



## ارائه روش تجزیه متعامد هموار اصلاح شده برای افزایش دقت محاسبه پارامترهای مودال سیستمهای گسسته

در این پژوهش، روشی برای افزایش دقت روش تجزیه متعامد هموار (SOD) پیشنهاد شده است. بدین منظور، با اعمال اصلاحاتی در الگوریتم روش SOD در روش پیشنهادی به جای استفاده از عملگر  $D$  که در آن از مشتق دو نقطه‌ای پیشرو با مرتبه دقت  $\Delta t$  استفاده می‌شود عملگر جدید  $D_m$  چهار نقطه‌ای مرکزی با مرتبه دقت  $(\Delta t)^4$  استفاده می‌شود. روش پیشنهادی را، SOD اصلاح شده می‌نامیم. به منظور مقایسه دقت روش SOD و روش SOD اصلاح شده، و برای داشتن مبنای مقایسه، فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی یک سیستم گسسته حاصل از حل دقیق مسئله مقدار ویژه متناظر با نتایج حاصل از دو روش اخیر با تعداد داده‌های یکسان مقایسه شده است. نتایج، حاکی از بهبود دقت می‌باشد.

۱ موسی رضائی

دانشیار

۲ وحید شاطریان القلندی

کارشناس

۳ علی بانان نوجوانی

کارشناس

۴ محمد علیخانی کرمانی

کارشناس

واژه های راهنما: روش تجزیه متعامد هموار (SOD)، سیستم ارتعاشی گسسته، پارامترهای مودال، تحریک نویز سفید

### ۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، روش‌های جدیدی در مبحث آنالیز مودال مطرح شده است که صرفاً مبتنی بر پردازش خروجی‌های سیستم‌های ارتعاشی به ورودی‌های خاصی هستند. سه مزیت اصلی این روش‌ها عبارتند از: الف) عدم نیاز به دانستن پارامترهای ارتعاشی سیستم و نیز ورودی‌های اعمالی، ب) عدم نیاز به استفاده از روشهای معمول آنالیز مودال که نیازمند محاسبه ماتریس توابع پاسخ فرکانسی و توابع پاسخ گذرا است که عموماً ساختار بسیار پیچیده‌ای دارند و به دست آوردن آنها نیازمند تخصص و مهارت بسیار است، ج) معمولاً در مقایسه با روش‌های متعارف آنالیز مودال، استفاده از روش‌های صرفاً مبتنی بر خروجی<sup>۵</sup>، در بیشتر حالتها نیاز به تست سازه در موقعیتهای متعدد آن را از بین می‌برد [۱].

۱ نویسنده مسئول، دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز [m\\_rezaee@tabrizu.ac.ir](mailto:m_rezaee@tabrizu.ac.ir)

۲ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، نیروی محرکه خودرو

۳ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، طراحی کاربردی

۴ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، طراحی کاربردی

<sup>5</sup> Output only analysis

روش‌های آنالیز مبتنی بر پاسخ سیستم‌های ارتعاشی می‌تواند در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس مورد مطالعه قرارگیرد. از جمله روش‌هایی که در حوزه زمان مطرح است و در واقع پیشینه‌ای بر روش اخیر محسوب می‌شود، روش الگوریتم تحقق سیستم ویژه<sup>۱</sup> می‌باشد، الگوریتم تحقق سیستم ویژه روشی برای شناخت پارامترهای مودال و کاهش مدل دینامیکی است. در واقع این روش با استفاده از مقادیر ویژه به توسعه‌ی روشهای پیچیده‌تر مانند الگوریتم Ho-Kalman کمک می‌کند. در سال ۱۹۸۵ تحقیقی به کمک این روش بر روی فضای پیمای گالیله انجام شد [۲].

