز ۲s واقع گردیده این ضریب برابر $\lambda_i = 0/85$ بوده و بار مؤثر مشاهده شده توسط الکترون فعال $Z_{eff} = 1/15$ محاسبه می‌گردد.

تابع موج تک الکترونی در حالت پایه اتم هلیوم به صورت تک‌تایی و تک دو تایی به روش روتان - هارتری فاک محاسبه گردیده [۶۷] و در شکل‌های ۱ و ۲ این دو تابع موج و توزیع چگالی احتمال وابسته به آنها مقایسه گردیده‌اند. یکی از روش‌های محاسبه تابع موج تک الکترونی حالت‌های برانگیخته استفاده از روش CHF [۶۸] می‌باشد. در شکل‌های ۳ و ۴ دو تابع موج تک الکترونی و توزیع چگالی احتمال وابسته به آنها در اتم هلیوم که به روش CHF و ترکیب توابع موج هیدروژنی با در نظر گرفتن اثر همپوشانی محاسبه گردیده‌اند، مقایسه شده‌اند. این دو تابع موج برای تراز ۲s به گونه‌ای نوشته شده‌اند که منجر به انرژی کل مربوط به حالت برانگیخته 2^1S خواهند شد. دو تابع موج در نظر گرفته شده برای الکترون فعال در تراز 2^1S و 2^3S به ترتیب به صورت توابع:

$$R_{p1s}(r) = 0/86(1 - 1/15 \frac{r}{a_0}) \exp(-1/15 \frac{r}{a_0}) + 0/27 \exp(-1/6875r) \quad (7)$$

و

می‌کنیم. جهت محاسبه ضریب پوشاندگی می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

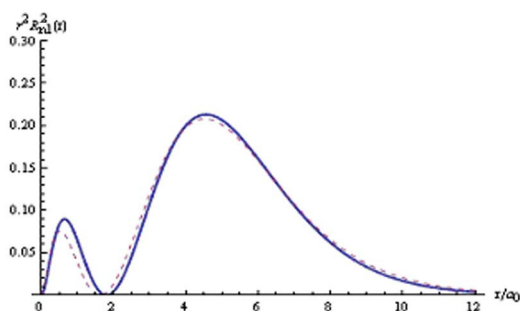
(الف) هر الکترون که به گروه بالاتر از گروه الکترون مورد نظر اختصاص دارد دارای ضریب پوشاندگی صفر است.

(ب) هر الکترون متعلق به همان گروه الکترون مورد نظر با ضریب پوشاندگی $0/35$ در نظر گرفته می‌شود مگر اینکه الکترون در تراز ۱s باشد که در این صورت ضریب پوشاندگی $0/31$ است.

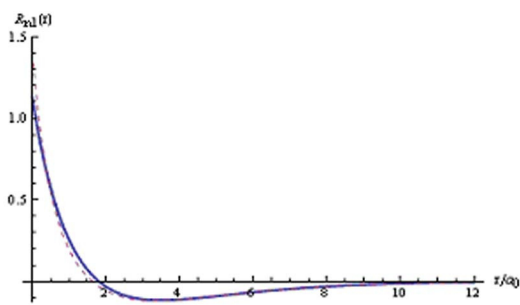
(ج) از هر گروه یک مرتبه پایین‌تر ضریب $0/85$ است، اگر الکترون مورد نظر از گروه s و p باشد ولی اگر الکترون از گروه d یا f باشد ضریب پوشاندگی برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود.

(د) از هر گروه باز هم پایین‌تر برای هر الکترون ضریب برابر واحد فرض می‌گردد.

در مورد هلیوم اگر قرار باشد محاسبات فادیف تکرار شود برای ساختار $1s^2$ می‌توان بار مؤثر الکترون فعال در تراز ۱s را برابر $Z_{eff} = 1/69$ در نظر گرفت به عبارتی در این حالت ضریب پوشاندگی $\lambda_i = 0/31$ است که با مقادیر به دست آمده از روش محاسباتی روتان - هارتری فاک یعنی $1/6875$ قابل مقایسه است.



شکل ۴. خط ممتد توزیع چگالی احتمال تابع موج تک الکترونی تراز ۲s به روش ترکیب توابع موج هیدروژنی با اثر پوشانندگی و خط چین توزیع چگالی احتمال تابع موج تک الکترونی تراز ۲s به روش CHF است.



شکل ۳. خط ممتد تابع موج تک الکترونی تراز ۲s به روش ترکیب توابع موج هیدروژنی با اثر پوشانندگی و خط چین تابع موج تک الکترونی تراز ۲s به روش CHF است.

