

()

Somayeh.Karimi@modares.ac.ir :

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۴/۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۴/۴)

ساده، زمان واهلش کوتاه، قابل رؤیت بودن و در کل خنثی بودن. این بلورها به عنوان سیستم‌های ماکروسکوپیکی برای مطالعه معایب شبکه، گذار فاز، انتشار امواج و ... به کار می‌روند. بلور پلاسمای غبارآلود اولین بار از لحاظ نظری در سال ۱۹۸۶ توسط ایکزی پیش‌بینی شد [۵]. در حدود ۸ سال پس از مقاله ایکزی، شکل‌گیری بلور غبار در تخلیه فرکانس بالا در نزدیکی الکتروود پایینی در مؤسسه ماکس پلانک در آلمان مشاهده شد [۶]. ملاندسو برای اولین بار یک مدل نظری براساس نوسانات شبکه یک بعدی با در نظر گرفتن بار تک‌قطبی برای ذرات، نوسانات طولی خطی و امواج غیرخطی را بررسی نموده است [۷]. در مقالات توجه زیادی به بررسی نظری نوسانات بلورها، انجام شده است که می‌توان به نمونه‌های ذیل اشاره کرد: مطالعاتی در مورد تغییر کوچک بار

وجود دانه‌های باردار غبار در محیط‌های متنوعی مثل حلقه‌های سیاره زحل، دنباله ستاره‌های دنباله‌دار و ابرهای بین ستارگان و غیره [۱ و ۲] و همچنین پلاسمای آزمایشگاهی [۳ و ۴] باعث ایجاد پدیده‌های موجی متنوعی می‌شود. در یک پلاسمای غبارآلود با جفت‌شدگی قوی که انرژی پتانسیل ذرات بیش از انرژی جنبشی آنها است، ذرات غبار می‌توانند به شکل بلور درآیند. در آزمایشگاه، بلور پلاسمای غبارآلود معمولاً در ناحیه غلاف پلاسما (ناحیه بالای الکتروود منفی) جایی که در آن نیروهای وارد بر ذرات غبار در امتداد قائم با هم به توازن می‌رسند، تشکیل می‌شود. بلورهای پلاسمای غبارآلود دارای ویژگی‌هایی هستند که موجب شده این گونه بلورها بیشتر مورد توجه قرار بگیرند، از جمله امکان تولید آسان، قابلیت کنترل

بررسی نموده و رابطه پاشندگی امواج غبار شبکه را به دست می‌آوریم. همچنین با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی، نشان داده‌ایم که دامنه نوسانات در معادله شرو دینگر غیرخطی صدق می‌کند و شرایط به وجود آمدن جواب‌های پوش سالی تونی تاریک یا روشن را بررسی می‌کنیم.

ساده‌ترین مدل برای مطالعه امواج در بلورها، «زنجیره یک بعدی از ذرات» است [۷]. این زنجیره از ذرات غبار تحت اثر یک میدان محصورکننده در صفحه xy قرار دارند که در شکل ۱ نشان داده شده است.

ذرات پلاسما را در حالت‌های نزدیک به تعادل ترمودینامیکی فرض می‌کنیم، بنابراین برای مؤلفه‌های پلاسما از رابطه بولتزمن استفاده می‌شود:

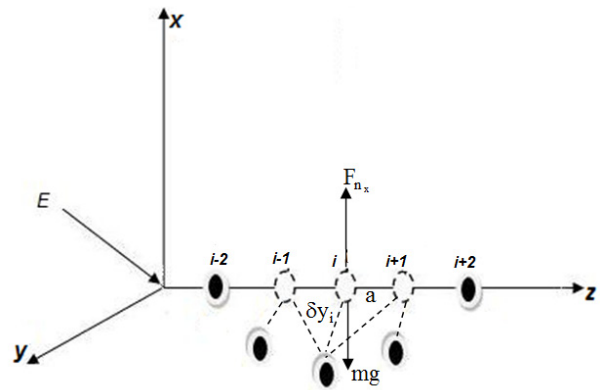
$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right), \quad (1)$$

$$n_i = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{kT_i}\right), \quad (2)$$

که به ترتیب معرف چگالی الکترون‌ها و یون‌ها می‌باشد. ϕ پتانسیل پلاسما و n_0 چگالی تعادلی الکترون‌ها و یون‌ها (در $\phi = 0$) و T_e و T_i دمای الکترون‌ها و یون‌ها می‌باشند. با استفاده از این روابط طول استتار پتانسیل الکتریکی ناشی از یک ذره غبار همان طول دمای است:

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 k}{n_0 e^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

در ادامه فرض می‌کنیم که اندازه ذره غبار بسیار کوچک‌تر از طول دمای $(r_i \ll \lambda_D)$ است. r_i اندازه مشخصه دانه غبار i ام است. البته فرض دیگری که استفاده کرده‌ایم این است که زمان باردار شدن ذره غبار τ_d در مقایسه با مقیاس زمانی حرکت ذره غبار (ω_{pd}^{-1}) بسیار کوچک‌تر است. τ_d زمانی است که ذره غبار به تغییر در پلاسما اطرافش پاسخ می‌دهد و از مرتبه $\tau_d \sim \lambda_D \frac{\omega_i^{-1}}{r_i}$ است. ω_i فرکانس پلاسما یونی است. نوعاً در پلاسماهای آزمایشگاهی ذرات غبار دارای اندازه‌های میکرونی و با شرط $\tau_d \ll \omega_{pd}^{-1}$ دیده شده‌اند [۷].



