

loran@cc.iut.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۱/۱۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۰/۴/۵)

معروف است فرض می‌شود که بعد پنجم به صورت حلقه‌ای با شعاع بسیار کوچک R در آمده است. در مکانیک موجی تکانه ذره در راستای این حلقه از رابطه $p_n = \frac{nh}{2\pi R}$ به دست می‌آید که در آن h ثابت پلانک و n مقادیر صحیح را اختیار می‌کند. به این ترتیب ناظر چهاربعدهی که از بعد پنجم بی‌خبر است ذره‌ای به جرم سکون m_0 و تکانه p_n را به صورت ذره‌ای به جرم $m_n = \sqrt{m_0^2 + \frac{p_n^2}{c^2}}$ مشاهده می‌کند که c سرعت نور است. این عبارت به برج کالوتسا-کلاین شهرت دارد به این معنا که نظیر هر ذره‌ای به جرم سکون m_0 در پنج بعد، دنباله نامتناهی از ذرات با جرم‌های مختلف در جهان چهاربعدهی

نظریه کالوتسا-کلاین^۱ [۱] از نخستین نظریه‌هایی است که برای وحدت بخشیدن به نیروهای الکترومغناطیسی از یک سو و گرانش از سوی دیگر ارائه شده است. در سال ۱۹۲۱ کالوتسا نسبت عام اینشتین را به پنج بعد گسترش داد. او نشان داد که از معادلات گرانش پنج بعدی، سه دسته معادله به دست می‌آید؛ دسته اول هم‌ارز با معادلات میدان اینشتین چهاربعدهی و دسته دوم هم‌ارز با معادلات ماکسول در الکترومغناطیس چهار بعدی است و معادله سوم یک میدان اسکالر را توصیف می‌کند [۱]. در تعمیم کلاین از مدل کالوتسا که به مدل کالوتسا-کلاین

۱. Kaluza-Klein

$${}^{(5)}dS^2 = \frac{l^2}{L^2} \left[h(x^\gamma, l) \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right] - dl^2. \quad (4)$$

از حل معادلات میدان اینشتین

$${}^{(5)}R_{AB} = 0 \quad (A, B = 1 \dots 5), \quad (5)$$

برای چنین متریکى معلوم می‌شود که [۲]:

$$h(x^\gamma, l) = \left(\frac{l-l_0}{l} \right)^2 k(x^\gamma) \quad (6)$$

که $k(x^\gamma)$ از معادلات میدان اینشتین تعیین نمی‌شود. چون

$${}^{(5)}R_{\mu\nu} = {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{3}{L^2} \frac{l^2}{(l-l_0)^2} {}^{(4)}g_{\mu\nu}. \quad (7)$$

از معادله (۵)، معلوم می‌شود که:

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = \frac{3}{L^2} \frac{l^2}{(l-l_0)^2} {}^{(4)}g_{\mu\nu}. \quad (8)$$

با مقایسه با معادلات میدان اینشتین در چهار بعد، داریم:

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = \Lambda {}^{(4)}g_{\mu\nu}, \quad (9)$$

نتیجه می‌گیریم که ثابت کیهان‌شناختی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Lambda = \frac{3}{L^2} \left(\frac{l}{l-l_0} \right)^2. \quad (10)$$

در مدل کانونیک فرض بر آن است که جرم سکون همه ذرات صفر است، پس،

$${}^{(5)}dS^2 = \left[\frac{l^2}{L^2} - \left(\frac{dl}{ds} \right)^2 \right] {}^{(4)}ds^2 = 0. \quad (11)$$

از حل معادله (۱۱) معلوم می‌شود که [۲]

$$l = l_0 e^{\pm \frac{s}{L}}, \quad (12)$$

که در آن s زمان ویژه عالم است که امروزه حدود ۱۳ میلیارد سال تخمین زده می‌شود. پس، «ثابت کیهان‌شناختی» که با کمک الگوی

