

## کاربست روش طیفی برای حل عددی معادلات آب کم عمق منطقه محدود

حسین غلامی<sup>۱</sup>، علیرضا محب‌الحجه<sup>۲\*</sup> و سرمد قادر<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانش‌آموخته کارشناسی ارشد هواشناسی، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران  
<sup>۲</sup> دانشیار، گروه فیزیک فضا، مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران، ایران

(دریافت: ۹۰/۱۱/۱۵، پذیرش نهایی: ۹۱/۴/۱۳)

### چکیده

در این پژوهش، روش شبه‌طیفی برای حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی غیرخطی در منطقه محدود به کار گرفته می‌شود. روش شبه‌طیفی بر استفاده از توانایی روش طیفی در برآورد مشتقات فضایی تابع‌هایی که به قدر کافی هموارند، استوار است. در مدل منطقه محدود ساخته شده بر مبنای طرحواره دارای پایستاری آنستروپی پتانسیلی سادورنی برای معادلات آب کم عمق یا بسط فشارورد، به جای تفاضل مرکزی از روش طیفی بر مبنای تابع‌های فوریه برای برآورد مشتقات فضایی استفاده می‌شود. برای کاربرت روش شبه‌طیفی در منطقه محدود که در هیچ‌یک از دو راستای شرقی-غربی و شمالی-جنوبی حوزه محاسباتی دوره‌ای نیست، از الگوی گسترش و واهلش هاگن و مکنهور استفاده می‌شود. برای پایداری محاسباتی یک میرایی صریح به صورت پخش عددی با ضرایب متفاوت برای معادلات تکانه و ژئوپتانسیل به الگوریتم افزوده می‌شود. برای به‌روزرسانی کمیت‌های مدل در هر گام زمانی از طرحواره زمانی لیپ‌فراگ به همراه پالایه روبرت-آسلین استفاده می‌شود. نتایج برای یک مورد پیش‌بینی ۴۸ ساعته با استفاده از روش طیفی در تفکیک‌های فضایی ۱۵۰، ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر عرضه و مقایسه می‌شوند. جواب‌ها در تفکیک ۱۵۰ کیلومتر به دلیل اثر پخش عددی و نیز میرایی خود میدان زمینه بسیار هموارند و این میرایی زیاد باعث جدایی جواب‌ها از جواب‌های متناظر الگوریتم تفاضل متناهی می‌شود. با این حال در تفکیک‌های ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر حرکت الگوهای مقیاس همدیدی و حتی زیرهمدیدی دارای نمایشی رضایت‌بخش هستند. محاسبه خطای روش طیفی از دیدگاه نبود توازن، حاکی از گسیل بی‌توازی نسبتاً بزرگی از منطقه گسترش به داخل حوزه محاسباتی است.

واژه‌های کلیدی: منطقه محدود، معادلات آب کم عمق، روش شبه‌طیفی، روش تبدیل، گسترش دوره‌ای، منطقه واهلش، میدان

زمینه

## Application of the spectral method to solve the limited-area shallow-water equations

Gholami, H.<sup>1</sup>, Mohebalhojeh, A. R.<sup>2</sup> and Ghader, S.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>M.Sc. Graduate of Meteorology, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

<sup>2</sup>Associate Professor, Space Physics Department, Institute of Geophysics, University of Tehran, Iran

(Received: 04 Feb 2012, Accepted: 03 Jul 2012)

### Abstract

The pseudo-spectral method is used to solve the shallow-water equations in a limited-area domain. The spectral computation of spatial derivatives in the pseudo-spectral method makes it in effect equivalent to a Galerkin spectral-transform method commonly used in numerical modeling of fluid flows. Based on the potential-*enstrophy* conserving scheme introduced by Sadourny in 1975, the limited-area model is constructed by replacing the

second-order finite-difference computation of spatial derivatives with the spectral method using Fourier basis functions. Since the limited-area domain is not periodic in the east-west and north-south directions, in order to apply the spectral method, the domain has to be made periodic using an extension zone as proposed by Haugen and Machenhauer. The background field obtained using the "Global Forecast System" (GFS) data is extended periodically and matched to the limited-area field across a relaxation zone which is introduced in order to reduce the adverse effects of the artificial extension of the field variables. In this way, the prognostic variables of the limited-area model including the velocity components and geopotential height are made periodic. To alleviate false generation of imbalance in the extension zone, two actions are taken. First, because of its large variation across the main limited-area domain, the geopotential height was decomposed to a zonal mean and a perturbation and the latter field was made periodic. Second, in the extension zone the velocity components were constructed using geostrophic approximation. Even with these two actions, the amount of imbalance penetrating the computation domain was sufficient to cause computational instability. In order to further control the generation of imbalance and reach computational stability, an explicit damping in the form of numerical diffusion was added to the equations of momentum and geopotential height with different diffusion coefficients for momentum and height. For time-stepping, a three-time-level leapfrog scheme with Robert-Asselin filter to remove the computational mode was used.

For a case, previously examined in literature, related to 1<sup>st</sup> of February 2003, results for the 48-hour prediction using the spectral algorithm in 150, 75 and 37.5 km resolutions are presented, compared and assessed using two norms, one measuring the deviation from the actual GFS fields and the other measuring the maintenance of balance during the 48-hour integrations. To determine balanced fields, the first-order implicit normal-mode initialization procedure is used. The spatial resolution refers to the grid spacing at 60° N latitude. At 150 km resolution, the predicted fields are excessively damped due to a combination of the numerical diffusion required for stability and the smoothness of the background fields used in the relaxation process. The excessive damping causes a significant departure of the fields from the results for the second-order finite-difference algorithm. At 75 and 37.5 km resolutions, however, the synoptic and even sub-synoptic scale motions are represented sufficiently well. The assessment of balance maintenance shows that a large amount of imbalance is emitted from the extension zone to the computational domain, making the limited-area spectral algorithm much less balance-preserving compared with the corresponding second-order finite-difference algorithm.