همچنین، از روش‌های مطرح در حوزه فرکانس، روش توابع شاخص مود مختلط<sup>۲</sup> می‌باشد، که بر پایه‌ی مقادیر ویژه ماتریس پاسخ فرکانسی در هر خط طیفی تعریف می‌شود، و روشی ساده و موثر برای به دست آوردن مودها در سیستمهای پیچیده بوده که دامنه فیزیکی هر مود را با توجه به ریشه‌ی به دست آمده نشان می‌دهد. روش توابع شاخص مود مختلط روشی برای محاسبه‌ی شکل مودها نیز می‌باشد [۳]. روش جدیدی که در سال‌های اخیر به مجموعه روش‌های قبل در حوزه زمان اضافه گردیده است روش تجزیه متعامد هموار<sup>۳</sup> (SOD) [۴] و روش تجزیه مودال متغیر حالت<sup>۴</sup> است [۵ تا ۷] که نتایج خوبی را برای آنالیز مودال در حالت پاسخ آزاد به دست می‌آورند. در این روش‌ها، با استفاده از پاسخ ارتعاشات آزاد سازه به ورودی‌های مختلفی همانند ورودی اتفاقی یا ضربه، یک مسئله مقدار ویژه تشکیل می‌گردد که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن، با مقادیر و بردارهای ویژه مسئله آنالیز مودال به طور مستقیم در ارتباط هستند. امتیاز استفاده از چنین روش‌هایی که بر پایه تجزیه هستند این است که در این روشها، احتمال ایجاد ماتریس‌های حالت بسیار بزرگ و مودهای غیر واقعی مربوط به آنها وجود ندارد. همچنین، این روش‌ها، در ساختار نیز بسیار ساده بوده و دارای حداقل فرضیات اتخاذ شده هستند. اما مهمترین عیب آنها، محدود بودن قابلیت استفاده از آنها در سازه‌های با میرایی بسیار کم است بطوری که در سازه‌های نامیرا یا بسیار کم میرا دارای دقت بسیار خوبی هستند ولی با افزایش میرایی، دقت روش به سرعت کاهش می‌یابد. از این‌رو، استفاده از این روش‌ها برای سازه‌های ساختمانی و همچنین، سازه‌های مکانیکی با میرایی پائین توصیه می‌گردد.

در این پژوهش برای افزایش دقت، روش اصلاح شده تجزیه متعامد هموار پیشنهاد شده است. بدین منظور در مراحل مختلف الگوریتم تجزیه‌ی متعامد هموار اصلاحاتی اعمال شده است. مقایسه نتایج روش تجزیه متعامد هموار با روش اصلاحی پیشنهادی حاکی از امکان دستیابی به دقت بالاتر و حجم محاسبات کمتر است. در ضمن با ارائه یک مثال نشان داده شده است روش تجزیه‌ی متعامد اصلاح شده قابلیت محاسبه‌ی پارامترهای مودال برای سیستمها با میرایی‌های بالاتر را ممکن می‌سازد.

<sup>1</sup> Eigensystem Realization Algorithm

<sup>2</sup> Complex Mode Indication Function

<sup>3</sup> Smooth Orthogonal Decomposition

<sup>4</sup> state-variable modal decomposition method

## ۲- تجزیه متعامد هموار [۱]

روش تجزیه متعامد هموار برای به دست آوردن پارامترهای مودال سازه‌های گسسته کم میرا یا نا میرا که دارای ماتریس‌های جرم، سفتی و میرائی متقارن هستند به کار می‌رود. اولین گام تشکیل ماتریسی از جابجائی‌های جرم‌های متمرکز است (ماتریس  $X$ ) که این جابجائی‌ها، به عنوان مثال می‌توانند پاسخ آزاد سیستم به ورودی ضربه باشند. ماتریس  $x$  یک ماتریس  $n \times N$  می‌باشد که  $n$  تعداد درجات آزادی سیستم و  $N$  تعداد نمونه‌برداریها در یک فاصله زمانی مشخص می‌باشد. با استفاده از روش تفاضل محدود می‌توان ماتریس دیگری را تشکیل داد که بیانگر سرعت هر یک از جرم‌های سیستم ارتعاشی می‌باشد. اگر برای محاسبه تقریبی سرعت با استفاده از تفاضل محدود پیشرو، از دو داده متوالی مربوط به جابجائی‌های هر یک از جرمها استفاده گردد خواهیم داشت:

$$v_i(t_i) = \frac{1}{\Delta t} [x_i(t_{i+1}) - x_i(t_i)] \quad (1)$$

در مورد ماتریس  $x$  این کار می‌تواند توسط یک عملگر به نام  $D$  صورت بگیرد به قسمی که  $V = XD^T$  بنابراین با توجه به تفاضل محدود پیشرو،  $D^T$  به شکل معادله (۲) خواهد بود:

$$D^T = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N-1} \quad (2)$$

بنابراین پس از به دست آوردن ماتریس سرعت، ماتریس کواریانس سرعت توسط رابطه زیر تشکیل می‌گردد:

$$S = \frac{vv^T}{(N-1)} \quad ( )$$

به همین ترتیب می‌توان ماتریس کوواریانس جابجائی را نیز تشکیل داد. برای هم بعد کردن ماتریس جابجائی و ماتریس سرعت، ستون آخر ماتریس  $x$  حذف می‌گردد:

$$R = \frac{xx^T}{(N-1)} \quad ( )$$

با تعریف ماتریسهای کوواریانس سرعت و جابجائی بر اساس مسئله مقدار ویژه عمومی داریم:

$$\lambda R \psi = S \psi \quad ( )$$

برای یک سیستم چند درجه آزادی کم میرا،  $\lambda$ ها در رابطه فوق تقریب‌هایی از مربعات فرکانس‌های طبیعی سیستم و  $\psi$ ها تقریب‌هایی از بردارهای ویژه سیستم هستند برای اثبات این موضوع، یک سیستم چند درجه آزادی نامیرا تحت ارتعاشات آزاد را که شکل ماتریسی معادلات حاکم بر آن به صورت زیر است در نظر میگیریم:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad ( )$$

معادله فوق، متناظر با مسئله مقدار ویژه  $-\omega^2 M\phi + K\phi = 0$  است که می‌توان به شکل ماتریسی زیر بیان کرد:

$$K\phi = M\phi\Lambda \quad ( )$$

که در آن  $\Lambda$  ماتریس قطری متشکل از مقادیر ویژه سیستم ( $\omega_i^2 = \lambda_i$ ) است و  $\phi$  ماتریس مودال می‌باشد. با جایگذاری مقادیر ماتریس‌های کوواریانس (روابط ۳ و ۴) در رابطه (۵)، مسئله مقدار ویژه متناظر با روش تجزیه متعامد هموار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda xx^T \psi = xD^T Dx^T \psi \quad (۸)$$

می‌توان نشان داد که [۴]:

$$D^T DX^T \approx -\ddot{X}^T \quad (۹)$$

از طرفی پیش ضرب کردن معادله (۶) در  $M^{-1}$  و ترانسپوز کردن رابطه حاصل، و با توجه به متقارن بودن ماتریسهای  $M$  و  $K$  می‌توان نوشت:

$$-\ddot{X}^T = X^T KM^{-1} \quad (۱۰)$$

و با جایگذاری دو رابطه (۹) و (۱۰) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$\lambda XX^T \psi = XX^T KM^{-1} \psi \quad (۱۱)$$

با تعریف ماتریس‌های  $\Psi$  و  $\Lambda$  به این صورت،  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]$  و  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  رابطه (۱۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$XX^T \Psi \Lambda = XX^T KM^{-1} \Psi \quad (۱۲)$$

با فرض معکوس‌پذیر بودن  $XX^T$  و حذف آن از طرفین رابطه (۱۲) و محاسبه معکوس ترانهاده طرفین، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Psi^{-T} \Lambda^{-1} = K^{-1} M \Psi^{-T} \quad (۱۳)$$

اگر طرفین رابطه فوق در  $K$  پیش ضرب و در  $\Lambda$  پس ضرب شود، معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$K \Psi^{-T} = M \Psi^{-T} \Lambda \quad (۱۴)$$

با مقایسه روابط (۱۴) و (۷) مشخص می‌گردد که  $\Psi^{-T} = \Phi$  و نیز ماتریس  $\Lambda$  در هر دو رابطه یکی است. بدین ترتیب معادل بودن نتایج دو روش تجزیه متعامد هموار و مساله مقدار ویژه متعارف به اثبات می‌رسد.