در محاسبات انجام شده به جای ماتریس گذار، TPe در جمله مرتبه اول الکترونی $A_e^{(1)}$ پتانسیل برهم کنش V_{Pe} قرار داده شد. جاگذاری پتانسیل برهم کنش V_{PT} به جای ماتریس گذار T_{PT} در جمله مرتبه اول هسته‌ای به دلیل تعامد حالت‌های ابتدایی و نهایی صفر خواهد شد. لذا این جاگذاری برای جمله مرتبه اول هسته‌ای انجام نشد. این روش را آن گونه که معمول است تقریب بورن-فادیف می‌نامیم. از آنجا که در زوایای پراکندگی بزرگ در کانال تهییج جمله هسته‌ای غالب است اثر قابل ملاحظه‌ای در سطح مقطع دیفرانسیلی خواهد گذاشت. حذف این جمله خطای محاسبه را زیاد خواهد نمود. اعمال تقریب بورن-فادیف در جمله هسته‌ای آن را در تمام زوایا صفر می‌کند که مناسب نیست به عبارتی در محاسبه دامنه مرتبه اول هسته‌ای جملات دوم و بالاتر ماتریس گذار T_{PT} با اهمیت خواهند بود. لذا جمله مرتبه اول هسته‌ای با همان ماتریس گذار T_{PT} نزدیک پوسته انرژی حساب شده است.

بررسی اندازه دامنه‌های پراکندگی در انرژی‌های بالا نشان می‌دهند که دامنه‌ها را می‌توان در سه ناحیه بررسی نمود. در ناحیه اول جملات الکترونی غالب هستند. ناحیه دوم ناحیه‌ای است که این دو دامنه با یکدیگر قابل مقایسه می‌گردند و از نظر اندازه با هم تقریباً برابرند و در ناحیه سوم جملات هسته‌ای جملات غالب می‌باشند. ناحیه اول در زوایای کوچک پراکندگی و انرژی‌های کوچکتر مشهود است در صورتی که دو ناحیه

$$R_{\Psi_{2S}}(r) = 0.84(1 - 1/15 \frac{r}{a_0}) \exp(-1/15 \frac{r}{a_0}) + 0.7 \exp(-1/6.875r) \quad (8)$$

می‌باشند که انرژی قیدی الکترون فعال تراز ۲s اتم هلیوم به ترتیب اختلاف انرژی در حدود ۰/۵۴eV و ۰/۰۲۷eV با سایر روش‌های تجربی و نظری [۶۹] دارد.

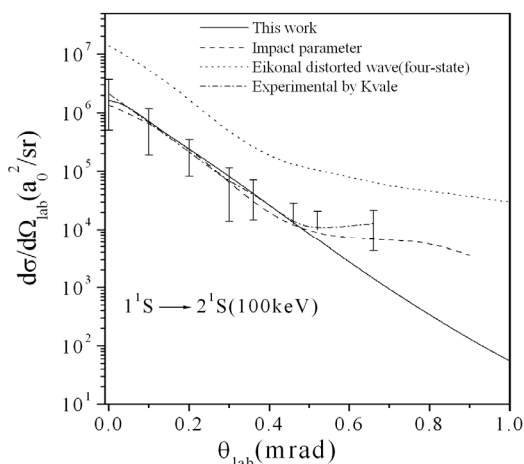
همچنین برای الکترون فعال در تراز ۲p و معادل تابع موج Ψ_{2P} هلیوم از تابع موج:

$$R_{\Psi_{2P}}(r) = 0.29r \exp(-1/15 \frac{r}{a_0}) \quad (9)$$

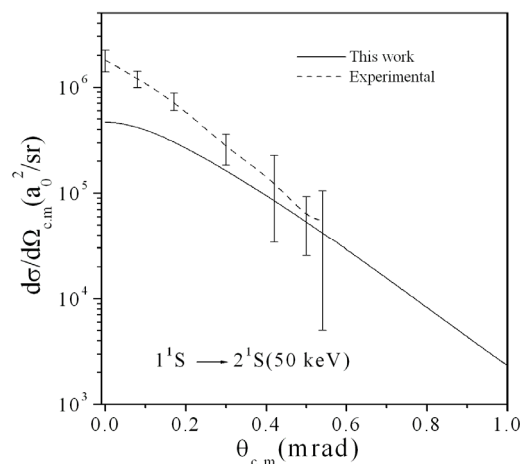
استفاده شده است.

محاسبه سطح مقطع جزئی در مورد اتم هلیوم مانند اتم هیدروژن است با این تفاوت که باید طرف دوم رابطه (۲) در تعداد الکترون‌های معادل در حالت اولیه، عدد ۲، ضرب شود.

دامنه‌های مرتبه اول الکترونی و هسته‌ای و فاز مربوطه و نهایتاً سطح مقطع دیفرانسیلی در تهییج تک الکترونی از حالت پایه اتم هلیوم به حالت‌های Ψ_{2S} ، Ψ_{2P} و Ψ_{3S} با استفاده از ترکیب توابع موج هیدروژنی و در نظر گرفتن ضریب پوشانندگی محاسبه شده‌اند. شکل منحنی‌های مربوط به دامنه‌های مرتبه اول الکترونی و هسته‌ای، سطح مقطع دیفرانسیلی و فاز مربوط به دامنه‌های مرتبه اول مانند منحنی‌های نتایج هیدروژن [۳۷] بوده و در این قسمت از آوردن آنها صرفنظر می‌شود.



