

## ایجاد درگاه‌های کوانتومی تک-کیوتریت با روش گذار بی‌درروی سه پایه

ساره گلکار، مهدی امنیت‌طلب و سونیا ناصر

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه  
پست الکترونیکی: m.amniat-talab@urmia.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۴/۲۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۲/۱۲/۴)

### چکیده

در این مقاله برای طراحی درگاه‌های تک-کیوتریت، از روش گذار بی‌درروی تحریکی رامن در دستگاه‌های سه پایه استفاده می‌کنیم، برای مطالعه روش گذار بی‌درروی تحریکی رامن، یک دستگاه شش تراز، با پنج میدان تپی لیزری در نظر می‌گیریم. در این دستگاه با استفاده از تبدیل مورس-شور، سه تپ همسان غیر مرتبط با حالت اولیه به کار می‌بریم. ابعاد دستگاه با معرفی دو زاویه مستقل از زمان، کاهش می‌یابند و دستگاه پنج پایه به دستگاه سه پایه تبدیل می‌شود. با حذف فازهای دینامیکی و حفظ تأثیر فازهای هندسی، درگاه‌های ساده تک-کیوتریت را ایجاد می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: کیوتریت، تبدیل مورس-شور، گذار بی‌درروی تحریکی رامن، فاز دینامیکی، فاز هندسی

### ۱. مقدمه

کامپیوترهای کوانتومی، تجزیه عملیات در آنها به عملگرهای ساده اولیه و یا همان درگاه‌ها می‌باشد. ساده‌ترین درگاه‌ها، درگاه‌های تک-کیوبیتی می‌باشند، به طوری که فقط یک کیوبیت ورودی و یک کیوبیت خروجی دارند. این نوع درگاه‌ها به شکل یک ماتریس از گروه  $U(2)$  اند. اگر تعداد کیوبیت‌هایی که درگاه به طور همزمان بر آنها عمل می‌کند،  $n$  باشد، درگاه یک ماتریس  $2^n \times 2^n$  خواهد بود، که بایستی متعلق به گروه  $U(2^n)$  باشد [۳]. اگر اطلاعات در یک دستگاه کوانتومی سه تراز ذخیره شود، به اصطلاح می‌گویند واحد اطلاعات کیوتریت<sup>۳</sup> می‌باشد. حالت‌های کیوتریت به وسیله سه بردار راست هنجار

در بحث پردازش اطلاعات کوانتومی [۱]، ایجاد درگاه‌های<sup>۱</sup> کوانتومی اهمیت روزافزون پیدا کرده است [۲]. در محاسبات کوانتومی، واحد ذخیره اطلاعات کوانتومی کیوبیت<sup>۲</sup> است که دو حالت می‌تواند داشته باشد. یک کیوبیت در دستگاه کوانتومی به وسیله دو بردار راست هنجار  $|1\rangle$  و  $|0\rangle$  معرفی می‌شود. درگاه کوانتومی، یک عملگر یکانی است که بر روی حالات ورودی مجموعه مشخصی از کیوبیت‌ها عمل می‌کند و سبب تحول در حالات دستگاه می‌شود. یکی از گام‌های اساسی در عملی نمودن

۱. gate

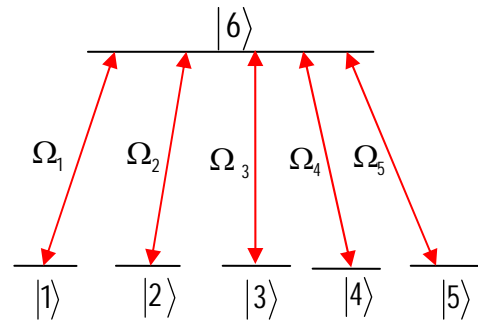
۲. quantum bit (qubit)

۳. qutrit

ترتیب تپ‌های غیرشهودی<sup>۳</sup> رخ می‌دهد [۱۱ و ۱۰]. همچنین این روش یک طرح زورمند برای تبادل حالت‌های کوانتومی می‌باشد [۱۲]. روش استیرپ سه پایه<sup>۴</sup> که در ابتدا توسط اونانیان<sup>۵</sup> و همکارانش ارائه شد [۱۳]، یک بسط و تعمیم استیرپ است. در یک دنباله مناسب از تپ‌های پمپ و استوکس<sup>۶</sup>، یک تپ لیزری سوم (کنترل<sup>۷</sup>)، تراز برانگیخته را به تراز پایه جفت می‌کند. در این مقاله برای ایجاد درگاه‌های تک-کیوتریت، از روش استیرپ در یک دستگاه شش تراز با پنج تراز پایه تبهگن استفاده می‌کنیم [۱۳]. به منظور کاهش ابعاد دستگاه شش تراز، با استفاده از تبدیل موریس-شور<sup>۸</sup> [۱۴]، از سه تپ همسان غیر مرتبط با حالت اولیه استفاده می‌کنیم که ابعاد دستگاه با معرفی دو زاویه مستقل از زمان، کاهش داده می‌شوند. بدین ترتیب دو حالت از حالت‌های زمینه از حالت‌های دیگر جدا می‌شوند. با یافتن هامیلتونی مؤثر در زیر فضای جدید و با به دست آوردن عملگر تحول زمانی که شامل فازهای دینامیکی و هندسی و زوایای آمیختگی می‌باشد، می‌توان درگاه‌های تک-کیوتریت مختلفی را ایجاد کرد. همچنین با کنترل ترتیب و اندازه تپ‌های غیرشهودی و شرایط اولیه متناظر با آن، حالت نهایی دستگاه از برهم‌نهی حالت‌های زمینه به دست می‌آید.