### ۳- تجزیه متعامد هموار برای سیستم های تحت تحریک اتفاقی

در این بخش، روش تجزیه متعامد هموار برای سازه‌های تحت تحریک اتفاقی نویز سفید توجیه می‌گردد. سیستم ارتعاشی نا میرای مقارنی را که تحت تحریک اتفاقی  $F$  قرار دارد در نظر می‌گیریم:

$$M\ddot{X} + KX = F \quad (15)$$

با عملیات ریاضی مشابه آنچه در بخش قبل ارائه شد می‌توان نشان داد که:

$$D^T DX^T \approx -\dot{X}^T \approx X^T KM^{-1} - F^T M^{-1} \quad (16)$$

با جایگذاری نتیجه اخیر در رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{N} XX^T \Psi \Lambda = \frac{1}{N} XX^T KM^{-1} \Psi - \frac{1}{N} XF^T KM^{-1} \Psi \quad (17)$$

المانهای ماتریس  $\frac{1}{N} XX^T$  نشان دهنده همبستگی<sup>۱</sup> متقابل (با تاخیر زمانی صفر) مابین پاسخها و المانهای ماتریس  $\frac{1}{N} XF^T$  نشان دهنده همبستگی متقابل<sup>۲</sup> (با تاخیر زمانی صفر) مابین پاسخها و ورودی‌های اتفاقی است. فاروق و فینی [۱] ثابت کردند که اگر تحریکات اتفاقی  $F(t)$  اعمالی به جرمها، نویز سفید و مستقل از هم باشند، ماتریس  $\frac{1}{N} XF^T$  برابر صفر خواهد بود. بنابراین رابطه (۱۷) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\Psi \Lambda = KM^{-1} \Psi \quad (18)$$

رابطه اخیر عیناً با رابطه (۱۲) یکسان است بنابراین، در سیستم چند درجه آزادی نامیرا و تحت تحریکات اتفاقی نویز سفید نیز نتایج روش تجزیه متعامد هموار با نتایج روش مقدار ویژه متعارف یکسان است.

### ۴- ارائه روشی برای اصلاح ماتریس عملگر $D$ به منظور افزایش دقت محاسبات

با بررسی روش تجزیه متعامد هموار در بخش های ۳ و ۴ مشخص می‌گردد که این روش در اصل از ساختاری ساده برخوردار بوده و در شرایط مناسب نتایج بسیار خوبی را به دست می‌دهد. عوامل ایجاد خطا در این روش از دو مورد عمده (الف) وجود میرایی در سیستم و (ب) خطای محاسباتی در به دست آوردن سرعت و شتاب نشأت می‌گیرد.

در مورد عامل میرایی به دلیل مربوط بودن آن به ساختار ذاتی سیستم‌های ارتعاشی، تاکنون راه حلی برای جبران خطای ناشی آن ارائه نگردیده است و تا به امروزه روش تجزیه متعامد هموار اصولاً برای سیستم‌هایی با میرایی پائین مورد استفاده قرار گرفته است. اما در مورد منشاء خطاهای محاسباتی می‌توان بررسی‌های بیشتری انجام داد. با بررسی فرایند محاسبه پارامترهای مودال در روش تجزیه متعامد هموار

<sup>1</sup> correlation

<sup>2</sup> cross correlation

می‌توان به این نتیجه رسید که مهمترین عاملی که در انجام محاسبات، می‌تواند سبب بروز بی‌دقتی گردد، روش محاسبه ماتریس سرعت است. از آنجائی که در بررسی سیستم‌های ارتعاشی با توجه به نمونه برداری از جابه‌جائی در زمانهای مختلف، داده‌های تجربی ماهیت گسسته دارند لذا برای انجام مشتق‌گیری بایستی از یکی از روش‌های تفاضل محدود استفاده گردد. در مشتق‌گیری با روش تفاضل محدود، روش‌های مختلفی وجود دارد که در جدول (۱) به برخی از آنها اشاره شده است. در این جدول پنج روش متداول در محاسبه مشتق داده‌های گسسته به همراه مرتبه دقت آنها نمایش داده شده است [۸، ۹].