(۴) محاسبه می‌شود، ثابت نیست و با زمان تغییر می‌کند [۲]

$$\Lambda^\pm(s) = \frac{3}{L^2} \frac{1}{\left(1 - e^{\mp s/L} \right)^2}, \quad (13)$$

در $s=0$ (لحظه انفجار بزرگ)، $\Lambda^\pm \rightarrow \infty$ میل می‌کند. در

پدیدار می‌شود که مشابه آن در طبیعت ما مشاهده نشده است. برای رفع این مشکل می‌شود فرض کرد که شعاع حلقه از مرتبه طول پلانک یعنی 10^{-32} cm باشد، به این ترتیب انرژی اولین حالت برانگیختگی از مرتبه انرژی پلانک خواهد شد. با این فرض، نظریه با مشاهدات تجربی کاملاً سازگاری دارد. مدل کالوتسا-کلاین توضیحی برای ثابت کیهان‌شناختی و منشاء جرم سکون ذرات به دست نمی‌دهد.

در ادامه این مقاله، در بخش دوم مدل کانونیک وسون را مرور می‌کنیم. در بخش سوم افت و خیزهای برداری حول پاسخ وسون را مطالعه کرده و در بخش چهارم حل معادله ژئودزیک تا مرتبه اول از افت و خیزها را ارائه می‌دهیم. نتایج این مقاله در بخش پنجم گردآوری شده است.

در مدل کانونیک وسون [۲]، جهان به صورت یک فضا-زمان تهی پنج بعدی در نظر گرفته می‌شود که ناظران آن را به شکل جهان چهار بعدی درک می‌کنند. در این مدل محور پنجم باز است و عمود بر فضا زمان چهار بعدی می‌باشد. همچنین قالب زیر برای متریک فرض می‌شود:

$${}^{(5)}dS^2 = \frac{l^2}{L^2} {}^{(4)}ds^2 - dl^2, \quad (1)$$

که در آن l مختصه نظیر بعد پنجم است و L یک پارامتر ثابت است که مقدار آن با ملاحظات تجربی تعیین می‌شود. ${}^{(4)}ds^2$ المان طولی چهار بعدی است که با رابطه زیر داده می‌شود:

$${}^{(4)}ds^2 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta}(x^\gamma, l) dx^\alpha dx^\beta. \quad (2)$$

متریک چهار بعدی رابطه فوق به صورت ضرب یک ضرب هم‌مدیس در متریک مینکوفسکی در نظر گرفته می‌شود:

$${}^{(4)}g_{\alpha\beta}(x^\gamma, l) = h(x^\gamma, l) \eta_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

در عبارت بالا، $h(x^\gamma, l)$ ، ضرب هم‌مدیس است و علامت متریک مینکوفسکی (+, -, -, -) در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه المان طولی پنج بعدی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

۲. این واگرایی نتیجه آن است که وسون ثابت انتگرال‌گیری در معادله (۱۲) را مساوی مقدار ثابت l_0 که در تابع $h(l)$ آمده می‌گیرد. چنان‌که ثابت انتگرال‌گیری را عدد دیگری بگیریم این واگرایی برطرف می‌شود.

به متریک پنج بعدی، مصداق میدان‌های برداری در فضای برداری هستند. دینامیک این افت‌وخیزها در فضای تهی پنج بعدی با معادله زیر داده می‌شود:

$${}^{(5)}R_{\mu 0} = l^\nu h^\lambda L^\gamma (\partial^\nu F_{\nu\mu} + m^\nu A_\mu) = 0, \quad (17)$$

که در آن

$$F_{\nu\mu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu,$$

و

$$m^\nu = -\frac{6}{L^\gamma} \frac{l^\nu}{(l-l_0)^\nu} = -2\Lambda. \quad (18)$$

به این ترتیب معلوم می‌شود که میدان‌های برداری میدان‌های تکیونی هستند. این نتیجه چندان هم دور از انتظار نیست. هرچند که فضای تهی پنج بعدی، یک فضای پایدار است اما به طور طبیعی انتظار داریم که جواب‌هایی که نظیر دنیاهایی با ثابت کیهان‌شناختی مثبت هستند، ناپایدار و یا فراپایدار^۱ باشند. آنچه در اینجا می‌بینیم آن است که حل وسون، یک پاسخ ناپایدار است چرا که افت‌وخیزها حول این پاسخ، میدان‌های تکیونی هستند.