شکل ۱. زنجیره یک بعدی دانه‌های غبار در میدان الکتریکی خارجی.

توسط سیبو و گوری (۱۹۹۴)، ماتسوکاس و راسل (۱۹۹۵) و خراپاک (۱۹۹۹) انجام شده است [۸]. همچنین در سال ۱۹۹۸ مدولاسیون دامنه امواج غبار شبکه در یک بلور پلاسما غباری، توسط امین و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [۹]. فرخی در سال ۲۰۰۵، پلاسما بلوری را در دو بعد مورد بررسی قرار داده است [۱۰]. یاروشنکو در سال ۲۰۰۶، تمرکز یونی اطراف ذره غبار را به صورت اثر دنباله یونی در نظر گرفت و آن را به شکل پتانسیل یک دوقطبی به مسئله افزوده است [۱۱ و ۱۲]. همچنین نوسانات ذرات غبار در یک بلور پلاسما غباری شش گوشه دوقطبی در حضور میدان مغناطیسی و نوسانات تصادفی بار توسط فرخی و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [۱۳ و ۱۴]. تغییرات تصادفی بار ذره غبار که حتی در حال تعادل حول مقدار میانگین خود نوسان می‌کند، نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۵].

در این مقاله، اثر برهم‌کنش دوقطبی الکتریکی ذرات غبار با یکدیگر را در نظر گرفته‌ایم. این دوقطبی‌های الکتریکی می‌توانند منشأهای مختلفی داشته باشند، مانند: اثر غیرکروی بودن شکل غبار، اثر القای میدان خارجی و یا القای ناشی از تمرکز یونی. معمولاً اثر دنباله یونی که ناشی از توزیع یون‌ها در اطراف ذره غبار است، به صورت یک دوقطبی در نظر گرفته می‌شود [۱۶]. با در نظر گرفتن این برهم‌کنش‌ها علاوه بر برهم‌کنش‌های تک‌قطبی، این سیستم از ذرات غبار بلوری را

جهت گیری ثابت برای همه دوقطبی ها در نظر گرفته شده است. غبارها یک زنجیره یک بعدی در جهت محور z ها را تشکیل می دهند؛ اگر نوسان های عرضی این زنجیره را در صفحه yz بررسی و فرض کنیم ذرات تنها نوسانات کوچکی به صورت $\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i = (y_{i+1} - y_i)\hat{y} + (z_{i+1} - z_i)\hat{z} = \delta\vec{y} + \vec{a}$ تعادل شان داشته باشند (که a فاصله ذرات در حالت تعادل است)، گشتاور دوقطبی الکتریکی را به صورت $\vec{p} = p_{\perp} \cos\varphi\hat{x} + p_{\perp} \sin\varphi\hat{y} + p_{\parallel}\hat{z}$ با محور x ها است، تجزیه می کنیم. با بسط تیلور رابطه (۸)، برای نوسانات عرضی خواهیم داشت:

$$U_{\text{int}} = G(a)N + \frac{1}{\nu} \partial_y G(a) \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i)^{\nu} + \frac{1}{\lambda} \partial_y^2 G(a) \sum_{i=1}^N (y_{i+1} - y_i)^{\lambda} + \dots \quad (9)$$

$$G(a) = \frac{\exp(-k_D a)}{4\pi\epsilon_0 a^{\nu}} \left\{ Q^{\nu} a^{\nu} + P^{\nu} (1 + k_D a) - 3P_{\perp}^{\nu} \sin^{\nu} \varphi \left(1 + k_D a + \frac{1}{3} k^{\nu} D a^{\nu} \right) \right\}$$

$$\partial_y G(a) = -\frac{\exp(-k_D a)}{4\pi\epsilon_0 a^{\nu}} \times \left\{ Q^{\nu} a^{\nu} (1 + k_D a) + 3P^{\nu} \left(1 + k_D a + \frac{1}{3} k^{\nu} D a^{\nu} \right) - 9P_{\perp}^{\nu} \sin^{\nu} \varphi \left(1 + k_D a + \frac{4}{9} k^{\nu} D a^{\nu} + \frac{1}{9} k^{\nu} D a^{\nu} \right) \right\}$$

$$\partial_y^2 G(a) = \frac{\exp(-k_D a)}{4\pi\epsilon_0 a^{\nu}} \left\{ 2Q^{\nu} a^{\nu} \left(1 + k_D a + \frac{1}{3} k^{\nu} D a^{\nu} \right) + 12P^{\nu} \left(1 + k_D a + \frac{5}{12} k^{\nu} D a^{\nu} + \frac{1}{12} k^{\nu} D a^{\nu} \right) - 36P_{\perp}^{\nu} \sin^{\nu} \varphi \left(1 + k_D a + \frac{51}{108} k^{\nu} D a^{\nu} + \frac{5}{36} k^{\nu} D a^{\nu} + \frac{1}{36} k^{\nu} D a^{\nu} \right) \right\} \quad (10)$$

انرژی ناشی از برهم کنش هر ذره غبار با میدان خارجی به صورت $U_{\text{ext}} = \frac{1}{\nu} M \Omega^{\nu} (x_i^{\nu} + y_i^{\nu})$ در نظر می گیریم که در آن فرکانس تشدید میدان خارجی است. معمولاً فرکانس تشدید از فرکانس ذاتی سیستم بزرگتر در نظر گرفته می شود $(\Omega^{\nu} \gg \Omega_{\perp}^{\nu} = \frac{\partial_y G(a)}{M})$. پتانسیل کل سیستم برابر است با:

N ذره غبار با بار و شعاع یکسان که در طول یک خط توزیع شده اند را در نظر می گیریم. پتانسیل پلاسما از حل معادله پواسن زیر به دست می آید:

$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi(\vec{x}) = -e(n_i - n_e) - \sum_{i=1}^N \{ Q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) - P_i \cdot \nabla \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \}. \quad (4)$$

با فرض $e\varphi \ll kT_i, kT_e$ ، رابطه های بولتزمن (معادلات (۱) و (۲)) را می توان بسط داد و با قرار دادن آنها در معادله (۴) به معادله پواسن خطی شده می رسیم:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{x}) = k_D^{\nu} \varphi - \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \{ Q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) - P_i \cdot \nabla \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \}, \quad (5)$$

که در آن $k_D = \frac{1}{\lambda_D}$ است. برای حل معادله (۵) از روش تابع گرین استفاده کرده و فرض می کنیم پتانسیل در بی نهایت صفر باشد. تابع گرین معادله بالا عبارت است از:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{\exp(-k_D |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (6)$$

پتانسیل همه ذرات غبار از رابطه زیر به دست می آید:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \int G(\vec{x}, \vec{x}') (Q_i \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) - P_i \cdot \nabla' \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i)) d^{\nu} x'. \quad (7)$$

با استفاده از تابع گرین (۶) و معادله (۷)، انرژی پتانسیل ناشی از برهم کنش ذرات سیستم با یکدیگر در شرایطی که فاصله بین ذرات غبار از پوشش دبی، بزرگتر می شود و تنها برهم کنش بین همسایه های نزدیک اهمیت پیدا می کنند، از رابطه زیر به دست می آید:

$$U_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \frac{\exp(-k_D |\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i|)}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q^{\nu}}{|\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i|} + \frac{|P|^{\nu}}{|\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i|^{\nu}} \times (1 + k_D |\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i|) - 3 \frac{(P \cdot (x_{i+1} - x_i))^{\nu}}{|\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i|^{\nu}} \times \left(1 + k_D |\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i| + \frac{1}{3} k_D^{\nu} |\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i|^{\nu} \right) \right\} \quad (8)$$

در این رابطه برای همه ذرات غبار بار تک قطبی یکسان و

در آزمایش‌هایی که ذرات غبار به شکل بلور درمی‌آیند، معمولاً شعاع ذرات $r_d \sim 10\text{--}100\ \mu\text{m}$ ، فاصله بین ذرات (a) بزرگ‌تر یا هم‌مرتبه با شعاع استتار پلاسما (λ_D) و حدود $\frac{a}{\lambda_D} \sim 2\text{--}1.5$ معمولاً در مقالات ۲-۱۷۵. لحاظ می‌شود [۱۷]. در شکل‌های زیر کمیت $\partial_y G(a)$ به ازای $k_D a = 2$ ، $0 \leq f \leq 0.5$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ رسم شده است: از معادله (۱۰) به دست می‌آید که به ازای زوایای

$$\sin^2 \theta_0 < \frac{1 + \frac{\frac{1}{3} k_D^2 a^2}{1 + k_D a}}{3 \sin^2 \varphi \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{3} k_D^2 a^2}{1 + k_D a} \left(1 + \frac{1}{4} k_D a \right) \right\}}$$

بدون عامل خارجی هیچ‌گاه نوسان عرضی نداریم. برای مثال، اگر $k_D a = 2$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، $\sin^2 \theta_0 \leq 0.25$. بنابراین برای $3^\circ \leq \theta_0 \leq 3^\circ$ و $-3^\circ \leq \theta_0 \leq 21^\circ$ بدون عامل خارجی نوسان نداریم. برای زوایای بین این مقادیر، مقدار f برای داشتن نوسان بدون عامل خارجی، مهم خواهد شد. کمترین مقدار در این حالت‌ها برابر

$$f_{\min}^2 = \frac{\frac{1}{3}}{3 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{\frac{1}{3} k_D^2 a^2}{1 + k_D a} \left(1 + \frac{1}{4} k_D a \right) \right) - 1 - \frac{\frac{1}{3} k_D^2 a^2}{1 + k_D a}}$$

خواهد بود. در زاویه‌ای خاص برای θ ، مخرج کسر فوق صفر می‌شود و در این زاویه، مقدار $\partial_y G(a)$ منفی و مستقل از مقدار f است و برای زوایای کمتر از این زاویه، فرکانس نوسان کاهش پیدا می‌کند.

شکل ۴ نشان می‌دهد که برای $k_D a = 2$ کمترین مقدار f_{\min}^2 ، $11/11 \leq f_{\min}^2 \leq 79/100$ می‌باشد و به ازای این مقادیر، بدون نیاز به عامل خارجی سیستم قادر به نوسانات عرضی می‌باشد. در صورت وجود عامل خارجی در این ناحیه فرکانس نوسانات افزایش می‌یابد، در صورتی که زوایای $\sin^2 \theta \leq 0.25$ فرکانس نوسان ذرات در اثر وجود برهم‌کنش دوقطبی‌ها کاهش پیدا می‌کرده است.

$$U = U_{\text{int}} + U_{\text{ext}} \quad (11)$$

حال با نوشتن معادله لاگرانژ $L = T - U$ و گرفتن وردش از آن $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0$ ، می‌توانیم معادله حرکت هر ذره را به دست آوریم. T و U به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل ذره می‌باشند