به دلیل اینکه در استخراج این روابط،  $\Delta t < 1$  فرض می‌گردد، با افزایش توان  $\Delta t$  مقدار خطا کاهش می‌یابد. با توجه به ماهیت روش تجزیه متعامد هموار استفاده از هریک از روابط ارائه شده در جدول (۱) زمانی امکان پذیر است که عملگر D ایجاد شده در معادله (۹) صدق می‌کند. در روش تجزیه متعامد هموار برای مشتق‌گیری از جابه‌جائی از روش دو نقطه‌ای پیشرو که دارای کمترین دقت می‌باشد استفاده شده است و عملگر متناظر استخراج گردیده است. با توجه به جدول (۱) ملاحظه می‌گردد، که در بین روش‌های موجود، روش دونقطه‌ای پیشرو و پسرو دارای کمترین دقت و روش چهارنقطه‌ای مرکزی دارای بیشترین دقت است. بنابراین در تحقیق حاضر روش چهارنقطه‌ای به عنوان دقیق‌ترین روش تفاضل محدود، استفاده شده است. بنابراین سرعت در  $i$  امین لحظه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v(i) = \frac{1}{12\Delta t} [x(i-2) - 8x(i+1) + 8x(i-1) - x(i-2)] \quad (19)$$

در این روش چون برای محاسبه سرعت در هر لحظه از دو مقدار جابه‌جائی مربوط به دو لحظه متوالی قبل و بعد استفاده می‌گردد، لذا امکان محاسبه سرعت از نمونه سوم تا نمونه  $N-2$  ام امکان‌پذیر خواهد بود. همچنین، برای محاسبه شتاب در  $i$  امین لحظه از رابطه زیر استفاده شده است:

$$a(i) = \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{1}{12\Delta t} \left[ \frac{\Delta x}{\Delta t}(i-2) - 8\frac{\Delta x}{\Delta t}(i-1) + 8\frac{\Delta x}{\Delta t}(i+1) - \frac{\Delta x}{\Delta t}(i+2) \right] \quad (20)$$

با ساده‌سازی رابطه فوق و با در نظر گرفتن یک سیستم  $n$  درجه آزادی می‌توان شتاب  $i$  امین لحظه را به صورت زیر نوشت:

$$a_j(i) = \frac{\Delta^2 x_j}{\Delta t^2} = \frac{1}{144t^2} [x(i+4) - 16x(i+3) + 64x(i+2) + 16x(i+1) - 130x(i) + 16x(i-1) + 64x(i-2) - 16x(i-3) + x(i-4)] \quad (21)$$

با اعمال رابطه (۱۹) فرم اصلاح شده عملگر  $D_m$  به شکل زیر به دست می‌آید: (۲۲)

$$D_m = \frac{1}{12\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 0 & -8 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 & -8 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 0 & -8 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 & 0 & -8 & 1 \end{bmatrix}_{N-4 \times N}$$

برای مقایسه عملگر اصلاح شده  $D_m$  با عملگر  $D$ ، ترانهاده رابطه (۲۳) به صورت زیر است:

$$D = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{N-1 \times N} \quad (23)$$

با مقایسه روابط (۲۲) و (۲۳) مشخص می‌شود که به ازای تعداد نمونه برداری‌های یکسان، سطرهای ماتریس عملگر اصلاح شده  $D_m$  در حالت جدید نسبت به ماتریس عملگر  $D$  کاهش می‌یابد ولی تعداد درایه‌های غیرصفر آن بیشتر می‌شود. روش پیشنهادی را که بر مبنای عملگر اصلاح شده  $D_m$  می‌باشد روش تجزیه متعامد هموار اصلاح شده (Modified-SOD) می‌نامیم.