نکته دیگر آن است که $m^\nu \neq 0$ به معنی انحراف از قانون عکس مجذوری در قانون کولن است که می‌شود آن را با حدود تجربی آن سنجید. در اینجا "جرم" فوتون از مرتبه 10^{-30} eV به دست می‌آید که این مقدار از حد بالای جرم فوتون که 10^{-18} eV است [۳] بسیار کوچکتر است. به این معنا این نتیجه قابل قبول است.

همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم، المان طولی چهار بعدی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$${}^{(4)}ds^2 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = h(l) \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

چاربردار سرعت را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (19)$$

با توجه به المان طولی چهار بعدی و چاربردار سرعت، ضریب بهنجارش به صورت زیر به دست می‌آید:

$\Lambda^- = 0$ و $\Lambda^+ = \frac{3}{L^\gamma}$ ، $s \rightarrow \infty$ به دست می‌آید. داده‌های رصدی با انتخاب Λ^+ برای ثابت کیهان‌شناختی توافق دارند. بر اساس این داده‌ها مقدار $L \approx 10^{28}$ cm به دست می‌آید. جالب آن است که انتخاب جواب Λ^+ با مشاهده عمومی تری در فیزیک هم توافق دارد و آن موضوعی است که در زیر به توضیح آن می‌پردازیم.

نیروی پنجم که از معادله ژئودزیک نتیجه می‌شود به شکل زیر است [۲]:

$$f^{\pm\mu} = \mp \frac{1}{L} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{1}{(e^{\pm s/L} - 1)}, \quad (14)$$

در حد $s \rightarrow 0$

$$f^{\pm\mu} \rightarrow (-1/s)(dx^\mu/ds),$$

و برای $s \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:

$$f^{+\mu} \rightarrow 0$$

و

$$f^{-\mu} \rightarrow (-1/L)(dx^\mu/ds),$$

از آنجایی که امروزه نیروی پنجمی در جهان چهار بعدی مشاهده نشده است باید $f^{+\mu}$ را انتخاب کنیم. علی‌الاصول چنین مشاهده‌ای ما را ناچار از برگزیدن Λ^+ برای ثابت کیهان‌شناختی می‌کند که با مشاهده تجربی در توافق است.

در این بخش با ایده‌ای شبیه به ایده کالتوسا-کلاین، افت و خیزهای برداری حول جواب وسون را مطالعه می‌کنیم برای این کار متریک زیر را در نظر می‌گیریم:

$${}^{(5)}ds^2 = \frac{l^\nu}{L^\gamma} [h(l) \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - (dl^\nu + A_\mu dx^\mu)^\nu], \quad (15)$$

که در آن،

$$A_\mu = A_\mu(t, x, y, z, l). \quad (16)$$

در بخش دوم دیدیم که:

$$h(l) = \left(\frac{l-l_0}{l} \right)^\nu.$$

با توجه به رهیافت کالتوسا-کلاین، افت و خیزهای اضافه شده

$$l^{\nu} h \frac{ds}{d\tau} u^{\mu} = c^{\mu}, \quad (25)$$

از این عبارت معلوم می شود که

$$l^{\nu} h \frac{ds}{d\tau} u^{\mu} u_{\mu} = c^{\mu} (g_{\nu\mu} c^{\nu}), \quad (26)$$

با استفاده از بهنجارش (۲۰) نتیجه می گیریم که

$$l^{\nu} h \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{\nu} = c^{\nu}, \quad (27)$$

که در آن

$$c^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} c^{\alpha} c^{\beta}. \quad (27)$$