شکل ۶. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبات انجام شده در انرژی ۱۰۰ keV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1S$ با کار تجربی کوال [۱۴] و محاسبات نظری [۷ و ۹].



شکل ۵. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبات انجام شده در انرژی ۵۰ keV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1S$ با کار تجربی [۱۴].

برای توصیف برخورد در کانال‌های مختلف و در دامنه انرژی-های میانی و بالا که محاسبات ما نیز این دامنه انرژی را شامل می‌شود تعریف گردیده که تعدادی از آنها وقتی در محاسبات به کار گرفته می‌شوند در زوایای کوچک پراکندگی و تعدادی دیگر در زوایای بزرگ پراکندگی همخوانی خوبی با داده‌های تجربی دارند. بیشترین مشکل ماتریس گذار کولنی در انرژی‌های میانی و در زوایای کوچک و نزدیک به صفر پراکندگی است و به همین دلیل در زوایای کوچک پراکندگی نتایج اکثر محاسبات نظری با هم متفاوت است. دلیل این امر غیر فیزیکی بودن پراکندگی‌های مستقیم است که در این شرایط انتقال اندازه حرکت از پرتابه به هدف یا در نظر گرفته نمی‌شود و یا خیلی کوچک فرض می‌گردد.

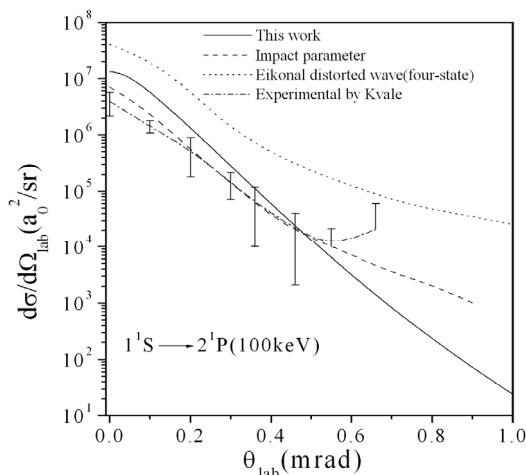
در شکل‌های ۵ و ۶ سطح مقطع دیفرانسیلی تهییج به حالت 2^1S در دو انرژی آمده و با نتایج کار تجربی [۱۴] مقایسه گردیده‌اند. همین نتایج برای تهییج به حالت 2^1P در شکل‌های ۷ و ۸ در همان دو انرژی برخورد آمده و با نتایج تجربی [۱۴] مقایسه شده‌اند. در انرژی برخورد ۱۰۰ keV محاسبات نظری [۷ و ۹] موجود است که در شکل‌های ۶ و ۸ با نتایج این کار مقایسه شده‌اند. بین نتایج این کار و نتایج تجربی و نتایج نظری بر مبنای پارامتر برخورد که یک فرمول‌بندی نیمه کلاسیکی

دیگر در انرژی‌های بزرگتر و زوایای پراکندگی بزرگتر ظاهر می‌گردند. بررسی اندازه دامنه‌های مرتبه اول الکترونی و هسته-ای در گذارهای $1^1S \rightarrow 2^1S$ و $1^1S \rightarrow 2^1P$ در مقایسه با گذارهای متناظر در اتم هیدروژن نشان می‌دهد که ناحیه دوم و سوم در اتم هلیوم در زوایای بزرگتر پراکندگی ظاهر می‌گردد. این سه ناحیه در انرژی‌های برخورد بزرگتر وضوح بیشتری پیدا می‌کنند. چون در تقریب اول محاسبات انجام شده است لذا پراکندگی دوگانه مشاهده نمی‌گردد و در منحنی‌ها قله‌ای نظیر قله توماس وجود ندارد. خاطر نشان می‌سازیم که در گذار از حالت پایه به تراز $2p$ برای محاسبه سطح مقطع دیفرانسیلی و کل از مجموع سطح مقطع دیفرانسیلی و کل زیر ترازهای مربوط به این گذار به صورت

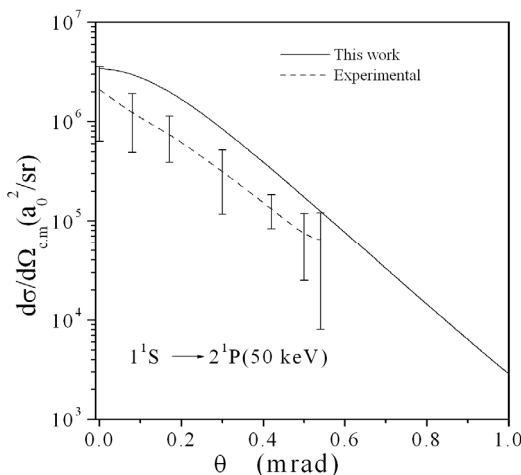
$$\sigma_{2p} = \sigma_{2p_0} + \sigma_{2p_{-1}} + \sigma_{2p_{+1}}$$

گذار $1s \rightarrow 2p_{-1}$ با دامنه‌های گذار از حالت $1s \rightarrow 2p_{+1}$ برابر بوده ولی قسمت‌های حقیقی و موهومی جملات مرتبه اول دامنه پراکندگی مربوط به این دو گذار با یک علامت منفی از هم متفاوت خواهند بود.