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = -\Omega^2 y_i + \frac{\partial_y G(a)}{M} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{\partial_y G(a)}{2M} \left\{ (y_i - y_{i-1})^2 - (y_{i+1} - y_i)^2 \right\} + \dots, \quad (12)$$

جواب بخش خطی معادله (۱۲) را به عنوان نوسانات شبکه، به صورت یک قطار موج $y_i \propto \exp(i(\omega t - z_i k))$ در نظر می‌گیریم. رابطه پاشندگی نوسانات به دست می‌آید:

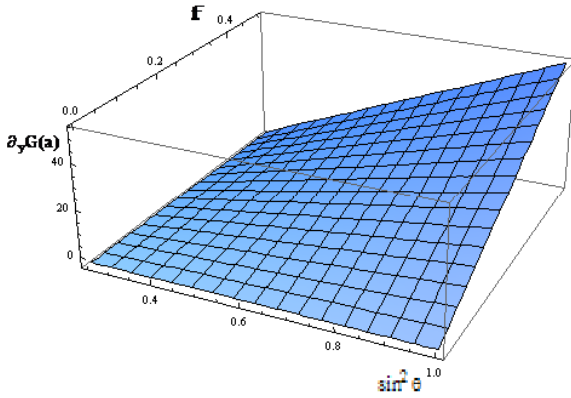
$$\omega^2(k) = \Omega^2 + \frac{4}{M} \partial_y G(a) \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right). \quad (13)$$

از طرفی در یک سیستم با شرایط مرزی متناوب، تنها اعداد موج $e^{ikNa} = 1$ یا $kNa = 2\pi m$ مجاز هستند که به ازای $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ هماهنگ‌های مربوط به مناطق بریلوئن را نشان می‌دهند. بنابراین از این رابطه N فرکانس مشخصه موج به دست می‌آید.

با تعریف $p_{\perp} = p \sin \theta$ و $p_{\parallel} = p \cos \theta$ که در آن θ زاویه بردار قطبش الکتریکی با محور z هاست. یک پارامتر بدون بعد به شکل $f^2 = \frac{p^2}{Q^2 a^2}$ تعریف می‌کنیم. در مدلی که ما در نظر گرفته‌ایم

میدان دوقطبی ذرات از دو عامل ناشی می‌شود: اول، اثر دوقطبی القایی ناشی از میدان خارجی و دوم، غیرکروی بودن ذرات. در حالت اول $f \propto \frac{r_i^2 E}{a}$ و در حالت دوم $f \propto \frac{r_i}{a}$ می‌باشد. با استفاده از پارامتر بدون بعد f ، $\partial_y G(a)$ از رابطه (۱۰) به شکل زیر ساده می‌شود:

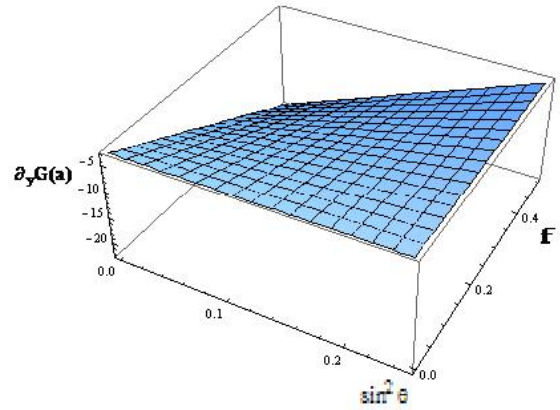
$$\partial_y G(a) = - \frac{Q^2 a^3 (1 + k_D a) \exp(-k_D a)}{4\pi\epsilon_0 a^5} \left\{ 1 + 3f^2 \left[1 + \frac{\frac{1}{3} k_D^2 a^2}{1 + k_D a} - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{\frac{1}{3} k_D^2 a^2}{1 + k_D a} \left(1 + \frac{1}{4} k_D a \right) \right) \right] \right\} \quad (14)$$



شکل ۳. $\partial_y G(a)$ به ازای $k_D a = 2$ ، $0 \leq f \leq 0.5$ ، $\theta > \theta_0$ و

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

همواره مثبت است.



شکل ۲. $\partial_y G(a)$ به ازای $k_D a = 2$ ، $0 \leq f \leq 0.5$ ، $\theta < \theta_0$ و

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

همواره منفی است.

سوم ناشی از اندرکنش‌های همسایه‌های نزدیک را ننگه می‌داریم. همچنین تقریب طول موج‌های بزرگ را در نظر می‌گیریم ($ka \ll 1$) که برای آن پاشندگی موج کوچک است. در این تقریب این سیستم رفتاری شبیه به یک محیط پیوسته از خود نشان می‌دهد. برای همین y_{i+1} و y_{i-1} را بسط تیلوری به صورت

$$\delta y_i \pm (\partial_y \delta y)_i a + \frac{1}{2} (\partial_y^2 \delta y)_i a^2 \pm \frac{1}{6} a^3 (\partial_y^3 \delta y)_i + \dots$$

می‌دهیم. اگر این بسط را در معادله (۱۲) قرار دهیم و جملات

$$\frac{\partial \delta y}{\partial y}$$

مشتق را تا مرتبه $\frac{1}{L^2}$ که L طول مشخصه تغییرات

است، ننگه داریم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \delta y}{dt^2} - \alpha \frac{\partial^2 \delta y}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^4 \delta y}{\partial y^4} + \Omega^2 \delta y = \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta y}{\partial y} \right)^2, \quad (15)$$