## ۲. ساختار هامیلتونی مؤثر دستگاه

در دستگاه شش تراز که مطابق شکل ۱ می‌باشد، پنج حالت زمینه توسط پنج میدان لیزری تپی مستقل جفت شده‌اند و هر زوج از حالت‌های پایه، در تشدید دوفوتونی و حالت تحریکی در تشدید تکفوتونی قرار دارند. معادله شرودینگر برای این دستگاه، با فرض  $(\hbar = 1)$  به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۱. الگوی جفت شدگی دستگاه پنج پایه.

$|0\rangle$ ،  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  نمایش داده می‌شوند که حالت‌های پایه برای محاسبات کوانتومی‌اند. در سال‌های اخیر استفاده از کیوتریت‌ها بیشتر به عنوان واحدهای اطلاعات کوانتومی به جای کیوبیت‌ها گزارش شده است [۴ و ۵]. به عنوان مثال از کیوتریت‌ها برای انتقال دادن اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی [۶ و ۷]، ذخیره‌سازی اطلاعات با ظرفیت بالا و ارتباطات کوانتومی با امنیت بسیار بالا [۸] و روش کوانتومی یون تله مایع [۹] استفاده شده است. درگاه‌های  $n$ -کیوتریتی و  $n$ -کیوکوادریتی<sup>۱</sup> به ترتیب ماتریس‌های  $3^n \times 3^n$  و  $4^n \times 4^n$  می‌باشند که  $n$  تعداد کیوتریت‌ها یا تعداد کیوکوادریتهایی می‌باشد که این درگاه‌ها به طور همزمان بر آنها عمل می‌کنند. کیوتریت‌ها به شکل یک ماتریس از گروه  $U(3^n)$  و کیوکوادریته‌ها به شکل یک ماتریس از گروه  $U(4^n)$  هستند. در بحث کیوتریت‌ها معمولاً یک دستگاه با سه حالت زمینه در نظر گرفته می‌شود، در صورتی که کیوبیت‌ها شامل دو حالت زمینه هستند. همچنین درگاه‌های کیوکوادریته در دستگاه‌هایی با چهار حالت زمینه در نظر گرفته می‌شوند.

روش گذار بی‌درروی تحریکی رامان<sup>۲</sup> (استیرپ)، یکی از روش‌های ساده و مؤثر برای انتقال جمعیت در دستگاه‌های سه تراز  $\Lambda$ -گونه می‌باشد. در این روش انتقال جمعیت بین دو حالت زمینه بدون جمعیت‌دار شدن تراز برانگیخته، با استفاده از

۱. ququadrit

۲. Stimulated Raman Adiabatic Passage

۳. counterintuitive pulse

۴. tripod

۵. Unanyan

۶. stokes pulse

۷. control pulse

۸. Morris-Shore

که شکل تپها، وابستگیهای زمانی مختلف، دامنهها و فازهای مختلف داشته باشند

$$\Omega_j(t) \equiv |\Omega_j(t)| e^{i\varphi_j}, \quad j=1, \dots, 5 \quad (3)$$

در رابطه بالا،  $\varphi_j$ ها فازهای ثابت و اولیه تپها میباشند. در این قسمت، هدف ما تبدیل حالت اولیه دستگاه در زمان  $t_i$ ،  $|\Psi(t_i)\rangle = |1\rangle$  به یک برهم‌نهی هم‌دوس و اختیاری از حالت‌های زمینه در انتهای اندرکنش در زمان  $t_f$  است. بنابراین برای حالت نهایی دستگاه داریم

$$|\Psi(t_f)\rangle = \sum_{j=1}^5 \alpha_j |j\rangle, \quad \sum_{j=1}^5 |\alpha_j|^2 = 1, \quad (4)$$

در اینجا فرض می‌کنیم سه تپی که با حالت اولیه مرتبط نیستند، یعنی تپ‌های  $\Omega_5, \Omega_4, \Omega_3$ ، وابستگی زمانی یکسانی داشته باشند. می‌توان دو زاویه مستقل از زمان  $\theta_j$  را ( $0 \leq \theta_j < \frac{\pi}{2}$ ) به صورت زیر تعریف کرد

$$\frac{|\Omega_4(t)|}{|\Omega_3(t)|} = \tan \theta_1, \quad (5-الف)$$

$$\frac{|\Omega_5(t)|}{\sqrt{|\Omega_3(t)|^2 + |\Omega_4(t)|^2}} = \tan \theta_2, \quad (5-ب)$$

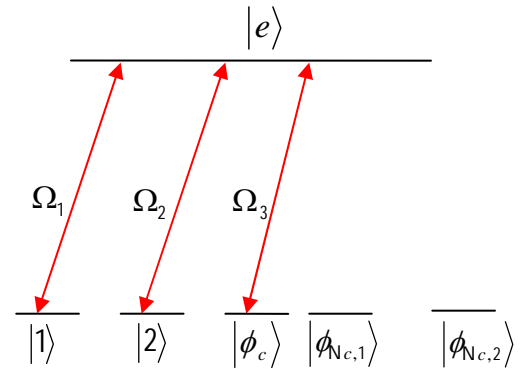
طبق تبدیل موریس-شور (MS) [۱۴]، می‌توان پایه‌ای یافت که دو حالت را از حالت‌های دیگر جدا نماید [۱۵]، مطابق شکل ۲. چنین تبدیل مستقل از زمانی برای یک دستگاه شش ترازی برابر است با:

$$T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_{43}} \sin \theta_1 \cos \theta_2 & 0 & e^{i\varphi_{43}} \cos \theta_1 & e^{i\varphi_{43}} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_{53}} \sin \theta_2 & 0 & 0 & -e^{i\varphi_{53}} \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$$|\varphi_{Nc,1}\rangle = -\sin \theta_1 |3\rangle + e^{i\varphi_{43}} \cos \theta_1 |4\rangle, \quad (7-الف)$$

$$|\varphi_{Nc,2}\rangle = \cos \theta_1 \sin \theta_2 |3\rangle + e^{i\varphi_{43}} \sin \theta_1 \sin \theta_2 |4\rangle - e^{i\varphi_{53}} \cos \theta_2 |5\rangle. \quad (7-ب)$$