دینامیک برخورد در ماتریس گذار نهفته است و برای توصیف دینامیک متناسب با برخورد انجام شده، می‌بایست ماتریس گذار مناسب تعریف گردد. ماتریس‌های گذار زیادی



شکل ۸. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبات انجام شده در انرژی 100 keV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1P$ با کار تجربی کوال [۱۴] و محاسبات نظری [۷ و ۹].



شکل ۷. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبات انجام شده در انرژی 50 keV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1P$ با کار تجربی [۱۴].

این امر در گذار 2^1P (شکل ۸) بیشتر به چشم می‌خورد. تفاوت در زوایای بزرگ‌تر پراکندگی را می‌توان به در نظر گرفته نشدن تقریب‌های مرتبه‌های بالاتر نسبت داد.

مقایسه نتایج مربوط به سطح مقطع دیفرانسیلی تهییج اتم هلیوم در مقایسه با اتم هیدروژن نشان می‌دهند که در نظر گرفتن جملات مرتبه‌های بالاتر در زوایای بزرگ پراکندگی در مورد هلیوم از اهمیت بیشتری نسبت به اتم هیدروژن برخوردار است. تفاوت نتایج مربوط به سطح مقطع دیفرانسیلی تهییج گذار $1^1S \rightarrow 2^1P$ برای اتم هلیوم در مقایسه با گذار $1s \rightarrow 2p$ در اتم هیدروژن را می‌توان به انرژی قیدی بزرگ‌تر الکترون فعال در اتم هلیوم نسبت داد. مقایسه نتایج به دست آمده برای دو فرآیند $1^1S \rightarrow 2^1S$ و $1^1S \rightarrow 2^1P$ در اتم هلیوم با نتایج گذارهای $1s \rightarrow 2s$ و $1s \rightarrow 2p$ در اتم هیدروژن نشان می‌دهد که سطح مقطع دیفرانسیلی تهییج در هلیوم با سرعت بیشتری بر حسب زاویه نسبت به گذارهای مشابه در اتم هیدروژن افت می‌کند. این مسئله نشان دهنده این است که در اتم هلیوم و در زوایای بزرگ‌تر پراکندگی در نظر گرفتن جملات مرتبه بالاتر در مقایسه با اتم هیدروژن از اهمیت بیشتری برخوردار است. همچنین در زوایای نزدیک به صفر سطح مقطع دیفرانسیلی دو گذار $1^1S \rightarrow 2^1S$ و $1^1S \rightarrow 2^1P$ در مقایسه با گذارهای مشابه

است در زوایای کوچک تطابق وجود دارد. این کار با نتایج تجربی در انرژی برخورد 50 keV همخوانی ندارد. این عدم تطابق احتمالاً به دلیل برقرار نبودن مدل حاضر در انرژی‌های پایین است.

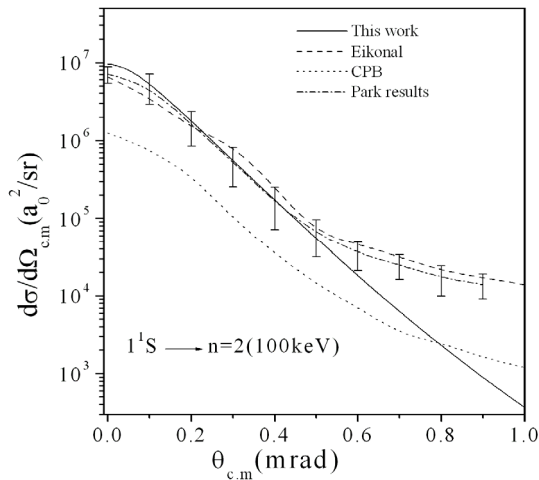
برای گذار به حالت برانگیخته 2^1P محاسبات موجود با نتایج آزمایشگاه اختلاف‌هایی دارد. بررسی این اختلاف مهم است و باید دید که آیا این اختلاف به دلیل حذف شدن برخی جملات در تقریب است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود در برخوردهای مستقیم و در زاویه صفر پراکندگی در تقریب آیگونال^۱ (چهار حالت^۲) (شکل‌های ۶ و ۸) چون جفت شدگی 2^1S با 2^1P در نظر گرفته می‌شود، سطح مقطع دیفرانسیلی گذار به حالت 2^1S در زوایای نزدیک به صفر نسبت به نتایج نظری دیگر بزرگ‌تر است. در صورتی که این اتفاق در محاسبات آیگونال (دو حالت^۳) و تقریب مرتبه اول بورن مشاهده نمی‌گردد. مشاهده می‌شود که نتایج ما در زوایای کوچک پراکندگی به نتایج موج واپیچیده استفاده شده در تقریب آیگونال نزدیک‌تر می‌باشد و