که در آن

$$\alpha = -\frac{\partial_y G(a) a^2}{M}, \beta = -\frac{\partial_y G(a) a^4}{12M}, \gamma = \frac{\partial_y^2 G(a) a^4}{2M}. \quad (16)$$

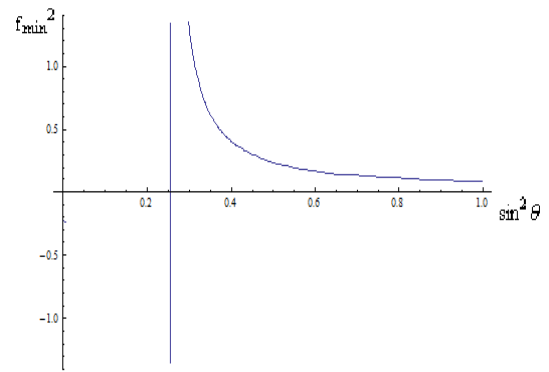
برای حل این معادله از روش اختلالی KBM استفاده می‌کنیم [۱۹]. در این روش فرض می‌شود جمله غیرخطی کوچک است و برای δy بسطی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\delta y = \varepsilon \delta y_1(A, \tilde{A}, \psi) + \varepsilon^2 \delta y_2(A, \tilde{A}, \psi) + \varepsilon^3 \delta y_3(A, \tilde{A}, \psi) + \dots \quad (17)$$

در مرتبه اول برای معادله (۱۵) جوابی به صورت ذیل فرض می‌کنیم:

$$\delta y_1 = A \exp(i\psi) + \tilde{A} \exp(-i\psi), \quad (18)$$

که در آن $\psi = ky - \omega t$ و A یک دامنه مختلط و \tilde{A} مزدوج



شکل ۴. به ازای f_{\min}^2 به ازای $k_D a = 2$ و $\varphi = \frac{\pi}{2}$ رسم شده است.

با در نظر گرفتن جملات غیرخطی از مرتبه $(y_{i+1} - y_i)^3$ یا بزرگ‌تر در معادله (۱۲) می‌توان امواج غیرخطی را بررسی نمود. در بررسی نوسانات غیرخطی از اثر ناهمگنی میدان الکتریکی صرف نظر می‌کنیم. به عبارتی در دامنه نوسانات کوچک فرض می‌کنیم طول تغییرات ناهمگنی میدان بزرگ‌تر از دامنه نوسانات است. در حالت کلی به ذره نیروی ناشی از میدان الکتریکی به صورت

$$\vec{F} = q\vec{E} = \vec{E}(y_0) + \delta y \frac{\partial E}{\partial y} + O(\gamma) + \dots$$

وارد می‌شود. فرض می‌کنیم طول تغییرات میدان از دامنه نوسان δy بزرگ‌تر است [۱۸]. همچنین برای ساده کردن معادلات غیرخطی، تنها جملات غیرخطی ضعیف شامل جملات مرتبه

اگر در رابطه فوق از جملات مرتبه بالاتر صرف نظر کنیم، به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= \gamma \varepsilon^{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial y} \right)^{\tau} + \tau \varepsilon \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial y} \right)^{\tau} \left(\frac{\partial \delta y_{\tau}}{\partial y} \right) \right] \\ &= \gamma \varepsilon^{\tau} \left\{ k^{\tau} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial \psi} \right)^{\tau} \right\} \\ &\quad + \gamma \varepsilon^{\tau} \left\{ \tau k^{\tau} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial \psi} \right)^{\tau} \frac{\partial \delta y_{\tau}}{\partial \psi} \right] \right\} \quad (22) \\ &\quad + B_{\lambda} k^{\tau} \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial \psi} \right)^{\tau} + \tilde{B}_{\lambda} k^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tilde{A}} \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial \psi} \right)^{\tau} \\ &\quad + \tau k^{\tau} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial \psi} \right)^{\tau} B_{\lambda} \frac{\partial \delta y_1}{\partial A} \right] \end{aligned}$$

حال اگر جمله‌های هم‌مرتبه روابط (۲۰) و (۲۲) را مساوی قرار دهیم، در مرتبه اول خواهیم داشت:

$$\left(-\omega^{\tau} + \alpha k^{\tau} - \beta k^{\tau} + \Omega^{\tau} \right) A e^{i\psi} + \text{c.c.} = 0, \quad (23)$$

$$\rightarrow D(\omega, k) = -\omega^{\tau} + \alpha k^{\tau} - \beta k^{\tau} + \Omega^{\tau} = 0,$$

که همان رابطه پاشندگی خطی معادله (۱۵) است. در مرتبه دوم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\left[-\tau i \omega A_{\lambda} - \tau i k (\alpha - \tau \beta k^{\tau}) B_{\lambda} \right] e^{i\psi} \\ &\quad + \text{c.c.} - \beta k^{\tau} \left(\frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} + \frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} \right) = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

از بسط (۱۷) برای δy انتظار داریم که δy از δy_{τ} و... مستقل باشند. وقتی $\delta y_1 = A e^{i\psi} + \text{c.c.}$ را در نظر گرفتیم، فرض بر این است که جملات سکولار هستند، یعنی δy_{τ} جمله‌ای به صورت $e^{i\psi}$ یا $e^{-i\psi}$ ندارد. بنابراین از معادله (۲۴) داریم:

$$-\tau i \omega A_{\lambda} - \tau i k (\alpha - \tau \beta k^{\tau}) B_{\lambda} = 0. \quad (25)$$