بدین ترتیب هامیلتونی تبدیل یافته  $T_5^\dagger H_5(t) T_5$ ، برای دستگاهی که به یک دستگاه چهار تراز (سه پایه) در زیر



شکل ۲. الگوی جفت شدگی سیستم پنج پایه، در پایه جدید که دو حالت آن جدا شده است و با هیچ حالت دیگری جفت‌شدگی ندارد.

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H_5(t) |\Psi(t)\rangle. \quad (1)$$

هامیلتونی مؤثر دستگاه شش تراز در تقریب موج چرخان<sup>۱</sup> عبارت است از:

$$H_5(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_5 \\ \Omega_1^* & \Omega_2^* & \Omega_3^* & \Omega_4^* & \Omega_5^* & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

فرکانس‌های رابی مربوط به جفت‌شدگی‌های بین حالات پایه و حالت برانگیخته به صورت رابطه (۳) می‌باشد. فرض می‌کنیم

در رابطه (۶)،  $\varphi_{j,3} = \varphi_j - \varphi_3$ ،  $j=4,5$ ، به وسیله این تبدیل می‌توان دستگاهی معادل با چهار حالت و دو حالت جدا شده (حالت تاریک) ساخت، این دو حالت تاریک که در دو ستون آخر تبدیل  $T_5$  قرار گرفته‌اند، عبارتند از:

۱. Rotating Wave Approximation

به صورت زیر:

$$\tan \vartheta(t) = \frac{|\Omega_1(t)|}{|\Omega_C(t)|}, \quad 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, \quad (۱۲-الف)$$

$$\tan \phi(t) = \frac{|\Omega_2(t)|}{\sqrt{|\Omega_1(t)|^2 + |\Omega_C(t)|^2}}, \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}. \quad (۱۲-ب)$$

ویژه بردارهای متناظر با این ویژه مقادیر، تعیین می‌شوند. حالت‌های متناظر با ویژه مقادیر صفر یا حالت‌های تاریک<sup>۱</sup>، عبارتند از:

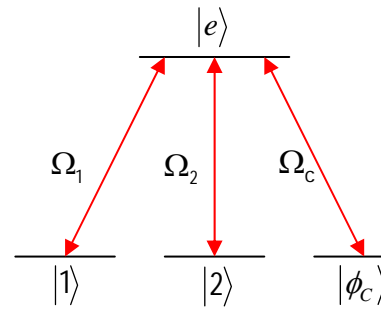
$$\begin{aligned} |v_1(t)\rangle &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta(t) \\ 0 \\ -e^{i\varphi_3} \sin \vartheta(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ |v_2(t)\rangle &= \begin{bmatrix} \sin \vartheta(t) \sin \phi(t) \\ -e^{i\varphi_2} \cos \phi(t) \\ e^{i\varphi_3} \cos \vartheta(t) \sin \phi(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (۱۳)$$

و حالت‌های روشن متناظر با ویژه مقادیر غیر صفر، عبارتند از:

$$\begin{aligned} |v_+(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin \vartheta(t) \cos \phi(t) \\ e^{i\varphi_2} \sin \phi(t) \\ e^{i\varphi_3} \cos \vartheta(t) \cos \phi(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \\ |v_-(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin \vartheta(t) \cos \phi(t) \\ e^{i\varphi_2} \sin \phi(t) \\ e^{i\varphi_3} \cos \vartheta(t) \cos \phi(t) \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (۱۴)$$

### ۳. هامیلتونی بی‌درروی دستگاه در پایه‌های جدید

تبدیل  $S(t)$  که تبدیلی یکانی بین حالت‌های ایجاد کننده زیر فضای  $S_T = \{|1\rangle, |2\rangle, |\varphi_c\rangle, |e\rangle\}$  و حالت‌های بی‌دررو می‌باشد، به صورت زیر نوشته می‌شود



شکل ۳. الگوی جفت شدگی سیستم پنج پایه کاهش یافته به سیستم سه پایه در زیر فضای جدید.

فضای جدید  $S_T = \{|1\rangle, |2\rangle, |\varphi_c\rangle, |e\rangle\}$ ، مطابق شکل ۳، کاهش یافته است، عبارت است از:

$$\begin{aligned} H_T(t) &= T_5^\dagger H_5(t) T_5 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Omega_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_C(t) \\ \Omega_1^*(t) & \Omega_2^*(t) & \Omega_C^*(t) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (۸)$$

در به دست آوردن رابطه بالا توجه داشته باشید که  $\Omega_5, \Omega_4, \Omega_3$  وابستگی زمانی یکسانی دارند ولی می‌توانند دامنه‌های متفاوتی داشته باشند. در رابطه (۸)،  $\Omega_C(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega_C(t) = \frac{\Omega_3(t)}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}. \quad (۹)$$