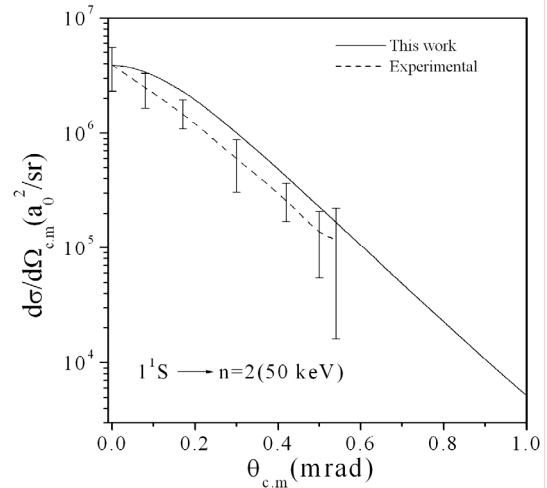
۱. Eikonal

۲. Four state

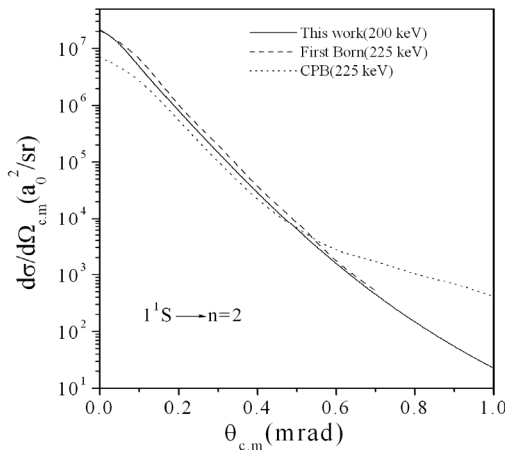
۳. Two state



شکل ۱۰. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبات انجام شده در انرژی ۱۰۰ keV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1P + 2^1S$ با کار تجربی پارک [۱۳] و محاسبات نظری [۷] و [۸].



شکل ۹. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبات انجام شده در انرژی ۵۰ keV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1P + 2^1S$ با کار تجربی [۱۳].



شکل ۱۱. مقایسه سطح مقطع دیفرانسیلی محاسبات انجام شده در انرژی ۲۰۰ keV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1P + 2^1S$ با محاسبه تقریب مرتبه اول بورن [۱۰] و کار نظری [۸] در انرژی ۲۲۵ keV

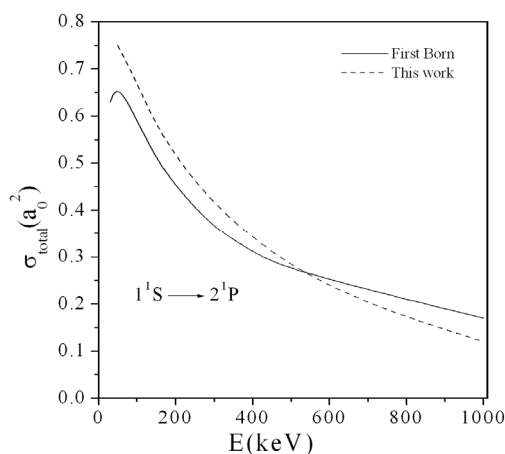
می‌گردد. در هر صورت شکل منحنی‌های محاسبه شده به روش CPB با روش حاضر متفاوت است.

شکل ۱۱ سطح مقطع دیفرانسیلی این کار را برای گذار از حالت پایه اتم هلیوم به گذارهای 2^1S و 2^1P در انرژی ۲۰۰ keV را با نتایج نظری و تجربی مراجع [۷-۱۰ و ۱۴] مقایسه کرده است. باید دقت شود که در شکل ۱۱ نتایج دو روش نظری [۸ و ۱۰] در انرژی ۲۲۵ keV حاصل شده است.

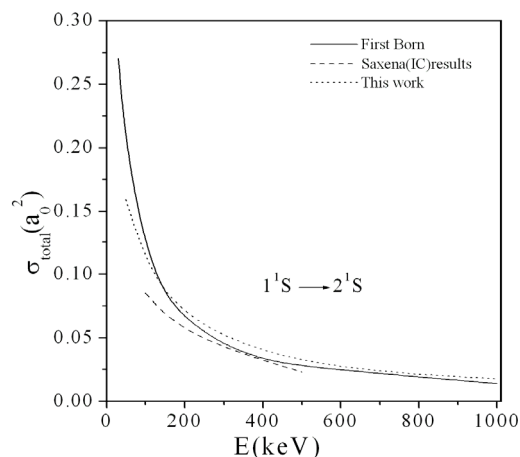
محاسبات مورد نظر نشان می‌دهند که سطح مقطع