**Key words:** Limited area, Shallow water, Spectral method, Transform method, Periodic extension, Relaxation zone, Background field

## ۱ مقدمه

نظر گرفته شود، روش‌های تفاضل متناهی، و اگر این وابستگی به صورت جهانی (global) در نظر گرفته شود، روش شبه‌طیفی ایجاد می‌شود (دورن، ۲۰۱۰). روش شبه‌طیفی چنان‌که از نام آن برمی‌آید، برگرفته از روش طیفی و در حکم راه‌حل مناسبی برای استفاده از مزایای روش طیفی، بدون مواجهه با مشکلات ناشی از محاسبه

ساخت دسته مهمی از الگوریتم‌های عددی برای حل معادلات دینامیکی حاکم بر حرکت شارها که معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی (PDEs) هستند، بر نحوه محاسبه مشتقات موجود در این معادلات متمرکز است. به‌طور کلی، اگر در محاسبه مشتقات موجود، وابستگی مکانی یک نقطه با نقاط پیرامون آن به صورت محلی در

پژوهش فعلی را از مطالعات پیشین متمایز می‌سازد.

## ۲ مدل فیزیکی و فرمول‌بندی

صورت ناوردای معادلات آب کم‌عمق بدون وارد کردن توپوگرافی چنین است (هالتینر و ویلیامز، ۱۹۸۰):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\zeta + f)\hat{K} \times \mathbf{v} - \nabla(\Phi + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) \quad (2)$$

که در آن،  $\mathbf{v}$  بردار سرعت،  $\hat{K}$  تاوایی نسبی،  $f$  تاوایی سیاره‌ای،  $\Phi$  ژئوپتانسیل و  $\hat{K}$  بردار یکه در راستای قائم محلی است. معادلات تکانه (۱) و پیوستگی جرم (۲) را می‌توان به صورت نرده‌ای در دستگاه مختصات دکارتی بنا شده بر هر نقشه دارای تصویر هم‌مدیس به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (f + \zeta)v - m \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(f + \zeta)u - m \frac{\partial}{\partial y} \left[ \Phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -m^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Phi u}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\Phi v}{m} \right) \right] \quad (5)$$

که در آن،  $u$  و  $v$  مؤلفه‌های بردار باد در امتداد محورهای  $x$  و  $y$  و  $m$  فاکتور نقشه است. با تغییر متغیر مناسب‌تر زیر نوشت به طوری که در آن  $m$  فقط به صورت مربعی ظاهر شود:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = q\underline{V} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ gZ + \frac{1}{2}m^2(U^2 + V^2) \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -q\underline{U} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ gZ + \frac{1}{2}m^2(U^2 + V^2) \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -m^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (U) + \frac{\partial}{\partial y} (V) \right] \quad (8)$$

که در آن،  $Z$  ارتفاع ژئوپتانسیلی و  $\underline{U}$  و  $\underline{V}$  به ترتیب

جملات غیرخطی مطرح شده و کاربردهای فراوانی یافته است. لازم به ذکر است که تحت شرایط خاصی (دورن، ۲۰۱۰)، در واقع روش شبه‌طیفی معادل یک روش تبدیل طیفی (اورجاگ، ۱۹۷۰؛ الیاسن و همکاران، ۱۹۷۰) گالرکین است. به این دلیل، از این پس به جای شبه‌طیفی از عنوان طیفی استفاده می‌کنیم.

ویژه تابع‌های عملگر لاپلاسی مانند هماهنگ‌های کروی برای حوزه‌های کروی و تابع‌های فوریه دوگانه برای حوزه‌های دوره‌ای در هر راستا از جمله تابع‌های جهانی معروف در روش طیفی مورد استفاده‌اند. اما در منطقه محدود، استفاده مستقیم از تابع‌های فوریه، به دلیل برآورد نشدن شرایط مرزی میسر نیست. برای حل این مشکل، هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) روشی برای گسترش منطقه محدود و دوره‌ای‌سازی مصنوعی آن عرضه کرده‌اند که استفاده از تابع‌های فوریه را ممکن می‌سازد. به‌علاوه در این روش، الگوی واهلش دیویس-کالبرگ (دیویس، ۱۹۷۶؛ دیویس و کالبرگ، ۱۹۷۷) به کار گرفته می‌شود تا اثرات منفی دوره‌ای‌سازی مصنوعی را کاهش دهد. از آنجا که از روش هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) در دو دهه اخیر در ساخت مدل‌های منطقه محدود مهمی چون مدل Aladin-NH (بنارد و همکاران، ۲۰۱۰) استفاده شده است، ارزیابی کارکرد آن در قالب مدل ساده‌تری چون معادلات آب کم‌عمق اهمیت دارد. علاوه‌براین، روش طیفی می‌تواند درحکم یکی از گزینه‌های ممکن برای ساخت یک مدل منطقه‌ای مناسب برای کشور ما مطرح باشد. برای پاسخ به این نیازها، مقاله حاضر به معرفی، کاربربست و ارزیابی درستی عددی روش طیفی با تابع‌های پایه فوریه اختصاص دارد. درستی عددی بر مبنای یک نرم خطا با مقایسه با داده‌های موجود برای دوره انتگرال‌گیری و بررسی میزان نبود توازن ایجاد شده در طی تحول زمانی صورت می‌گیرد. لازم به ذکر است که کاربربست فرایافت نبود توازن برای برآورد خطا در مدل طیفی منطقه محدود

اعمال روش تجزیه معادلات آب کم عمق به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = qV - \frac{\partial}{\partial x} \left[ g(\bar{Z} + Z') + \frac{1}{2} m^2 (U^2 + V^2) \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -qU \quad (11)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[ g(\bar{Z} + Z') + \frac{1}{2} m^2 (U^2 + V^2) \right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -m_z^2 (\delta_x (\bar{U} + U') + \delta_y (\bar{V} + V')) \quad (12)$$

$\bar{V}$  و  $\bar{U}$  شارهای جرم مداری در دو راستای  $x, y$ ،  $U'$  و  $V'$  شارهای جرم پریشیدگی در دو راستای  $x$  و  $y$  است.