در زیر فضای  $S_T$  حالت جفت شده  $|\varphi_c\rangle$ ، برابر است با [۱۵]

$$\begin{aligned} |\varphi_c\rangle &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 |3\rangle + e^{i\varphi_{43}} \sin \theta_1 \cos \theta_2 |4\rangle \\ &\quad + e^{i\varphi_{53}} \sin \theta_2 |5\rangle. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰) مرجع فازی را به صورت  $\varphi_1 \equiv \arg[\Omega_1(t)] = 0$ ، به کار می‌بریم دستگاه سه پایه مؤثر به دست آمده در زیر فضای جدید دارای سه ویژه مقدار است که دوتای آنها تبهگنی دارند

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = 0, \quad \lambda_+(t) = \frac{\Omega(t)}{2} = -\lambda_-(t), \quad (۱۱)$$

در رابطه بالا  $\Omega(t) = \sqrt{|\Omega_1(t)|^2 + |\Omega_2(t)|^2 + |\Omega_C(t)|^2}$  می‌باشد. با تعریف زوایای آمیختگی وابسته به زمان  $\phi(t), \vartheta(t)$ ،

۱. dark state

$$S(t) = (|v_1(t)\rangle, |v_2(t)\rangle, |v_+(t)\rangle, |v_-(t)\rangle)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \vartheta(t) & \sin \vartheta(t) \sin \phi(t) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta(t) \cos \phi(t) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta(t) \cos \phi(t) \\ 0 & -\cos \phi(t) e^{i\varphi_2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi(t) e^{i\varphi_2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi(t) e^{i\varphi_2} \\ -\sin \vartheta(t) e^{i\varphi_3} & \cos \vartheta(t) \sin \phi(t) e^{i\varphi_3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta(t) \cos \phi(t) e^{i\varphi_3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \vartheta(t) \cos \phi(t) e^{i\varphi_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

هستند، صرف‌نظر نموده ولی گذارهای بین حالت‌های تبهگن بی‌دررو را به حساب می‌آوریم. شرایط تقریب گذار بی‌دررو عبارتند از

$$\left| \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{2}} \right| \ll \frac{\Omega}{2}, \quad (20\text{-الف})$$

$$\left| \frac{\dot{\phi} \cos \phi(t)}{\sqrt{2}} \right| \ll \frac{\Omega}{2}. \quad (20\text{-ب})$$

در این صورت خواهیم داشت

$$H_T^{ad}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -i\dot{\vartheta} \sin \phi(t) & 0 & 0 \\ i\dot{\vartheta} \sin \phi(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Omega(t)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\Omega(t)}{2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

#### ۴. عملگر تحول زمانی در شرایط تقریب بی‌دررو

بر اساس هامیلتونی (۲۱) عملگر تحول زمانی در شرایط تقریب بی‌دررو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U_T^{ad}(t, t_i) = \exp[-i \int_{t_i}^t H_T^{ad}(s) ds]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma(t) & -\sin \gamma(t) & 0 & 0 \\ \sin \gamma(t) & \cos \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{+i\delta(t)} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

که در آن  $\gamma(t)$  و  $\delta(t)$  به ترتیب فازهای هندسی و دینامیکی هستند که طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\gamma(t) = \int_{t_i}^t ds \dot{\vartheta}(s) \sin \phi(s), \quad (23)$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \int_{t_i}^t \Omega(s) ds. \quad (24)$$

از آنجا که می‌دانیم دینامیک متناظر با هامیلتونی بی‌دررو عبارت است از

$$\frac{d}{dt} |\Phi_T(t)\rangle = -i H_T^{ad}(t) |\Phi_T(t)\rangle, \quad (16)$$

و همچنین بردار حالت  $|\Psi_T(t)\rangle$  در زیر فضای  $S_T$  از معادله شرودینگر زیر تبعیت می‌کند

$$\frac{d}{dt} |\Psi_T(t)\rangle = -i H_T(t) |\Psi_T(t)\rangle, \quad (17)$$

با استفاده از رابطه بین  $|\Phi_T(t)\rangle$  متناظر با هامیلتونی بی‌درروی  $H_T^{ad}(t)$ ، و بردار حالت  $|\Psi_T(t)\rangle$  متناظر با هامیلتونی مؤثر  $H_T(t)$ ، توسط تبدیل یکانی  $S(t)$ ، که به شکل زیر می‌باشد:

$$|\Psi_T(t)\rangle = S(t) |\Phi_T(t)\rangle, \quad (18)$$

هامیلتونی در پایه‌های بی‌دررو، به صورت زیر به دست می‌آید

$$H_T^{ad}(t) = S^+(t) H_T(t) S(t) - i S_T^+(t) \frac{\partial S(t)}{\partial t} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -i\dot{\vartheta} \sin \phi(t) & \frac{-i\dot{\vartheta} \cos \phi(t)}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \dot{\vartheta} \cos \phi(t) \\ i\dot{\vartheta} \sin \phi(t) & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \dot{\phi} & \frac{i}{\sqrt{2}} \dot{\phi} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \dot{\vartheta} \cos \phi(t) & \frac{-i}{\sqrt{2}} \dot{\phi} & \frac{\Omega(t)}{2} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \dot{\vartheta} \cos \phi(t) & \frac{-i}{\sqrt{2}} \dot{\phi} & 0 & \frac{\Omega(t)}{2} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

در اینجا در تقریب بی‌دررو، از مشتق زمانی زوایای آمیختگی  $\vartheta(t), \phi(t)$  که در مقایسه با اختلاف ویژه مقادیر  $\frac{\Omega}{2}$  کوچک

$$S(t_f) = \begin{bmatrix} 0 & \sin \phi_f & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi_f & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi_f \\ 0 & -\cos \phi_f e^{i\varphi_2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi_f e^{i\varphi_2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi_f e^{i\varphi_2} \\ -e^{i\varphi_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