عبارت فوق را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$A_{\lambda} + v_g B_{\lambda} = 0$$

که $v_g = -\frac{\partial D / \partial k}{\partial D / \partial \omega}$ سرعت گروه است. از حل معادله

دیفرانسیل باقی‌مانده به دست می‌آوریم:

$$-\beta k^{\tau} \frac{\partial^{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} \left(\frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} + \delta y_{\tau} \right) = 0. \quad (26)$$

مختلط آن می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم دامنه کند تغییر باشد، یعنی بسط‌های به شکل زیر وجود دارند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \varepsilon A_{\lambda} (A, \tilde{A}) + \varepsilon^{\tau} A_{\tau} (A, \tilde{A}) + \dots, \\ \frac{\partial A}{\partial y} &= \varepsilon B_{\lambda} (A, \tilde{A}) + \varepsilon^{\tau} B_{\tau} (A, \tilde{A}) + \dots, \\ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} &= \varepsilon \tilde{A}_{\lambda} (A, \tilde{A}) + \varepsilon^{\tau} \tilde{A}_{\tau} (A, \tilde{A}) + \dots, \\ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} &= \varepsilon \tilde{B}_{\lambda} (A, \tilde{A}) + \varepsilon^{\tau} \tilde{B}_{\tau} (A, \tilde{A}) + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

که در روابط بالا $A_{\lambda}, B_{\lambda}, A_{\tau}, B_{\tau}, \dots$ از صفر قرار دادن جملات سکولار در رابطه (۱۷) به دست می‌آیند. حال اگر جواب (۱۷) را در معادله (۱۵) قرار دهیم و تمام جملات سمت چپ هم‌مرتبه را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \varepsilon \left\{ \left(-\omega^{\tau} + \alpha k^{\tau} - \beta k^{\tau} + \Omega^{\tau} \right) A e^{i\psi} + \text{c.c.} \right\} \\ &\quad + \varepsilon^{\tau} \left\{ \left[-\tau i \omega A_{\lambda} - \tau i k (\alpha - \tau \beta k^{\tau}) B_{\lambda} \right] e^{i\psi} \right. \\ &\quad \left. + \text{c.c.} + \left(\omega^{\tau} - \alpha k^{\tau} \right) \frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} - \beta k^{\tau} \frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} \right\} \\ &\quad + \varepsilon^{\tau} \left\{ \left[-\tau i \omega A_{\tau} - \tau i k (\alpha - \tau \beta k^{\tau}) B_{\tau} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(A_{\lambda} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial A} + \tilde{A}_{\lambda} \frac{\partial \tilde{A}_{\lambda}}{\partial \tilde{A}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\alpha - \tau \beta k^{\tau} \right) \left(B_{\lambda} \frac{\partial B_{\lambda}}{\partial A} + \tilde{B}_{\lambda} \frac{\partial \tilde{B}_{\lambda}}{\partial \tilde{A}} \right) \right] e^{i\psi} \right. \\ &\quad \left. + \text{c.c.} - \left[\tau (\omega A_{\lambda} + k \alpha B_{\lambda}) \frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial A \partial \psi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau \beta k^{\tau} B_{\lambda} \frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial A \partial \psi^{\tau}} \right] + \text{c.c.} \right. \\ &\quad \left. + \left(\omega^{\tau} - \alpha k^{\tau} \right) \frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} - \beta k^{\tau} \frac{\partial^{\tau} \delta y_{\tau}}{\partial \psi^{\tau}} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

حال سمت راست معادله (۱۵) را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \delta y_1 + \varepsilon^{\tau} \delta y_{\tau} \right) \right)^{\tau} \\ &= \gamma \varepsilon^{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial y} \right)^{\tau} + \varepsilon^{\tau} \left(\frac{\partial \delta y_{\tau}}{\partial y} \right) \right] \\ &\quad + \tau \varepsilon \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial y} \right)^{\tau} \left(\frac{\partial \delta y_{\tau}}{\partial y} \right) + \tau \varepsilon^{\tau} \left(\frac{\partial \delta y_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta y_{\tau}}{\partial y} \right)^{\tau} \end{aligned} \quad (21)$$

$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t_r} + v_g \frac{\partial A}{\partial y_r} \right) + P \frac{\partial^2 A}{\partial y_r^2} + Q' |A|^2 A = 0, \quad (31)$$

که در آن

$$P = \frac{1}{\partial D} (v_g^2 - \alpha + \epsilon \beta k^2), \quad Q' = \frac{\gamma \gamma k^4}{\partial \omega} \quad (32)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیرهای زیر:

$$\xi = \epsilon (y - v_g t) = y_1 - v_g t_1 = \frac{1}{\epsilon} (y_1 - v_g t_1), \quad (33)$$

$$\tau = \epsilon^2 t = \epsilon t_1 = t_r,$$

و قرار دادن آنها در معادله (۳۱)، خواهیم داشت:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + Q' |A|^2 A = 0, \quad (34)$$