### ۳-۲ الگوی گسترش هاگن و مکنهاور

برای اجتناب از خطای گیس باید مقادیر ژئوپتانسیل و مؤلفه های سرعت باد مداری و نصف النهاری دارای مقادیر هموار و در هر دو راستای  $x$  و  $y$  دوره ای باشند. حوزه محاسباتی شامل منطقه انتگرال گیری، منطقه واهلش (relaxation) و منطقه گسترش در شکل ۱ نشان داده شده است. منطقه واهلش اثرات منطقه گسترش را کاهش می دهد تا دوره ای سازی مصنوعی اثر منفی کمتری بر فرایندهای فیزیکی در حوزه اصلی داشته باشد. در تحقیق حاضر، طول منطقه گسترش حدود ۲۰٪ طول میدان زمینه انتخاب شده است.



شکل ۱. هندسه حوزه محاسباتی میدان زمینه، خطوط پُر بیرونی منطقه گسترش و خطوط پُر داخلی منطقه واهلش و خطوط نقطه چین داخلی منطقه انتگرال گیری را نشان می دهد (هاگن و مکنهاور، ۱۹۹۳).

شارهای جرم در دو راستای  $x$  و  $y$  یعنی  $\underline{U} = U\bar{Z}^x$  و  $\underline{V} = V\bar{Z}^y$  و  $q = \frac{c+f}{Z}$  تاوایی پتانسیلی است. کار الگوریتم روش شبه طیفی محاسبه مشتقات موجود در معادلات فوق است.

### ۳ الگوریتم عددی

با توجه به استفاده از تابع های فوریه برای برآورد مشتقات، وجود ناپیوستگی در کمیت مورد نظر سبب بروز خطای گیس می شود که رشد خطا و در نهایت از دست دادن دقت محاسباتی را به دنبال دارد. روش طیفی هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) با استفاده از روش های الگوی گسترش و الگوی واهلش و روش تجزیه که در دل الگوی گسترش جای دارد، سعی در جلوگیری از بروز این مشکل دارد.

### ۳-۱ دوره ای سازی کمیت های میدان زمینه

در پژوهش حاضر، در هر گام زمانی، میدان زمینه براساس درون یابی هرمیت مکعبی از داده های "سامانه پیش بینی جهانی موسوم" به GFS با تفکیک  $1^{\circ} \times 1^{\circ}$  در بازه شش ساعته به بازه یک ساعته و به دنبال آن درون یابی خطی از داده های یک ساعته ساخته می شود. نکته قابل توجه این است که مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیلی در راستای نصف النهاری، تغییرات قابل توجهی دارند. بنابراین، وقتی که مقادیر ارتفاع ژئوپتانسیلی در راستای  $y$  دوره ای می شوند، الگوی ناهنجاری ایجاد می شود. تدبیری که برای این مشکل اندیشیده شد، تجزیه مقادیر ژئوپتانسیل به قسمت های مداری و پریشیدگی و دوره ای سازی قسمت های پریشیدگی در دو راستای  $x$  و  $y$  است. بنابراین:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (9)$$

که در آن،  $\bar{\phi}$  مؤلفه مداری و  $\phi'$  مؤلفه پریشیدگی ژئوپتانسیل است. البته این مشکل در مورد مؤلفه سرعت باد مداری  $U$  و نصف النهاری  $V$  پیش نمی آید و مقادیر  $U, V$  به آسانی از طریق الگوی گسترش هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) در دو راستای  $x$  و  $y$  دوره ای می شوند. با

که در آن،  $\phi_i(x, y, t)$  کمیت واهلش یافته،  $\hat{\phi}_i(x, y, t)$  کمیت مدل منطقه محدود و  $\phi_b(x, y, t)$  کمیت میدان زمینه است. ضریب واهلش  $\gamma_i$  در راستای  $x$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos\left(\pi \frac{x_i - x_l}{x_R - x_l}\right) \right]$$

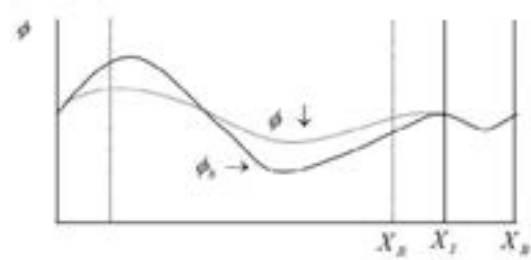
که در آن،  $x_R$  طول میدان واهلش است. در برنامه محاسباتی، مقدار ضریب واهلش بر مبنای کمترین فاصله از یکی از چهار مرز غربی، شرقی، جنوبی و شمالی تنظیم می شود. شکل ۲ در یک راستا، طرحواره‌ای از میدان زمینه به همراه میدان پیش‌یافتی که از راه الگوی واهلش دیویس - کالبرگ با آن ترکیب می شود را نشان می دهد.

### ۴-۳ محاسبه مشتقات

با تجزیه مقادیر ژئوتانسیل به مؤلفه‌های مداری و پربشیدگی و توجه به اینکه مقادیر  $Z'$ ،  $U$ ،  $V$  میدان زمینه در دو راستای  $x$  و  $y$  با استفاده از الگوی گسترش هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) در هر گام زمانی دوره‌ای می شود، معادلات مدل (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) به گونه‌ای درمی آید که محاسبه مشتقات  $Z$ ،  $\bar{U}$  و  $\bar{V}$  به صورت مشتق‌گیری مرکزی روی شبکه C- آراکاوا صورت می پذیرد و محاسبه مشتقات  $Z'$ ،  $U$ ،  $V$ ،  $U'$  و  $V'$  به روش طیفی و از راه تبدیل فوریه سریع (FFT) عملی می شود. بنابراین معادلات مدل به صورت زیر درمی آید:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = (\bar{q}^y \bar{V}^{xy})_{i+\frac{1}{2},j}^* - \delta_x [g\bar{Z}]_{i+\frac{1}{2},j}^* - \delta_x \left[ gZ' + \frac{1}{2} m_u^2 (U^2 + V^2) \right]_{spectral} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = (-\bar{q}^x \bar{U}^{xy})_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \delta_y [g\bar{Z}]_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \delta_y \left[ gZ' + \frac{1}{2} m_v^2 (U^2 + V^2) \right]_{spectral} \quad (14)$$



شکل ۲. سطح مقطع طولی از شکل میدان زمینه و میدان پیش‌یافتی در الگوی واهلش دیویس - کالبرگ (هاگن و مکنهاور ۱۹۹۳).