برای عملگر تحول زمانی مؤثر و حالت دستگاه در هر لحظه از زمان می توان نوشت:

$$U_T(t, t_i) = S(t) U_T^{ad}(t, t_i) S^+(t_i), \quad (28)$$

$$|\Psi_T(t)\rangle = U_T(t, t_i) |\Psi(t_i)\rangle. \quad (29)$$

با قرار دادن روابط (۲۲)، (۲۶) و (۲۷) در (۲۸) و با قرار دادن  $(t = t_f)$  عملگر تحول زمانی مؤثر عبارت است از:

$$U_T(t_f, t_i) = \begin{bmatrix} \sin \phi_f \sin \gamma_f & -\sin \phi_f \cos \gamma_f e^{-i\varphi_2} & \cos \phi_f \cos \delta_f e^{-i\varphi_3} & -i \cos \phi_f \sin \delta_f \\ -\cos \phi_f \sin \gamma_f e^{i\varphi_2} & \cos \phi_f \cos \gamma_f & \sin \phi_f \cos \delta_f e^{i(\varphi_2 - \varphi_3)} & -i \sin \phi_f \sin \delta_f e^{i\varphi_2} \\ -\cos \gamma_f e^{i\varphi_3} & -\sin \gamma_f e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \sin \delta_f e^{-i\varphi_3} & \cos \delta_f \end{bmatrix} \quad (30)$$

تغییرات کوچک پارامترهای وابسته به زمان هامیلتونی حساس نیست و فقط به هندسه مسیر بسته حرکت دستگاه در فضای پارامتر متناظر با دستگاه بستگی دارد و وجه تسمیه آن به همین دلیل است. کنترل فاز هندسی لازم می دارد که تحول زمانی دستگاه بی دررو بوده و ترجیحاً آن ویژه بردار لحظه ای را دنبال کند که با ویژه مقدار صفر متناظر است. بدین ترتیب فاز دینامیکی که کنترل آن بسیار مشکل است، خود به خود حذف می شود [۱۶]. محاسبات عددی تحول زمانی جمعیت دستگاه نشان می دهد که فاز هندسی به نسبت فرکانس رابی بیشینه و تأخیر زمانی  $\tau$  بین  $\Omega_2$  و تپ های دیگر بستگی دارد. برای شرط اولیه  $|\Psi(t_i)\rangle = |1\rangle$  که در زیر فضای جدید هم متناظر است با  $|\Psi_T(t_i)\rangle = |1\rangle$  و با استفاده از (۲۹) و (۳۰)، حالت نهایی به شکل زیر به دست می آید:

حال طبق ترتیب تپی غیر شهودی، ابتدا تپ های  $\Omega_1(t), \Omega_2(t)$  و سپس تپ های  $\Omega_3(t), \Omega_4(t), \Omega_5(t)$  روشن می شوند. بدین ترتیب با استفاده از روابط (۱۲) برای زوایای آمیختگی اولیه و نهایی خواهیم داشت:

$$\vartheta(t_i) = 0, \quad \phi(t_i) = 0, \quad \vartheta(t_f) = \frac{\pi}{2}. \quad (25)$$

با مقادیر فوق، تبدیل یکانی  $S(t)$  در زمان های اولیه  $t_i$  و نهایی  $t_f$  به صورت زیر نوشته می شود:

$$S(t_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{i\varphi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{i\varphi_3}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\varphi_3}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

که در آن  $\gamma_f \equiv \gamma(t_f)$ ،  $\phi_f \equiv \phi(t_f)$  و  $\delta_f \equiv \delta(t_f)$  می باشند.

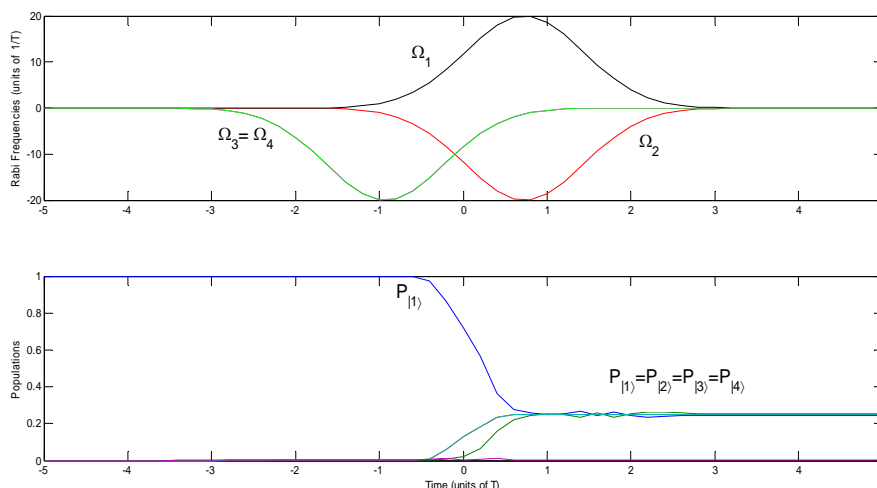
### ۵. برهم نهی حالت های زمینه توسط استیرپ

حضور فاز هندسی  $\gamma(t)$ ، وابسته به وجود سه حالت تاریک تبهگن کلی از دستگاه، بدین صورت بیان می گردد:

$$\gamma_f = \int_{t_i}^{t_f} ds \dot{\vartheta}(s) \sin \phi(s) = \oint_C d\vartheta \sin \phi \quad (31)$$

$$= \oint_C \frac{|\Omega_2| (|\Omega_C| |d\Omega_1| - |\Omega_1| |d\Omega_C|)}{C (|\Omega_1|^2 + |\Omega_C|^2) \sqrt{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2 + |\Omega_C|^2}}$$