هلیوم، نسبت به اتم هیدروژن عنوان نمود. در این زوایا و بزرگ‌تر بودن انرژی قیدی الکترون فعال در مقایسه با اتم هیدروژن کوچک‌تر باشند. شاید بتوان یکی از دلایل این تفاوت را انتقال کوچک اندازه حرکت پرتابه به هدف در این زوایا و بزرگ‌تر بودن انرژی قیدی الکترون فعال در

هلیوم، نسبت به اتم هیدروژن عنوان نمود. در شکل‌های ۹ و ۱۰ نتایج گذار از حالت پایه هلیوم به تراز $n=2$ در انرژی ۵۰ keV و ۱۰۰ keV رسم شده و با نتایج کار نظری به روش آیکونال [۷] و محاسبات CPB [۸] و تجربی [۱۳] مقایسه گردیده است. خاطر نشان می‌سازیم که منظور از سطح مقطع دیفرانسیلی تراز $n=2$ مجموع سطح مقطع‌های دیفرانسیلی 2^1S و 2^1P می‌باشد. مقایسه نتایج حاصل شده به روش CPB نشان می‌دهد که در زوایای بزرگ پراکنندگی نتایج روش CPB بالاتر از نتایج ما واقع می‌گردد دلیل این امر در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های بین هسته‌ای در تقریب‌های مرتبه‌های بالا است به عبارتی این روش جمع روی تمام تقریب‌های بورن بوده که در آنها برهم‌کنش‌های بین هسته‌ای در نظر گرفته شده است ولی خود این روش یک روش از تقریب مرتبه اول برهم‌کنش الکترونی است و به همین دلیل است که نتایج آن در زوایای نزدیک به صفر زیر نتایج نظری دیگر واقع



شکل ۱۳. مقایسه محاسبات سطح مقطع کل انجام شده در محدوده انرژی ۵۰keV الی ۱MeV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1P$ با تقریب مرتبه اول بورن [۱۰].



شکل ۱۴. مقایسه محاسبات سطح مقطع کل انجام شده در محدوده انرژی ۵۰keV الی ۱MeV و در گذار از حالت $1^1S \rightarrow 2^1S$ با تقریب مرتبه اول بورن [۱۰] و محاسبات نظری [۱۱].

گرفته‌اند. ممکن است که این تفاوت به فاز دامنه‌ها و سازنده شدن این فازها در زوایای کوچک پراکندگی نسبت به نتایج هیدروژن و انتخاب توابع موج به کار رفته در محاسبات هلیوم باز گردد. مقایسه نتایج حاصل شده با تقریب مرتبه اول بورن (شکل ۱۳) نشان می‌دهد که در گذار 2^1P نتیجه گیری در مورد اتم هیدروژن و در انرژی‌های بالا در این جا هم صادق است. در این خصوص نیز می‌توان گفت که تقریب‌های مرتبه‌های بالاتر در این گذار باید در نظر گرفته شود و همچنین بیانگر این مطلب است که در نظر گرفتن پتانسیل برهم‌کنش برای این گذار جمله مناسبی نمی‌باشد و باید برای توصیف این گذار از ماتریس گذار مناسب بهره گرفت.

در این کار محاسبه دامنه‌های پراکندگی در کانال تهییج در برخورد پروتون با اتم هلیوم به روش فادیف بررسی شد. سطح مقطع دیفرانسیلی و کل به دست آمده در این کار با محاسبات و نتایج تجربی مشابه مقایسه شد. از آنجا که در هیچکدام از مدل‌های نظری کوانتومی تطابق کامل با نتایج تجربی وجود ندارد، نیاز است کار تجربی و نظری بیشتری انجام شود. تکنولوژی‌های موجود این امکان را فراهم می‌سازد که نتایج تجربی مناسب‌تری را به دست آورد. ضمناً مشاهده شد که

دیفرانسیلی گذار $1^1S \rightarrow 2^3S$ در مقایسه با سطح مقطع دیفرانسیلی گذار $1^1S \rightarrow 2^1S$ بزرگ‌تر بوده و در زوایای بزرگ‌تر پراکندگی کندتر از گذار $1^1S \rightarrow 2^1S$ نزول می‌کند و این مسئله در تمامی انرژی‌های مورد بحث مشاهده می‌شود. این مسئله نیز به این دلیل اتفاق می‌افتد که الکترون فعال برای گذار از حالت پایه به حالت برانگیخته 2^3S نیاز به کسب اندازه حرکت کمتری از سوی پرتابه دارد به دلیل نداشتن نتایج نظری و تجربی مربوط به گذار 2^3S از آوردن نتایج این گذار صرف نظر کرده‌ایم.