ملاحظه می شود که منطقه گسترش از  $x_l$  شروع می شود و به  $x_B$  ختم می شود. در منطقه گسترش کمیت  $\phi$  به صورت زیر دوره‌ای در می آید (هاگن و مکنهاور ۱۹۹۳):

$$\phi(x, y, z) = a_0 + a_1 \cos x' + b_1 \sin x' + b_2 \sin 2x'$$

که  $x_l \leq x \leq x_B$  است و  $x'$  به صورت  $x' = \pi \frac{x - x_l}{x_B - x_l}$  تعریف می شود. ضرایب  $a_0$ ،  $a_1$ ،  $b_1$  و  $b_2$  از مقدار  $\phi$  و مقدار مشتق آن در نقاط  $x = x_l$  و  $x = x_B$  محاسبه می شود. در برنامه محاسباتی میدان زمینه سطر به سطر از سمت راست گسترش می یابد تا یک منطقه دوره‌ای در راستای  $x$  حاصل شود و سپس میدان زمینه ستون به ستون از سمت بالا گسترش می یابد تا یک منطقه دوره‌ای در راستای  $y$  حاصل شود. در این حالت میدان زمینه در دو راستای  $x$  و  $y$  دوره‌ای شده است.

### ۳-۳ الگوی واهلش دیویس - کالبرگ

برای اینکه دوره‌ای سازی مصنوعی اثر منفی کمتری ایجاد کند، میدان زمینه و میدان حاصل از به روزرسانی کمیت‌های پیش‌یافتی از راه الگوی واهلش دیویس - کالبرگ (دیویس، ۱۹۷۶؛ کالبرگ و گیسون، ۱۹۷۷) ترکیب می شوند:

$$\phi_i(x, y, t) = [1 - \gamma_i] \hat{\phi}_i(x, y, t) + \gamma_i \phi_b(x, y, t)$$

بایستی به اجبار مقداری میرایی به شکل طیفی به الگوریتم اضافه شود. در اینجا از میرایی صریح با افزودن یک جمله پخش به صورت  $v_m \nabla^2$  به معادلات  $U$  و  $V$  و جمله متناظری به صورت  $v_z \nabla^2$  به معادله ارتفاع ژئوپتانسیلی استفاده می‌شود که  $v_m$  ضریب پخش عددی مؤلفه‌های تکانه و  $v_z$  ضریب پخش عددی برای ارتفاع ژئوپتانسیلی است. با نوشتن هریک از معادلات مؤلفه‌های تکانه و ارتفاع ژئوپتانسیلی به صورت کلی

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = F + v \nabla^2 Y \quad (17)$$

و گسسته‌سازی آن با طرحواره دوزنقه‌ای، به دست می‌آوریم

$$(1 - 2v\Delta t \nabla^2) Y^{n+1} = Y^{n-1} + 2\Delta t F \quad (18)$$

در اینجا  $Y$  یکی از کمیت‌های  $U$ ،  $V$  و  $Z$  و  $F$  عبارت طرف راست متناظر آن در حالت پایستار است. چنانچه تصویر  $Y$  را در فضای فوریه با  $\hat{Y}$  نمایش دهیم، داریم؛

$$\nabla^2 \hat{Y} = -(k^2 + l^2) \hat{Y} \quad (19)$$

که در آن،  $k$  و  $l$  اعداد امواج در دو راستای  $x$  و  $y$  هستند. به این ترتیب برای اعمال پخش عددی رابطه گسسته زیر به دست می‌آید:

$$\hat{Y}^{n+1} = \left( \frac{1}{1 + 2v\Delta t(k^2 + l^2)} \right) (\hat{Y}^{n-1} + 2\Delta t \hat{F}) \quad (20)$$

که در آن،  $v$  ضریب پخش بسته به مورد برابر با  $v_m$  برای مؤلفه‌های تکانه و  $v_z$  برای ارتفاع ژئوپتانسیلی است. مقادیر  $v_m$  و  $v_z$  با عبارات زیر:

$$v_m = \frac{1}{(k_{\max}^2 + l_{\max}^2) \tau_m} \quad (21)$$

$$v_z = \frac{1}{(k_{\max}^2 + l_{\max}^2) \tau_z} \quad (22)$$

تعیین می‌شوند که در آن،  $k_{\max} = \frac{\pi}{\Delta x}$  و  $l_{\max} = \frac{\pi}{\Delta y}$  بزرگ‌ترین مقادیر اعداد موج در دو راستای  $x$  و  $y$  و

$$\left( \frac{\partial Z}{\partial t} \right)_{i,j} = -m_z^2 (\delta_x \bar{U} + \delta_y \bar{V})_{ij}^* - m_z^2 (\delta_x \underline{U}' + \delta_y \underline{V}')_{spectral} \quad (15)$$

که در آن، علامت \* معرف محاسبه روی شبکه‌ای است که نسبت به نقاط  $Z$  به اندازه نیم‌فاصله شبکه‌ای جابه‌جا شده است.

### ۳-۵ شرایط مرزی

اصولاً معادلات هذلولی یک دستگاه معادله مقدار اولیه‌ای هستند که در ارتباط با مسائل منطقه محدود، شرایط مرزی برای آنها ایجاد می‌شود. به دلیل اینکه امواج روی خم مشخصه معادلات هذلولوی در سراسر حوزه محاسباتی منتشر می‌شوند، اگر شرایط مرزی به درستی مقداردهی نشوند، جواب را در کل حوزه خراب می‌کنند. بنابراین تعیین نادرست شرایط مرزی می‌تواند به یک جواب نادرست و یا به ناپایداری منجر شود.