$C$  مسیر بسته ای در فضای سه بعدی تشکیل شده از سه پارامتر وابسته به زمان  $|\Omega_1|$ ،  $|\Omega_2|$  و  $|\Omega_C|$  می باشد. مسیر متناظر با دستگاه در این فضا، از نقطه  $|\Omega_1| = |\Omega_2| = |\Omega_C| = 0$  شروع شده و در همین نقطه هم پایان می یابد. فاز هندسی یا فاز هولونومیک، نسبت به



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول زمانی پالس‌ها (بالا) و جمعیت (پایین) در سیستم پنج تراز با در نظر گرفتن پارامترهای  $T=1$ ،  $\Omega_0=20$  و  $\tau=0,84$  و بر اساس پالس‌های (۳۶) و (۳۷).

حالت‌های زمینه با دامنه‌های مساوی به دست خواهد آمد

$$|\psi(t_f)\rangle = \frac{1}{2}[|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle]. \quad (35)$$

برای برآورده کردن شرایط (۳۴) از تپ‌های گاوسی به صورت زیر استفاده می‌نماییم:

$$\Omega_1(t) = -\Omega_2(t) = \Omega_0(t) e^{-[(t-\tau)/T]^2} \quad (36)$$

$$\Omega_3(t) = \Omega_4(t) = -\Omega_0(t) e^{-[(t+\tau)/T]^2} \quad (37)$$

$\Omega_0$ ،  $2\tau$  و  $T$ ، که به ترتیب فرکانس‌های بیشینه رابی، تاخیر زمانی بین تپ‌های پمپی و استوکس و پهنای تپی می‌باشند، به صورت  $T=1$ ،  $\Omega_0=20$  و  $\tau=0,84$  انتخاب شده‌اند. ملاحظه می‌شود که جمعیت از حالت اولیه به یک برهم‌نهی از چهار حالت پایه منتقل شده است.

## ۶. ایجاد درگاه‌های کوانتومی تک-کیوتریت

کنترل فاز هندسی، لازم می‌دارد که تحول زمانی دستگاه، بی‌دررو بوده و ترجیحاً آن ویژه بردار لحظه‌ای را دنبال کند که با ویژه مقدار صفر متناظر است. بدین ترتیب فاز دینامیکی که کنترل آن بسیار مشکل است، خود به خود حذف می‌شود. ویژه بردارهای لحظه‌ای، هامیلتونی دستگاه که متناظر با ویژه مقدار صفر هستند و معمولاً مؤلفه‌ای از ترازهای برانگیخته دستگاه

$$|\Psi_T(t_f)\rangle = U_T(t_f, t_i)|1\rangle = \sin \gamma_f \left[ \sin \phi_f |1\rangle - e^{i\varphi_2} \cos \phi_f |2\rangle \right] - e^{i\varphi_3} \cos \gamma_f |\phi_C\rangle \quad (32)$$

بنابراین حالت نهایی دستگاه در پایه‌های اصلی عبارت خواهد بود از:

$$|\Psi(t_f)\rangle = \sin \gamma_f \left[ \sin \phi_f |1\rangle - e^{i\varphi_2} \cos \phi_f |2\rangle \right] - \cos \gamma_f \left[ e^{i\varphi_3} \cos \theta_1 \cos \theta_2 |3\rangle + e^{i\varphi_4} \sin \theta_1 \cos \theta_2 |4\rangle + e^{i\varphi_5} \sin \theta_2 |5\rangle \right] \quad (33)$$

که با یک برهم‌نهی به شکل رابطه (۴)، متناظر می‌باشد. با کنترل زوایای  $\theta_j$  ( $j=1,2$ )،  $\phi_f$  و  $\gamma_f$  می‌توان توسط گذار بی‌دررو، یک برهم‌نهی همدوس اختیاری از حالت‌های زمینه ایجاد نمود. ذکر این نکته ضروری است که با توجه به اینکه  $|\phi_C\rangle$  یک برهم‌نهی از حالت‌های  $|3\rangle$ ،  $|4\rangle$  و  $|5\rangle$  می‌باشد، بنابراین عملگر تحول زمانی (۳۰) برای حالتی که تپ‌های  $\Omega_5$  و  $\Omega_6$  خاموش باشد نیز برقرار است. شکل ۴ مثالی از چنین برهم‌نهی را برای دستگاه چهار پایه نشان می‌دهد که ترتیب تپی آن، روابط زیر را برآورده می‌کند:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_f = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma_f = \frac{\pi}{4}, \quad (34)$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \pi$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه (۳۳)، یک برهم‌نهی از

درگاه‌های تک-کیوتریت مختلفی را تحت زوایای مختلف برای زاویه آمیختگی  $\phi_f$ ، که  $0 \leq \phi_f < \pi/2$  می‌باشد و برای فاز هندسی  $\gamma_f$ ، ایجاد کرد.