شکل‌های ۱۲ و ۱۳، سطح مقطع کل تهییج اتم هلیوم برای گذار به حالت‌های 2^1S و 2^1P را نشان می‌دهد که با نتایج به دست آمده از کارهای نظری [۱۰ و ۱۱] مقایسه گردیده است. به دلیل در دست نبودن نتایج سطح مقطع کل مربوط به روش موج واپیچیده استفاده شده در تقریب آیگونال امکان مقایسه سطح مقطع کل محاسبه شده در این کار با نتایج آیگونال وجود ندارد. در شکل ۱۲ سطح مقطع کل گذار به حالت 2^1S با نتایج DW مقایسه شده است. اختلاف این دو نتیجه را شاید بتوان به توابع موج تقریبی به کار رفته در محاسبات مورد نظر نسبت داد. از طرفی مقایسه نتایج حاصل شده با تقریب مرتبه اول بورن نشان می‌دهد که در گذار 2^1S نتایج ما در محدوده انرژی مورد نظر بر خلاف نتایج هیدروژن بالاتر از نتایج بورن قرار

گرفته می‌شود، هیچگونه ضعف دیگری ندارد. با این حال محاسبات در زمان کوتاهی انجام می‌شود و از نظر اقتصادی نسبت به برخی روش‌ها با صرفه تر است. نتایج به دست آمده به روش‌های مبتنی بر فرمول‌بندی فادیف می‌تواند تجزیه و تحلیل فرآیندها را ممکن سازد و جزئیات برهم کنش‌ها را مشخص نماید.

محاسبات سطح مقطع برای گذار به حالت 2^3S بیشتر از گذار به حالت 2^1S است. این مطلب نیاز به بررسی از نظر تجربی و نظری دارد و می‌تواند به تغییر در حالت اسپینی پرتابه بستگی داشته باشد.

روش‌های مبتنی بر فرمول‌بندی فادیف کاملاً کوانتومی بوده و به غیر از اینکه تابع موج پرتابه به صورت موج تخت در نظر

- Boduch, X Husson and N Stolterfoht, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 222.
19. M Barat, *J. Phys. B* **25** (1992) 2205.
 20. H J Lüdde, T Krichner and M Horbatsch, *Quantum mechanical treatment of ion collisions with many-electron atoms*. In J. Burgdörfer, J. Cohen, S. Datz and C. R. Vane et al., Editors, Photonic, Electronic and Atomic collisions, Rinton Press, Princeton, (1998) 708.
 21. A L Godunov and J H McGuire, *J. Phys. B* **34** (2001) L223.
 22. H J Lüdde, A Henne, T Kirchner and R M Dreizler, *J. Phys. B* **29** (1996) 4423.
 23. F Decker and J Eichler, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 1530.
 24. E Engle and R M Dreizler, *J. Comput. Chem*, **20** (1999) 31.
 25. K Runge and D A Micha, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 022703.
 26. D R Bates and G W Griffing, *Proc. Roy. Soc., London. Ser.* **66** (1953) 961.
 27. H C Brinkman and H A Kramers, *Proc. Acad. Sci.*, **33** (1930) 973.
 28. L Vainshtein, L Presnyakov and I Sobelman, *Sov. Phys., JETP*, **18** (1964) 1383.
 29. D S F Crothers and R McCarroll, *Proc. Roy. Soc., London. Ser.*, **86** (1965) 753.
 30. R McCarroll and A Salin, *Proc. Phys. Soc.*, **90** (1967) 63.
 31. M R C McDowell and J P Coleman, *Introduction to the theory of ion-atom collision*, North Holland, Amsterdam (1970) 347.
 32. M R Flannery, *J. Phys.*, B **2** (1969) 1044.
 33. Y Kuang and C D Lin, *J. Phys.*, B **29** (1996) 1207.
 34. S Saxena, G P Gupta and K C Mathur, *J. Phys.*, B **17** (1984) 3743.
 35. J D Jackson and H Schiff, *Phys. Rev.*, **89** (1953) 359.
 36. D P Dewangan and J Eichler, *J. Phys.*, B **18** (1985) L65.
 37. R Fathi, E Ghanbari-Adivi, M A Bolorizadeh, F Shojaei, M J Brunger, *J. Phys.*, B **42** (2009) 125203.
 38. C Bottcher, *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 85.
 39. M Horbatsch, *J. Phys.*, B **17** (1984) 2591.
 40. S K Adhikari and W Glocule, *Phys. Rev.*, C **21** (1980) 54.
 1. D R Schultz, P S Krstic, T G Lee and J C Raymond, *Astrophys. J.*, **678** (2008) 950.
 2. R K Smith, N S Brickhouse, D A Liedahl and J C Raymond, *Astrophys. J.*, **556** (2001) L91.
 3. J S Yoon and Y D Jung, *Phys. Plasmas*, **6** (1999) 3391; J S Yoon, T Lho, Y H Jung, B Lee and S J Yoo, *J. Korean. Phys. Soc.*, **46** (2005) 855.
 4. E Meeks and P Ho, *Thin Solid Films*, **365** (2000) 334.
 5. A A Mihajlov, A M Ermolaev and Lj M Ignjatovic, *Astronomy and Astrophysics*, **419** (2004) 1.
 6. D C Cartwright, M J Brunger, L Campbell, B Mojarrabi and P J O Teubner, *J. Geophys. Res.*, **105** (2000) 20857.
 7. M R Flannery and K J McCann, *J. Phys. B* **7** (1974) 1558.
 8. S Datta, C R Mandal and S C Mukherjee, *J. Phys. B* **13** (1980) 4791.
 9. F Martin and A Salin, *J. Phys. B* **28** (1995) 1985.
 10. K L Bell, D J Kennedy and A E Kingston, *J. Phys. B* **1** (1968) 1028.
 11. S Saxena, G P Gupta and K C Mathur, *J. Phys. B* **19** (1986) 301.
 12. R Hippler and K H Scharfner, *J. Phys. B* **7** (1974) 618.
 13. J T Park, J M George, J L Peacher and J E Aldage, *Phys. Rev. A* **18** (1978) 48.
 14. T J Kval, D G Seely, D M Blankship, E Redd, T G Gay, M Kimura, E Rille, J L Peacher and J T Park, *Phys. Rev. A* **32** (1985) 1369.
 15. J Y Chensel, H Merabet, F Fremont, G Cremer, X Husson, D Lecler, G Rieger, A Spieler, M Grether and N Stolterfoht, *Phys. Rev. A* **53** (1996) 4198.
 16. J Y Chensel, F Fremont, B Sulik, C Ruiz-Mendez, H Merabet, C Bedouet, X Husson, M Grether and N Stolterfoht, *Nucl. Instrum. Methods. B* **154** (1999) 142.
 17. A Bordenave-Montesquieu and P Moretto-Capelle, in *The physics of electronic and atomic collision, XIX. International Conference, Whistler, Canada*, Edited by L J Dube, J B A Mitchell, J W McConkey and C E Brion, AIP Conf. Proc. **360** American Institute of Physics, New York (1995) 307.
 18. F Fremont, K Sommer, D Lecler, S Hicham, P