با توجه به عبارت (۱۱)،

$$\left(\frac{dl}{d\tau}\right)^{\nu} = \frac{l^{\nu}}{L^{\nu}} \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{\nu}, \quad (28)$$

و در نتیجه معادله ژئودزیک (۲۱) به شکل زیر ساده می شود:

$$\frac{d}{ds} (\sqrt{hc^{\nu} u^{\mu}}) + \sqrt{c^{\nu}} f_{\nu}{}^{\mu} u^{\nu} = 0, \quad (29)$$

این معادله دقیقاً معادله نیروی لورنتس است که در آن نسبت بار الکتریکی به جرم ذره با رابطه زیر داده می شود،

$$\frac{e}{m} = \pm \frac{1}{\sqrt{h}}. \quad (30)$$

از آنجا که معادله ژئودزیک را تا مرتبه اول از فوتون‌ها حل کرده‌ایم، مجاز هستیم عبارت (۱۲) برای l را، در عبارت (۳۰) جایگزین کنیم^۱

$$\frac{e^{\pm}}{m} = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{L}\right)}, \quad (31)$$

در نتیجه در حد $s \rightarrow \infty$ اندازه نسبت بار به جرم به یک میل می کند. به این ترتیب در این مدل ذرات جرم‌دار حتماً باردار هستند و ذره جرم‌دار بدون بار وجود ندارد.

هرچند این پاسخ‌ها در حد $s \rightarrow 0$ و اگر هستند اما باید توجه

۱. در الکترومغناطیس ماکسولی بعد میدان‌های برداری از نظر تحلیل ابعادی، عکس طول می باشد و در نتیجه بار الکتریکی بدون بعد است. در الگویی که ما انتخاب کردیم، با توجه به اینکه میدان‌های برداری در راستای بعد پنجم به متریک کانونیک اضافه می شوند، بعد ندارند و در نتیجه بار الکتریکی دارای بعد عکس طول می شود.

۲. البته مقدار این نسبت به انتخاب ثابت انتگرال گیری در معادله (۲۵) بستگی دارد. آنچه که مهم است آن است که در این مدل این نسبت برای همه ذرات یکسان به دست می آید.

$$u^{\alpha} u_{\alpha} = 1, \quad (20)$$

که در آن متریک چهار بعدی عبارت است از:

$${}^{(4)}g_{\alpha\beta} = h\eta_{\alpha\beta}.$$

معادلات ژئودزیک برای x^{μ} از این قرار است:

$$\frac{1}{l^{\nu} h} \frac{d}{d\tau} (l^{\nu} h \frac{dx^{\mu}}{d\tau}) + \frac{L^{\nu}}{l^{\nu} h} \frac{dl}{d\tau} (h F_{\nu}{}^{\mu}) + \frac{L^{\nu}}{l^{\nu} h} \left(\frac{dl}{ds}\right)^{\nu} \partial_{\delta} (h A^{\mu}) - \frac{1}{\nu} [\nu l h + l^{\nu} \dot{h}] \frac{1}{h} (h A^{\mu}) = 0, \quad (21)$$

که در آن τ پارامتر آفین است. توجه می کنیم که در معادله (۲۱) اندیس‌ها با متریک $h\eta_{\alpha\beta}$ بالا و پایین می شوند.

می شود دید که اگر بستگی A^{μ} به مختصه l از صفر قرار دادن مجموع جملات سوم و چهارم تعیین شود، آن‌گاه معادلات بالا شبیه به معادلات لورنتس خواهند شد. چنین قیدی به این معنا است که:

$$\partial_{\delta} (h A^{\mu}) - \frac{1}{\nu} \frac{1}{l^{\nu} h} [\nu l h + l^{\nu} \dot{h}] (h A^{\mu}) = 0. \quad (22)$$