حالت اول: با در نظر گرفتن  $\phi_f = 0, \gamma_f = \frac{3\pi}{2}$  داریم:

$$Z_3(+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

در رابطه (۴۰)،  $Z_3(+1)$  یک عملگر تک-کیوتریت می‌باشد. اگر فرض کنیم که حالت اولیه دستگاه به ترتیب حالت‌های  $|0\rangle$ ،  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  باشد که این حالت‌ها متناظر با  $|0\rangle = [1 \ 0 \ 0]^T$ ،  $|1\rangle = [0 \ 1 \ 0]^T$  و  $|2\rangle = [0 \ 0 \ 1]^T$  می‌باشند، با تأثیر دادن این حالت‌های اولیه بر روی درگاه  $Z_3(+1)$ ، حالت‌های نهایی دستگاه به ترتیب به صورت  $|0\rangle$ ،  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  تغییر می‌یابند، به عبارتی حالت‌های کیوتریت به وسیله کت  $|1\rangle$  به صورت رابطه (۴۱) جایگشت پیدا می‌کنند

$$\begin{aligned} Z_3(+1)|0\rangle &= |1\rangle, \\ Z_3(+1)|1\rangle &= |2\rangle, \\ Z_3(+1)|2\rangle &= |0\rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

حالت دوم: اینک با در نظر گرفتن  $\phi_f = \frac{\pi}{2}$ ،  $\gamma_f = \pi$ ، یکی دیگر از درگاه‌های تک-کیوتریت،  $Z_3(+2)$  را می‌توان به دست آورد:

$$Z_3(+2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

با تأثیر دادن  $Z_3(+2)$  روی حالت‌های اولیه تعریف شده، حالت‌های نهایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Z_3(+2)|0\rangle = |2\rangle, \quad Z_3(+2)|1\rangle = |0\rangle, \quad Z_3(+2)|2\rangle = |1\rangle \quad (43)$$

حالت سوم: همچنین با در نظر گرفتن  $\phi_f = \frac{\pi}{4}$ ،  $\gamma_f = \pi$ ، می‌توان به یکی از درگاه‌های هادامارد<sup>۱</sup> برای تک-کیوتریت رسید:

$$H^{(01)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

ندارند، به اصطلاح حالت‌های تاریک نامیده می‌شوند و به دلیل متناظر بودن با فاز دینامیکی صفر و عدم وجود گسیل خود به خودی، اهمیت زیادی در طراحی درگاه‌های کوانتومی دارند. در اینجا بعد از به دست آوردن عملگر تحول زمانی، به جای استفاده از حالت‌های تاریک، با تنظیم مساحت تپ، فاز دینامیکی را حذف می‌کنیم، یعنی  $\delta_f = 0$ . در رابطه (۳۰) با در نظر گرفتن  $\delta_f = 0$  عملگر تحول زمانی به صورت رابطه (۳۸) خواهد شد که رابطه بین عملگر تحول زمانی فقط ما بین ترازهای پایه برقرار می‌شود، به عبارتی تحول زمانی جمعیت دستگاه در زیر فضای متشکل از حالت‌های پایه،  $|1\rangle$  تا  $|5\rangle$  خواهد بود:

$$U_T(t_f, t_i) = \begin{bmatrix} \sin \phi_f \sin \gamma_f & -\sin \phi_f \cos \gamma_f & \cos \phi_f & 0 \\ -\cos \phi_f \sin \gamma_f & \cos \phi_f \cos \gamma_f & \sin \phi_f & 0 \\ -\cos \gamma_f & -\sin \gamma_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

در رابطه (۳۸)  $\phi = 2n\pi$ ،  $n = 1, 2, \dots$  را قرار دادیم.

با بلوک در نظر گرفتن عملگر تحول زمانی، رابطه (۳۸) را می‌توان به یک ماتریس  $3 \times 3$  یکانی تبدیل کرد. لذا به ازای  $\delta_f = 0$ ، عملگر تحول زمانی به صورت زیر خواهد شد:

$$U_T(t_f, t_i) = \begin{bmatrix} \sin \phi_f \sin \gamma_f & -\sin \phi_f \cos \gamma_f & \cos \phi_f \\ -\cos \phi_f \sin \gamma_f & \cos \phi_f \cos \gamma_f & \sin \phi_f \\ -\cos \gamma_f & -\sin \gamma_f & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

عملگر تحول زمانی در رابطه (۳۹) در زیر فضای حالت‌های  $\{ |1\rangle, |2\rangle, |\varphi_c\rangle \}$  نوشته شده است که  $|\varphi_c\rangle$  یک برهم نهی از حالت‌های پایه  $\{ |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle \}$  به صورت  $|\varphi_c\rangle = \cos \theta_1 \cos \theta_2 |3\rangle + \sin \theta_1 \cos \theta_2 |4\rangle + \sin \theta_2 |5\rangle$  یک دستگاه چهار پایه می‌باشد.

کیوتریت‌ها معمولاً یک دستگاه با سه حالت زمینه در نظر گرفته می‌شوند، حالت‌های کیوتریت به وسیله سه بردار  $|0\rangle$ ،  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  نمایش داده می‌شوند. ساده‌ترین درگاه‌های  $n$ -کیوتریتی، درگاه‌های تک-کیوتریت می‌باشند که به شکل یک ماتریس  $3 \times 3$  نمایش داده می‌شوند. در این قسمت می‌توان

۱. Hadamard



می‌رسیم. نتایج بالا را می‌توان برای درگاه‌های کوانتومی کیوکوادریت، در دستگامی با چهار حالت زمینه که دارای شکل ماتریسی  $4 \times 4$  می‌باشند، تعمیم داد. از آنجایی که دستگاه مورد بررسی ما یک دستگاه پنج پایه می‌باشد، می‌توان این دستگاه پنج پایه را به دستگاه  $N$  پایه تعمیم داد و درگاه‌های کوانتومی کیونیت<sup>۱</sup> را طراحی کرد. درگاه‌های  $n$ -کیونیت به شکل یک ماتریس از نوع  $N^n \times N^n$  و از گروه  $U(N^n)$  می‌باشند. با طراحی درگاه‌های کوانتومی  $n$ -کیوتریت،  $n$ -کیوکوادریت و  $n$ -کیونیت می‌توان درگاه‌های کوانتومی مختلفی را ساخت. با توجه به آن که بعد درگاه کیونیت،  $N$  می‌باشد، می‌توان اطلاعات کوانتومی بیشتری را در آنها ذخیره کرد [۱۷-۱۹].