شرط مرزی منطقه محدود با دوره‌ای سازی متغیرهای حوزه محاسباتی در دو راستای  $x$  و  $y$  به یک شرط مرزی دوره‌ای مضاعف تبدیل می‌شود. بنابراین شرط مرزی اعمال شده به معادلات (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) یک شرط مرزی دوره‌ای مضاعف است. بنابراین امواج گرانی-لختی را می‌توان در راستای شرقی-غربی و شمالی-جنوبی وارد حوزه محاسباتی و از آن خارج کرد. به‌ازای  $L_x$  و  $L_y$  طول حوزه در دو راستای  $x$  و  $y$ ، شرط مرزی دوره‌ای مضاعف به صورت زیر درمی‌آید:

$$\phi(x, y, t) = \phi(x + L_x, y + L_y, t) \quad (16)$$

### ۳-۶ استفاده از هموارساز

الگوریتم دارای پایستاری آنستروفی پتانسیلی سادورنی (۱۹۷۵) به گونه‌ای طراحی شده است که برای تفاضل‌گیری مرکزی ناپایداری غیرخطی را کنترل می‌کند. منتها در روش طیفی این مقدار کفایت نمی‌کند و

طرحواره تفاضل متناهی مرتبه دوم ساورنی (۱۹۷۵) موجود در پژوهش محب‌الحجه و مشایخی (۱۳۸۳) است. به‌علاوه به‌دلیل حضور یک سامانه همدیدی فعال و قوی در پادجریان‌سوی کشور ما، این مورد برای آزمون مدل‌های منطقه محدود برای کشور بسیار مناسب است. نتایج پیش‌بینی ۴۸ ساعته، با استفاده از روش طیفی در تفکیک‌های ۱۵۰، ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نشان داده شده است. با واریسی چشمی ملاحظه می‌شود که جواب‌ها در تفکیک فضایی ۱۵۰ کیلومتر بسیار میرا هستند و این میرایی زیاد باعث شده است که جواب‌ها از جواب‌های متناظر برای الگوریتم سادورنی فاصله بگیرند. لازم به ذکر است که بخشی از این میرایی به میدان زمینه مورد استفاده در این تفکیک برمی‌گردد که به‌دلیل درون‌یابی از داده‌های GFS با تفکیک بیشتر  $1^\circ \times 1^\circ$  به تفکیک کمتر، هموارتر از واقعیت شده است. در تفکیک‌های ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر حرکت شرق‌سوی ناوه مستقر در غرب دریای مدیترانه به‌خوبی با جواب‌های الگوریتم سادورنی، هم‌خوانی دارد و پشته مستقر میان دریاچه‌های آرال و بالخاش تقویت شده است. در سه تفکیک فوق در کناره‌های حوزه محاسباتی نیز شکستگی‌هایی در خطوط ژئوپتانسیلی دیده می‌شود که ناشی از اثرات منفی منطقه گسترش و دوره‌ای‌سازی بر نتایج در حوزه انتگرال‌گیری است.

جدول ۱. زمان میرایی برحسب ثانیه در تفکیک‌های متفاوت.

$\tau_z (s)$	$\tau_m (s)$	زمان میرایی تفکیک فضایی
۹۰	۱۴۴۰	۱۵۰ km
۳۰	۱۴۴۰	۷۵ km
۱۰	۱۴۴۰	۳۷/۵ km

$\tau_m$  و  $\tau_z$  زمان میرایی ارتفاع ژئوپتانسیلی و مؤلفه‌های میدان باد در کوچک‌ترین مقیاس شبکه‌ای هستند. مقادیر عددی مورد استفاده برای  $\tau_z$  و  $\tau_m$  در جدول ۱ آورده شده است.

بنابراین الگوریتم روش طیفی هاگن و مکنهاور (۱۹۹۳) را می‌توان در مراحل زیر خلاصه کرد:

۱- حل معادلات بسیط برای یک گام زمانی در حوزه منطقه محدود و به‌روزر کردن ارتفاع ژئوپتانسیلی و مؤلفه‌های سرعت

۲- ساخت میدان زمینه با تعیین و خواندن دو فایل مربوط به نزدیک‌ترین داده‌های درون‌یابی شده یک ساعته که زمان موردنظر در آن قرار می‌گیرد. پس از آن درون‌یابی خطی به زمان موردنظر صورت می‌گیرد و میدان زمینه در حوزه منطقه محدود تعیین می‌شود.

۳- گسترش میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی به منطقه گسترش، به‌طوری‌که شرط مرزی دوره‌ای برآورده شود. میدان سرعت در منطقه گسترش با در نظر گرفتن شرایط مرزی دوره‌ای به‌صورت زمینگرد از روی میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی به‌دست می‌آید.

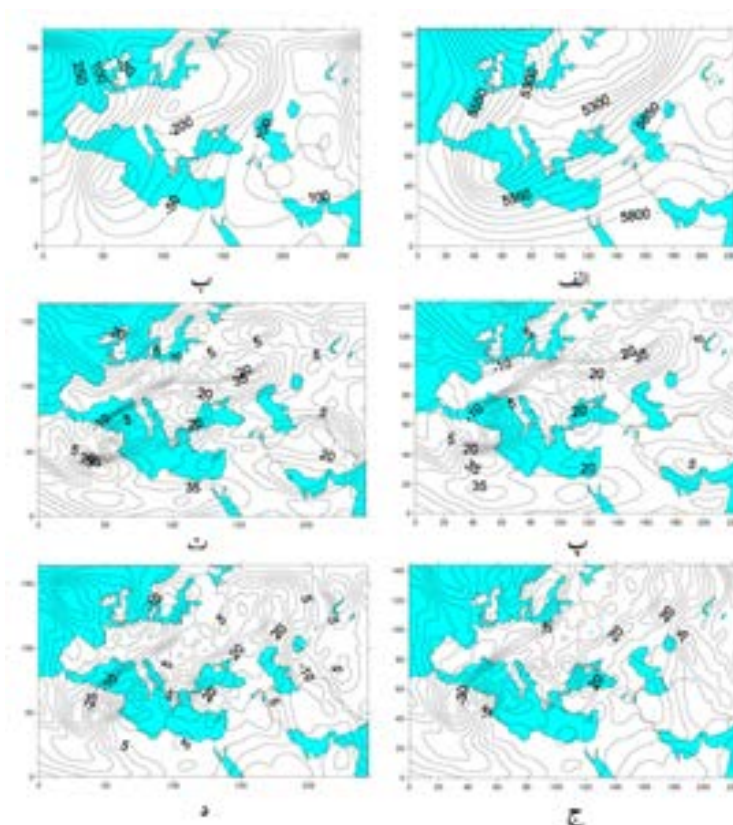
۴- اعمال فرایند واهلش و ترکیب میدان زمینه و میدان حاصل از به‌روزر کردن کمیت‌های پیش‌یافتی در قسمت ۱ الگوریتم در منطقه گسترش.