این معادله، همان معادله شرودینگر غیرخطی (NLSE) است. جواب‌های این معادله وابسته به علامت P و Q' ، سالیتون‌های باپوش منتشر شونده روشن و تاریک هستند. اگر $PQ' > 0$ باشد، سالیتون باپوش روشن و اگر $PQ' < 0$ ، سالیتون باپوش تاریک خواهیم داشت. اگر مقادیر P و Q' را از رابطه (۳۲) قرار دهیم:

$$PQ' = \frac{\gamma \gamma k^4}{\left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^2} (v_g^2 - \alpha + \epsilon \beta k^2) = \frac{\gamma \gamma k^4 a^6}{\gamma \gamma M} \frac{1 + \frac{k^2 a^2}{3}}{\left(1 - \frac{k^2 a^2}{12} \right)^2} \partial_{y_1}^2 G(a). \quad (35)$$

رابطه (۳۵) نشان می‌دهد که بدون در نظر گرفتن دوقطبی‌ها ($f=0$)، مقدار PQ' همواره مثبت است و فقط پوش سالیتونی روشن خواهیم داشت. در حالی که اثر دوقطبی‌ها این امکان را به وجود می‌آورد که جواب‌های پوش سالیتونی تاریک هم داشته باشیم. به ازای $k_D a = 2$ ، $k a = 0.1$ ، $f^2 = 0.5$ و $\varphi = \frac{\pi}{4}$ مقدار PQ' را در شکل ۵ رسم کرده‌ایم.

شکل ۵ نشان می‌دهد به ازای پارامترهای انتخاب شده، یک زاویه خاص وجود دارد که اگر دوقطبی‌های الکتریکی جهت‌گیری‌هایی کمتر از این زاویه داشته باشند، جواب‌های پوش سالیتونی روشن داریم و برای زوایای جهت‌گیری بزرگ‌تر از آن، جواب‌های پوش سالیتونی

از آنجایی که جمله‌ای به صورت $e^{i\psi}$ یا $e^{-i\psi}$ ندارد، تنها جواب $\delta y_r = \cot e$ است که با توجه به شرایط اولیه داریم:

$$\delta y_r = 0. \quad (27)$$

در مرتبه سوم با استفاده از نتایج به دست آمده در مرتبه‌های پایین‌تر ϵ و اینکه

$$A_1 \frac{\partial A_1}{\partial A} + \tilde{A}_1 \frac{\partial A_1}{\partial \tilde{A}} = v_g^2 B_1 \frac{\partial B_1}{\partial A} + v_g^2 \tilde{B}_1 \frac{\partial B_1}{\partial \tilde{A}},$$

به دست می‌آوریم:

$$\left\{ i (A_r + v_g B_r) + \frac{1}{\partial D} (v_g^2 - \alpha + \epsilon \beta k^2) \left(B_1 \frac{\partial B_1}{\partial A} + \tilde{B}_1 \frac{\partial B_1}{\partial \tilde{A}} \right) \right\} e^{i\psi} + \frac{1}{\partial D} c.c. - \frac{\beta k^4}{\partial \omega} \left(\frac{\partial^2 \delta y_r}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \delta y_r}{\partial \psi^2} \right) = \frac{\gamma \gamma k^4}{\partial \omega} \left(A^r e^{r i \psi} - |A|^2 A e^{i \psi} - |A|^2 \tilde{A} e^{-i \psi} + \tilde{A}^r e^{-r i \psi} \right). \quad (28)$$

اگر در طرفین معادله فوق، ضرایب $e^{\pm i \psi}$ و $e^{\pm i \psi}$ را مساوی قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$i (A_r + v_g B_r) + \frac{1}{\partial D} (v_g^2 - \alpha + \epsilon \beta k^2) \left(B_1 \frac{\partial B_1}{\partial A} + \tilde{B}_1 \frac{\partial B_1}{\partial \tilde{A}} \right) = \frac{-\gamma \gamma k^4}{\partial \omega} |A|^2 A, \quad (29)$$

برای حل این معادله می‌دانیم که:

$$A_r = \frac{\partial A}{\partial t_r} - \frac{A_1}{\epsilon}, \quad B_r = \frac{\partial A}{\partial y_r} - \frac{B_1}{\epsilon},$$

که در آن

$$t_r = \epsilon^2 t, \quad y_r = \epsilon^2 y, \\ t_1 = \epsilon t, \quad y_1 = \epsilon y,$$

از طرف دیگر $B_1 = \frac{\partial A}{\partial y_1}$ می‌باشد، پس:

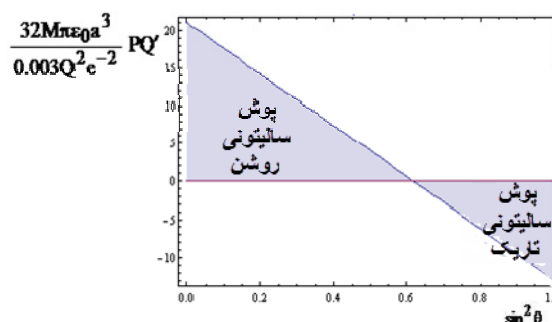
$$\frac{\partial B_1}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 A}{\partial y_1^2} = B_1 \frac{\partial B_1}{\partial A} + \tilde{B}_1 \frac{\partial B_1}{\partial \tilde{A}}, \quad (30)$$

حال اگر عبارت (۳۰) را در معادله (۲۹) قرار دهیم، به معادله زیر می‌رسیم:

برای ذرات مشاهده نمی‌شود.