## ۷. نتیجه‌گیری

با طراحی متفاوت بسامدهای رابی دستگاه‌های چند پایه و تنظیم دقیق دامنه تپ‌ها و تأخیر زمانی آنها، می‌توان درگاه‌های کوانتومی متفاوت ولی ساده‌ای را در شرایط متفاوت ایجاد کرد. در واقع در این مقاله با انتخاب فازهای هندسی مناسب و با حذف کنترل شده فاز دینامیکی دستگاه، عملگر تحول زمانی به یک ماتریس  $3 \times 3$  تبدیل می‌شود و توسط عملگر تحول زمانی به دست آمده، می‌توان به چند درگاه تک-کیوتریت رسید. طراحی درگاه‌های کوانتومی تک-کیوتریت، می‌تواند علاوه بر ساده‌سازی محاسبات در فرآیند پردازش اطلاعات کوانتومی، طراحی مدارهای کوانتومی با دقت و ظرفیت بالا را نیز میسر سازد. مزیت اصلی استفاده از روش گذار بی‌دررو آن است که تراز برانگیخته در طی تحول زمانی دستگاه جمعیت‌دار نمی‌شود بنابراین اثر ناهمدوسی ناشی از گسیل خودبه‌خودی اتمی بروز نمی‌کند. از طرفی روش گذار بی‌دررو زورمند است، یعنی جمعیت نهایی دستگاه نسبت به تغییرات جزئی پارامترهای وابسته به زمان هامیلتونی دستگاه و زوایای آمیختگی، حساس نیست.

حال اگر درگاه هادامارد  $H^{(01)}$  را روی حالت‌های اولیه تعریف شده دستگاه، اثر دهیم به یک برهم‌نهی از حالت‌های زیر خواهیم رسید

$$\begin{aligned} H^{(01)}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ H^{(01)}|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), \end{aligned} \quad (45)$$

$$H^{(01)}|2\rangle = |2\rangle.$$

حالت چهارم: برای رسیدن به یک درگاه هادامارد تک-کیوتریت دیگر، بایستی  $\varphi_f = \frac{\pi}{4}$ ،  $\gamma_f = \frac{3\pi}{4}$  باشد، لذا داریم:

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

در رابطه بالا  $H = H^{(01)} \times H^{(12)}$  می‌باشد، که  $H^{(01)}$  و  $H^{(12)}$  هر کدام درگاه‌های تک-کیوتریت هادامارد می‌باشند. اگر  $H$  را روی حالت‌های اولیه، ذکر شده در بالا اعمال کنیم، به یک برهم‌نهی از حالت‌های زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ H|1\rangle &= \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle), \\ H|2\rangle &= \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle) \end{aligned} \quad (47)$$

به این ترتیب مشاهده می‌کنیم که درگاه‌های کیوتریت حالت‌های دستگاه را عوض می‌کنند، لذا از آنها برای پردازش اطلاعات کوانتومی استفاده می‌شود. از ترکیب کیوتریت‌های معرفی شده، به راحتی می‌توان به درگاه‌های دیگری به صورت زیر رسید:

$$H^{(12)} = H^{(01)} \times H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$U_I = Z_3(+1) \times Z_3(+2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

در روابط (۴۸) و (۴۹)  $H^{(12)}$ ،  $U_I$  به ترتیب درگاه‌های تک-کیوتریت هادامارد و یکانی می‌باشند. در زیر فضای  $|1\rangle, |2\rangle$ ،

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ به درگاه مشهور تک-کیوبیت}$$

## مراجع

- (1995) 255.
11. C H Bennett, *Phys. Today* **48** (1995) 24.
  12. K Bergmann, H Theuer, and B W Shore, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 1003.
  13. R G Unanyan, M Fleischhuer, B W Shore, and K Bergmann, *Opt. Commun.* **155** (1998) 144.
  14. J R Morris and B W Shore, *Phys. Rev. A* **27** (1983) 906.
  15. E S Kyoseva and N V Vitanov, *Phys. Rev. A* **73** (2006) 023420.
  16. M V Berry, *Pro. R. Soc. London A* **392** (1984) 45.
  17. M Reck, A Zeilinger, H J Bernstein, and P Bertani, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 58.
  18. A Muthukrishnan and C R Stroud Jr, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 052309.
  19. S S Bullock, D P O'Leary, and G K Brennen, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 230502.
  1. Y Makhlin, G Schon, and A Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001) 357.
  2. M A Nielsen and I L Chuang, "*Quantum Computation and Quantum Information*", Cambridge University Press, Cambridge (2000).
  3. A Galindo and M A Martin-Delgado, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 383.
  4. D M Hugh, J Twamley, *New J. Phys.* **7** (2005) 174.
  5. Y Zhan *et al.*, *Opt. Commun.* **282** (2009) 4633.
  6. J Kempe and K B Whaley, *Phys. Rev. A* **65** (2002) 052330.
  7. R T Thew, K Nemoto, A G White, and W J Munro, *Phys. Rev. A* **6** (2002) 012303.
  8. C M Caves and G J Milburn, *Opt. Commun.* **179** (2000) 439.
  9. A Muthukrishnan and C R Stroud, *Phys. Rev. A* **62** (2000) 052309.
  10. D P Divincenzo, *Quantum Computation, Science* **270**