۵- اعمال میرایی روی  $Z$ ،  $U$  و  $V$  به‌صورت طیفی در حوزه دوره‌ای.

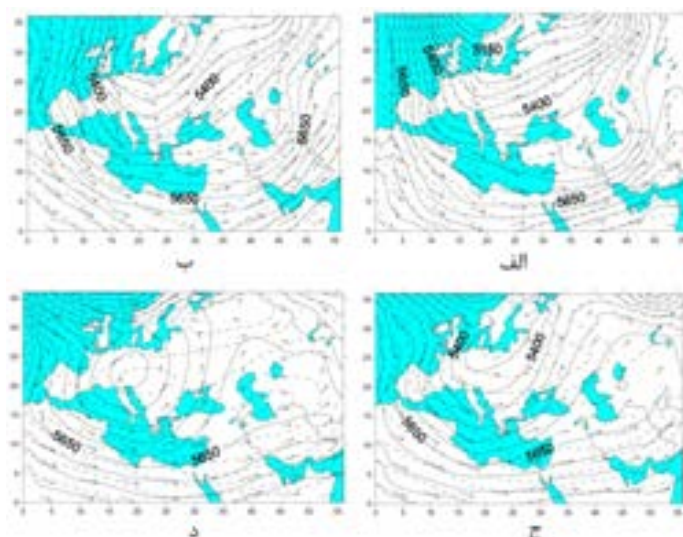
۶- اعمال فیلتر روبرت-آسلین.

#### ۴ نتایج روش طیفی

شرایط اولیه برای میدان‌های ارتفاع ژئوپتانسیلی و مؤلفه‌های میدان باد در دو راستای  $x$  و  $y$  مربوط به اول فوریه سال ۲۰۰۳ میلادی به همراه میدان‌های متناظر حاصل از دوره‌ای‌سازی در شکل ۳ نشان داده شده است. دلیل انتخاب این مورد، فراهم بودن امکان مقایسه با نتایج

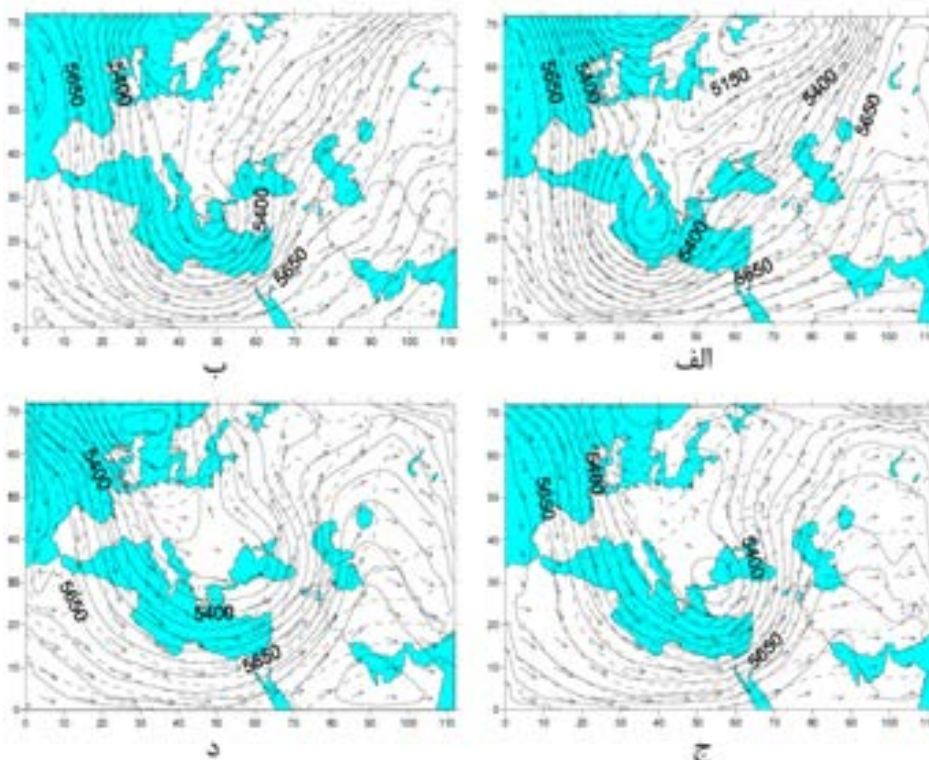


**شکل ۳.** (الف) میدان ارتفاع ژئوپتانسیلی اولیه، (ب) میدان پریشیدگی ارتفاع ژئوپتانسیلی اولیه که در دو راستای  $X$  و  $Y$  دوره‌ای شده است، (پ) میدان سرعت مداری اولیه، (ت) میدان سرعت مداری اولیه که در دو راستای  $X$  و  $Y$  دوره‌ای شده است، (ج) میدان سرعت نصف‌النهاری اولیه، (د) میدان سرعت نصف‌النهاری اولیه که در دو راستای  $X$  و  $Y$  دوره‌ای شده است. تفکیک فضایی ۳۷/۵ کیلومتر است.