یعنی

$$A^{\mu}(t, x, y, z; l) = \frac{l}{L\sqrt{h}} a^{\mu}(t, x, y, z). \quad (23)$$

این نتیجه از ملاحظات تانسوری هم قابل انتظار بود. همان‌طور که در معادله (۱۵) می بینیم قسمت چهاربعدی متریک فضای پنج بعدی که یک تانسور رتبه دوی هموردا است با ضریب $\frac{l^{\nu}}{L^{\nu}} h$ به متریک مینکوفسکی مربوط می شود. پس انتظار داریم میدان‌های برداری A^{μ} که تانسورهای رتبه یک هستند با ضریب $\frac{l}{L\sqrt{h}}$ به تانسور رتبه یک a^{μ} مربوط شوند.

توجه می کنیم که معادله (۲۱) تا مرتبه اول میدان‌های برداری نوشته شده است و در آن از جملات مرتبه بالاتر از A_{μ} ها چشم پوشی شده است. تا این مرتبه می شود این معادله را ساده تر هم نوشت. به این ترتیب که ابتدا با بازنویسی همین معادله تا مرتبه صفرم از A_{μ} ها (نظیر حرکت ذره در غیاب میدان الکترومغناطیسی)، معادله ژئودزیک فوق را حل می کنیم

$$\frac{d}{d\tau} (l^{\nu} h \frac{dx^{\mu}}{d\tau}) = 0, \quad (24)$$

و در نتیجه:

مستقل می خواند.

در تعمیم مدل کانونیک با بهره گیری از ایده کالتوسا-کلاین، افت و خیزهای برداری حول این جواب را مطالعه کردیم.

خلاصه نتایجی که به دست آوردیم به شرح زیر است:

۱. این افت و خیزها نظیر میدانهای برداری تکیونی هستند که جرم آنها از طریق رابطه $m^2 = -2\Lambda$ به ثابت کیهان شناختی بستگی پیدا می کند.

۲. در این الگو، میدانهای برداری را وابسته به هر پنج مختصه فضا زمان در نظر گرفتیم. دیدیم که بستگی این میدانها به مختصه پنجم را می شود به گونه ای تعیین کرد که معادلات ژئودزیک شبیه معادله نیروی لورنتس شود.

۳. پیش گویی مدل آن است که در فضای چهار بعدی هر ذره جرم دار دارای بار الکتریکی است. اما از آنجا که این مدل نسبت بار به جرم را مقداری ثابت و برابر واحد می دهد، نمی شود این ذرات را هم ارز ذرات متعارفی مانند الکترون و پروتون دانست.

داشت که اصولاً انتظار نداریم بشود دامنه درستی یک مدل کلاسیک را تا لحظه انفجار بزرگ گسترش داد ضمن آنکه معادله (۲۱) یک حل اختلالی است که تا مرتبه اول از افت و خیزها به دست آمده است و دامنه درستی چنین تقریبی هم به زمانهای طولانی پس از انفجار بزرگ محدود می شود. بنابراین در این مدل نسبت بار به جرم در ابتدای تشکیل عالم، واگرا به دست می آید.

در این مقاله رهیافت وسون به کیهان شناسی چهار بعدی را مرور کردیم. در این مدل از حل معادلات میدان برای متریک کانونیک در فضای تهی پنج بعدی، ثابت کیهان شناختی در فضای چهار بعدی محاسبه می شود. پیش بینی مدل آن است که ثابت کیهان شناختی صفر یا یک مقدار مثبت خواهد بود. اینکه کدام جواب را باید برگزینیم به این برمی گردد که آیا در جهان ما نیروی پنجم که از بعد پنجم می آید مشاهده می شود یا نه. چون چنین نیرویی دیده نشده است این مدل می گوید که مقدار ثابت کیهان شناختی ناصفر و مثبت است که با مشاهدات تجربی

3. N Nakamura et al., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37** (2010) 075021.

1. Paul S Wesson; "Space-Time-Matter, modern Kaluza-Klein theory", World Scientific (1999).
2. Paul S Wesson, "Five Dimensional Physics", World Scientific (2006).