همچنین در بخش غیرخطی نشان داده‌ایم که معادله تحول غیرخطی همان معادله شرودینگر غیرخطی است. وابستگی ضرایب این معادله به پارامترهای مسئله یعنی زاویه دوقطبی‌ها و شدت دوقطبی‌ها به دست می‌آید. با بررسی این ضرایب، امکان انتشار جواب‌های پوش سالیتمونی تاریک و روشن مورد تحلیل قرار گرفته است. شایان ذکر است که بدون در نظر گرفتن دوقطبی‌ها، در اثرات غیرخطی جواب‌های سالیتمونی دیده می‌شود که با نتایج حاصل از این مقاله، کاملاً متفاوت می‌باشد [۷].

در انتها نشان داده‌ایم که برای یک مجموعه خاص از پارامترهای نوعی، یک زاویه خاص وجود دارد ($\theta = 52^\circ$) که برای کمتر از آن فقط پوش سالیتمونی روشن، و برای بیشتر از آن پوش سالیتمونی تاریک داریم. (بالای شکل ۵) این نتایج نشان می‌دهد که سمت‌گیری و قدرت دوقطبی‌ها، نقش تعیین‌کننده‌ای در بروز جواب‌های پوش سالیتمونی روشن و تاریک دارد و هر دو این پوش‌ها همزمان دیده نمی‌شود. البته با توجه به اینکه در اثرات غیرخطی حد طول موج‌های بلند در نظر گرفته می‌شود، عملاً پوش سالیتمونی تاریک کمتر دیده می‌شود. بنابراین در عمل در سمت‌گیری‌های خاصی از دوقطبی‌ها، پوش سالیتمونی نخواهیم داشت و پدیدار شدن اثرات غیرخطی به جهت‌گیری دوقطبی‌ها وابسته خواهد شد.



شکل ۵. تغییرات PQ' بر حسب جهت‌گیری دوقطبی‌ها.

تاریک داریم که در این مثال، مقدار این زاویه $\theta = 52^\circ$ است.

در نتایج به دست آمده، نشان داده شده است که با در نظر گرفتن قطبش دانه‌های غبار (با توجه به اندازه، شکل و جنس ذرات غبار و یا اثر القای میدان خارجی و یا القای ناشی از تمرکز یونی)، انتشار امواج غبار- شبکه تحت تأثیر قطبش ذرات غبار می‌باشد که قابل صرف نظر کردن نیست. در بررسی اثرات خطی یک زاویه حده مشاهده شد و نشان داده‌ایم برای جهت‌گیری‌های دوقطبی کمتر از آن با افزایش قدرت دوقطبی، فرکانس کاهش پیدا کرده و برای زاویه‌های بزرگ‌تر از آن، با افزایش f فرکانس افزایش پیدا می‌کرده است. به عبارت دیگر، در نظر گرفتن اثرات دوقطبی، دامنه فرکانس موج غبار- شبکه وابسته به قدرت دوقطبی‌ها، می‌تواند افزایش و یا کاهش داشته باشد که چنین پدیده‌ای صرفاً با در نظر گرفتن بار تک‌قطبی

8. V E Fortov, I T Iakubov, and A G Khrapak, "Physics of Strongly Coupled Plasma", OXFORD Science publication, (2006).
9. M R Amin, G E Morfill, and P K Shukla, *Physics of Plasma* **5**, 7 (1998) 2578
10. B Farokhi and M Shahmansouri, "Crystal - Like Structure in Two Dimensional Dusty Plasmas", Fourth International Conference on the Physics of Dusty Plasmas, AIP Conference Proceedings **799** (2005) 474.
11. V V Yaroshenko, H M Thomas, and G E Morfill, *New Journal of Physics* **8** (2006) 54.
12. V V Yaroshenko, S V Vladimirov, and G E Morfill, *New Journal of Physics* **8** (2006) 201.

1. E C Whipple, T G Northrop, and D A Mendis, *J. Geophys. Res.* **90** (1985) 7405.
2. U Angelis, V Formisano, and M Giordano, *J. Plasma Phys.* **40** (1988) 399.
3. A Barkan, R L Merlino, and N D Angelo, *Phys. Plasmas* **2** (1995) 3563.
4. R L Merlino, A Barkan, C Thompson, and N D Angelo, *Phys. Plasmas* **5** (1998) 1607.
5. H Ikezi, *Phys. Fluids* **29** (1986) 1764.
6. H Thomas and A Melzer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 652; H Chu and I Lin, *J. Phys. D* **27** (1994) 296; H Shi and K Tachibana, *Jap. J. APPL. Phys.* **33** (1994) 804.
7. F Melandso, *Phys. Plasmas* **3** (1996) 3890.

16. V V Yaroshenko and G E Morfill, *New Journal of Physics* **7** (2005) 207.
17. G Morfill, A V Ivlev, and J R Jokipii, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 971.
18. I Kourakis and P K Shukla, *Physics of Plasma* **11** (2004) 1.
19. T Kakutani and N Sugimoto, *Physics of Fluids* **17**, 8 (1974) 1617.
13. B Farokhi, M Shahmansouri, and P K Shukla, *Physics of Plasmas* **16** (2009) 063703.
14. B Farokhi and B Ahmadi, "Lattice Wave Dispersion Relation in Two-Dimensional Hexagonal Crystals with Charge Fluctuation", Fourth International Conference on the Physics of Dusty Plasmas, AIP Conference Proceedings, **799** (2005) 327.
15. S A Khrapak, A P Nefedov, O F Petrov, and O S Vauline, *Phys. Rev. E* **59** (1999) 6017.