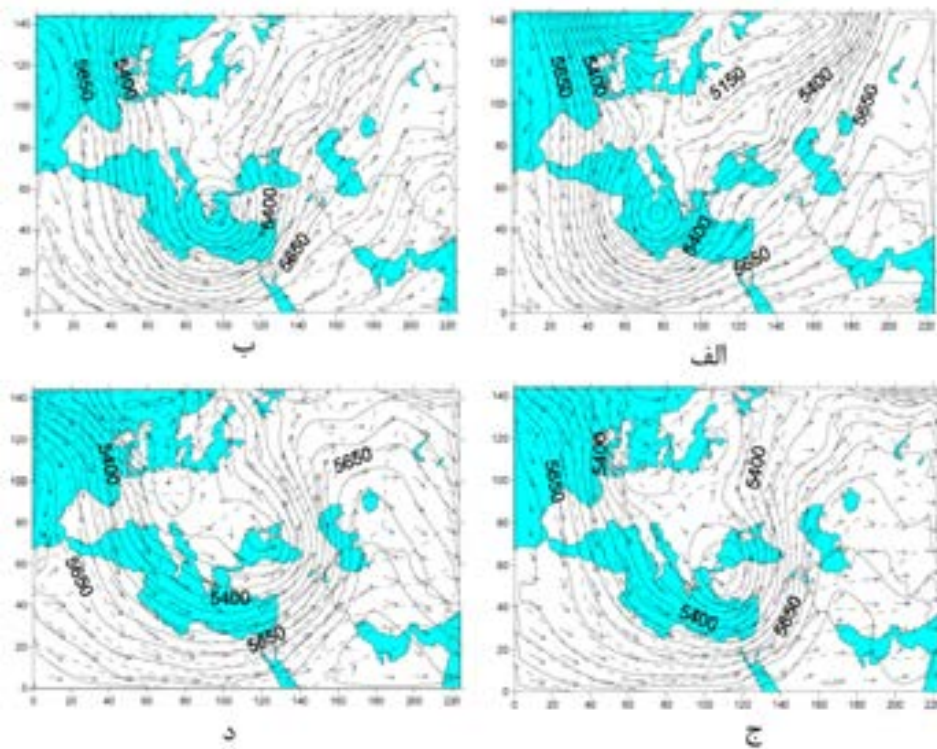


**شکل ۴.** تحول زمانی ارتفاع ژئوپتانسیلی و میدان باد متناظر در تفکیک فضایی ۱۵۰ کیلومتر. خطوط پُر بیانگر روش طیفی و خطوط خط‌چین بیانگر میدان متوازن حاصل از کاربست آغازگری مرتبه اول به داده‌های GFS برای (الف) پیش‌بینی ۱۲ ساعته، (ب) پیش‌بینی ۲۴ ساعته، (ج) پیش‌بینی ۳۶ ساعته و (د) پیش‌بینی ۴۸ ساعته هستند.

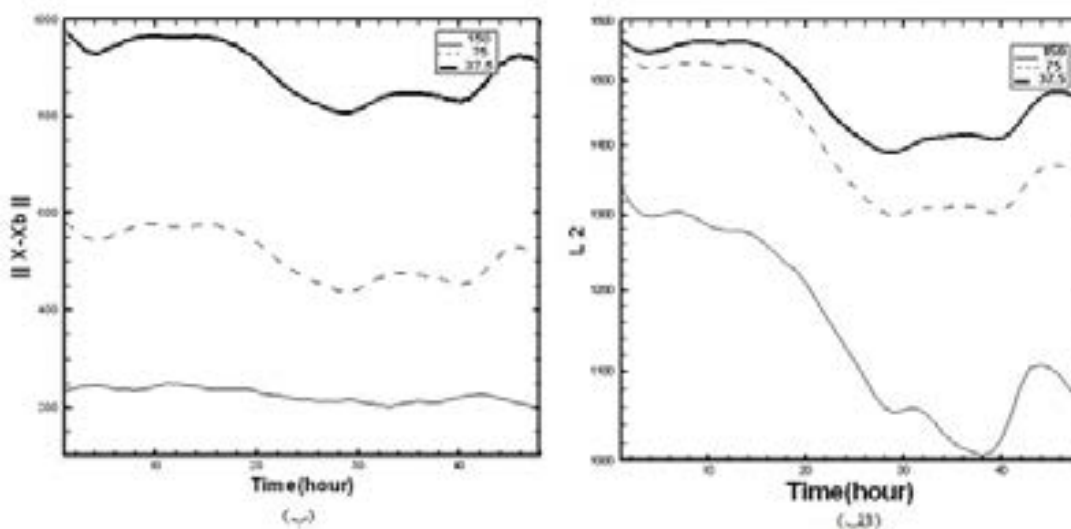




شکل ۵. مانند شکل ۴ ولی برای تفکیک فضایی ۷۵ کیلومتر.



شکل ۶. مانند شکل ۴ ولی برای تفکیک فضایی ۳۷/۵ کیلومتر.



شکل ۷. الف) تحول زمانی نُرم خطای مدل و (ب) تحول زمانی نبود توازن، برای الگوریتم روش طیفی هاگن و مکنهاور در تفکیک فضایی ۱۵۰ کیلومتر (خط پُر نازک)، ۷۵ کیلومتر (خط چین) و ۳۷/۵ کیلومتر (خط پر ضخیم) در طی انتگرال‌گیری ۴۸ ساعته.

تحول زمانی نبود توازن برای الگوریتم روش طیفی هاگن و مکنهاور را در سه تفکیک ۱۵۰، ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش تفکیک، نُرم خطای مدل و نبود توازن افزایش یافته است. این افزایش نُرم خطا با افزایش تفکیک می‌تواند ناشی از کاستی مدل آب کم‌عمق در تفکیک‌های بالاتر و نیز اثرات منفی وارد کردن میرایی مصنوعی باشد که برای پایداری محاسباتی لازم بوده است. در مورد افزایش میزان نبود توازن با تفکیک فضایی، برطبق نتایج قادر و همکاران (۲۰۰۹) روی حوزه دکارتی دوره‌ای در هر دو راستا، دینامیک درونی مدل صرف‌نظر از تاثیر شرایط مرزی، می‌تواند عامل موثر باشد. به‌رحال میزان نبود توازن ایجاد شده به مراتب بیش از آنی است که از کارکرد روش طیفی در حوزه دوره‌ای و نیز از کارکرد الگوریتم تفاضل متناهی دارای پایستاری آنستروپی سادورنی انتظار می‌رود. با توجه به این امر لازم است که در تحقیق دیگری امکان بهبود نتایج از حیث برقراری توازن و نمایش امواج گرانی‌لختی بررسی شود.