54. Y Wu, S Ishikawa and T Sasakawa, *Few body systems*, **15** (1993) 145.
55. J C Y Chen and A Chen, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **8** (1972) 72.
56. S Alston, *Phys. Rev. A* **52** (1995) 3860.
57. G V Avakov, L D Bolkhintsev, O Dias and A M Mukhamedzhanov, *J. Phys. B* **27** (1994) 3067.
58. A M Veselova, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **30** (1978) 395.
59. S P Merkurev, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **24** (1976) 150.
60. P S Vinitzky, Yu. V Popov and O Chuluunbaatar, *Phys. Rev. A* **71** (2005) 012706.
61. C J Joachain, "*Quantum collision theory*", North-Holland, Amsterdam (1975).
62. C S Shastri, L Kumar and J Callaway, *Phys. Rev. A* **1** (1970) 1137.
63. J C Y Chen, K T Chung and P J Kramer, *Phys. Rev.*, **184** (1969) 64.
64. E Clementi and C Roetti, *Atomic data and nuclear data tables*, **14** (1974) 178.
65. T Koga, *J. Phys. B* **31**, (1998) 1637.
66. T Koga, *J. Mol. Struct. (THEOCHEM)*, **451** (1998) 1.
67. J N Levine, "*Quantum chemistry*", 5th Ed., Prentice Hall, Upper Saddle River (2000).
68. G N Bhattacharya, G S Kastha and P K Mukherjee, *J. Phys. B* **14** (1981) 3007.
69. R L Mills, *Phys. Essays*, **18** (2005) 321.
41. L D Faddeev, *Sov. Phys., JETP*, **12** (1961) 1014.
42. L D Faddeev, "*Mathematical aspects of the three-body problem in Quantum scattering theory*", Davey, NewYork (1965).
43. L D Faddeev and S P Merkuriev, "*Quantum scattering theory for several particle systems*", Kluwer, Academic Publisher, Dordrecht (1993).
44. M L Goldberger and K M Watson, "*Collision theory*", Wiley, NewYork (1964).
45. C Lovelace, in: *Strong interactions and high-energy physics*, ed. R. G. Moorhouse, Oliver and Boyd, London (1964).
46. E O Alt, P Grassberger and Sandhas, *Nucl. Phys. B* **2** (1967) 167.
47. W Glöckle, *Nucl. Phys. A* **141** (1969) 620.
48. B A Lippmann and J Schwinger, *Phys. Rev.*, **79** (1950) 469.
49. R Aaron, R D Amado and Y Y Yam, *Phys. Rev.*, **140** (1965) B1291.
50. R Aaron and R D Amado, *Phys. Rev.*, **150** (1966) 857.
51. E Ghanbari Adivi and M A Bolorizadeh, *J. Phys. B* **37** (2004) 3321.
52. M J Roberts, *J. Phys. B* **37** (2004) 2869.
53. A Nogga, D Hüber, H Kamada and W Glöckle, *Phys. Lett. B* **409** (1997) 19.