## ۵ تحلیل خطا

برای محاسبه خطای تولید شده در الگوریتم روش طیفی، ابتدا اختلاف داده‌های حاصل از اجرای مدل و داده‌های آغازگری شده GFS در حکم نُرم خطای مدل محاسبه می‌شود و سپس اختلاف بین داده‌های حاصل از اجرای مدل و داده‌های حاصل از اجرای آغازگری در هر گام زمانی مدل به‌منزله میزان نبود توازن به‌دست می‌آید. در اینجا میدان‌های متوازن از شرایط توازن مد به‌نچار مرتبه اول (محب‌الحجه و مرادی، ۱۳۸۱؛ ۱۳۸۲) به‌دست می‌آیند. برای بررسی نُرم خطای مدل و نبود توازن در انتگرال‌گیری‌ها، از نُرم مربعی زیر استفاده می‌شود (محب‌الحجه و مرادی، ۱۳۸۱ و ۱۳۸۲):

$$\|X\| = \left( \iint dx dy (\bar{Z}(U^2 + V^2) + gZ^2) \right)^{1/2} \quad (26)$$

که در آن،  $X$  معرف بردار حالت دستگاه در نمایش  $(Z, U, V)$  بیانگر انرژی در دسترس خطی شده دستگاه و  $\bar{Z}$  میانگین ارتفاع ژئوپتانسیلی روی حوزه محاسباتی است.

شکل ۷-الف تحول زمانی نُرم خطای مدل و شکل ۷-ب

## ۶ نتیجه گیری

اول در موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران به انجام رسیده است و نگارندگان مراتب قدردانی خود را از دانشگاه تهران برای حمایت از آن اعلام می‌دارند.

### منابع

محب‌الحجه، ع. ر. و مرادی، م.، ۱۳۸۱، تجربیاتی با مدل بسط فشارورد و آغازگری آن، گزارش طرح پژوهشی شماره ۲۰۸۸۱۳۵۰۳ سازمان هواشناسی کشور.

محب‌الحجه، ع. ر. و مرادی، م.، ۱۳۸۲، آغازگری مدل بسط فشارورد منطقه‌ای به روش مد بهنجار، فیزیک زمین و فضا، ۲۹(۱)، ۶۹-۸۱.

محب‌الحجه، ع. ر. و مشایخی، ر.، ۱۳۸۳، نمایش شارش‌های تاواری و امواج گرانی در الگوریتم‌های حل عددی معادلات بسط فشارورد منطقه‌ای، فیزیک زمین و فضا، ۳۰(۱)، ۴۷-۳۷.

Bénard, P., Vivoda, J., Mäsek, J., Smolíková, P., Yessad, K., Smith, Ch., Brožková, R. and Geleyn, J.-F., 2010, Dynamical kernel of the Aladin-NH spectral limited-area model, Revised formulation and sensitivity experiments, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **136**, 155-169.

Davies, H. C., 1976, A lateral boundary formulation for multilevel prediction model, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 405-418.

Durran, D. R., 2010, *Numerical methods for Fluid Dynamics*, 2<sup>nd</sup> Ed., Springer, 516 pp.

Eliassen, E., Machenhauer, B. and Rasmussen, E., 1970, On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields, Report no. 2, Institut for Teoretisk Meteorologi, University of Copenhagen.

Ghader, S., Mohebalhojeh, A. R. and Esfahanian, V., 2009, On the spectral convergence of the super-compact finite-difference schemes for the *f*-plane shallow-water equations, *Mon. Wea. Rev.*, 2393-2406.

Haltiner, G. J. and Williams, R. T., 1980, *Numerical prediction and dynamic meteorology*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

روش طیفی هاگن و مکنهاور برای حل عددی معادلات آب کم عمق دوبعدی غیرخطی به کار گرفته شد. در روش طیفی مشتقات کمیت‌های مدل که در هر گام زمانی با استفاده از الگوی گسترش، دوره‌ای و با استفاده از تبدیل فوریه سریع محاسبه می‌شود. در واقع در روش طیفی وابستگی مکانی یک نقطه با همه نقاط پیرامون آن به صورت جهانی در نظر گرفته می‌شود. بررسی صورت گرفته نشان می‌دهد که دقت الگوریتم روش طیفی فقط از وابستگی و تأثیر نقاط پیرامونی تعیین نمی‌شود و مسائل دیگری همانند شرایط مرزی، میرایی و برهم کنش بین منطقه گسترش و منطقه انتگرال گیری تأثیر بسزایی دارد. میرایی اضافه شده به کمیت‌های مدل در تفکیک ۱۵۰ کیلومتر، باعث می‌شود که این میرایی به طول موج‌های بزرگ‌تر اعمال شود و حرکت موج راسبی به درستی صورت نگیرد. ولی در تفکیک‌های ۷۵ و ۳۷/۵ کیلومتر، حرکت شرق‌سوی ناوه مدیترانه‌ای به خوبی صورت می‌گیرد و ارتفاع پشته مستقر روی دریاچه‌های آرال و بالخاش نیز زیاد می‌شود. محاسبه خطای روش طیفی از دیدگاه نرم خطای مدل و نبود توازن، نشان می‌دهد که خطای روش طیفی دو مرتبه بزرگی، بزرگ‌تر از خطای محاسبه شده در کار محب‌الحجه و مشایخی (۱۳۸۳) است. آزمایش‌های جداگانه‌ای برای طول منطقه گسترش با طول ۱۰٪، ۲۰٪ و ۳۰٪ طول منطقه محدود نشان می‌دهد که طول منطقه گسترش تأثیری کمتر از ۲٪ در خطای محاسبه شده دارد. بنابراین خطای نسبتاً بزرگی از منطقه گسترش به داخل حوزه محاسباتی گسیل می‌شود که ناشی از برهم کنش بین منطقه گسترش و منطقه انتگرال گیری و دینامیک درونی خود الگوریتم است.

### تشکر و قدردانی

این پژوهش در قالب پایان‌نامه کارشناسی ارشد نگارنده

- Report, WMO, Geneva, **14**, 103-105.
- Orszag, S. A., 1970, Transform method for calculation of vector-coupled sums, application to the spectral form of the vorticity equation, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 890-895.
- Sadourny, R., 1975, The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations, *J. Atmos. Sci.*, **32**, 680-689.
- Haugen, J. E. and Machenhauer, B., 1993, A spectral limited-area model formulation with time-dependent boundary conditions applied to the shallow-water equations, *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 2618-2630.
- Kallberg, P. and Gibson, R., 1977, Lateral boundary condition for a limited area version of the ECMWF model, *WGNE progress*