در روش تجزیه متعامد هموار اصلاح شده با استفاده از رابطه (۲۲) ماتریس  $D_m^T D_m$  به صورت رابطه (۲۴) که ماتریس  $N \times N$  می‌باشد به دست می‌آید.

$$D_m^T D_m = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 65 & -8 & -64 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 65 & -8 & -64 & 16 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -64 & -8 & 129 & -16 & -64 & 16 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 16 & -64 & -16 & 130 & -16 & -64 & 16 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 16 & -64 & -16 & 130 & -16 & -64 & 16 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -64 & -16 & 130 & -16 & -64 & \dots & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 16 & -64 & -16 & 130 & -16 & \dots & -64 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 16 & -64 & -16 & 130 & \dots & -16 & -64 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 16 & -64 & -16 & \dots & 130 & -16 & -64 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 16 & -64 & \dots & -16 & 130 & -16 & -64 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 16 & \dots & -64 & -16 & 130 & -16 & -64 & 16 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 16 & -64 & -16 & 130 & -16 & -64 & 16 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 16 & -64 & -16 & 130 & -16 & -64 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 16 & -64 & -16 & 129 & -8 & -64 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 16 & -64 & -8 & 65 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 16 & -64 & -8 & 65 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 & 0 & -8 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

می‌توان نشان داد که با پیش ضرب کردن رابطه (۲۴) در ماتریس  $X$ ، برداری به دست می‌آید که هر یک از درایه‌های آن برابر با مقدار شتاب به دست آمده توسط رابطه (۲۱) برای هر یک از جرمها است:

$$-XD_m^T D_m \approx \ddot{X} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (25)$$

بدین طریق برقراری رابطه (۹) با در نظر گرفتن عملگر اصلاح شده  $D_m$  به اثبات می‌رسد:

$$XD_m^T D_m \approx -\ddot{X} \quad (26)$$

نکته‌ای که بایستی در نظر گرفت، این است که در محاسبه سرعت با استفاده از روش چهار نقطه‌ای مرکزی مقدار سرعت از لحظه سوم تا لحظه  $N-2$  ام قابل محاسبه است. به عبارت دیگر در این روش امکان محاسبه سرعت در دو لحظه اول و دو لحظه آخر نمونه برداری وجود ندارد، از این رو مقدار سرعت در این لحظات برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. این فرض باعث ایجاد خطا در محاسبه شتاب در چهار نقطه ابتدایی و چهار نقطه انتهایی می‌شود. ولی از آنجاکه در عمل داده برداری از یک سیستم در بازه زمانی بزرگی انجام می‌گردد و تعداد نمونه‌ها به اندازه کافی زیاد می‌باشد، مقدار این خطا به صفر میل می‌کند.

ذکر این نکته لازم است که چنین مشکلی در روش متعامد هموار نیز که اساس آن بر استفاده از مشتق‌گیری دو نقطه‌ای استوار است وجود دارد ولی در هر دو روش با داشتن تعداد داده‌های کافی بر طرف می‌شود. نکته‌ای که ذکر آن حائز اهمیت است اینکه با انجام چنین عملیاتی برای سایر روابط پیشنهاد شده در جدول (۱) می‌توان نشان داد که برای مشتق‌گیری‌های سه نقطه‌ای رابطه (۹) برقرار نمی‌باشد. بنابراین در روش تجزیه متعامد هموار نمی‌توان برای افزایش دقت در مشتق‌گیری‌های سه نقطه‌ای استفاده کرد از طرف دیگر گرچه روش دو نقطه‌ای پس‌رو در رابطه (۹) صدق می‌کند ولی نتایج حاصل از آن از نظر دقت مشابه روش دو نقطه‌ای پیش‌رو است بعلاوه با استفاده از روش دونقطه‌ای مرکزی، ضمن برقراری رابطه (۹)، در نهایت می‌توان چنین استنباط کرد که روش تجزیه متعامد هموار اصلاح شده که در آن از روش مشتق‌گیری چهار نقطه‌ای مرکزی استفاده می‌شود دارای بالاترین دقت خواهد بود. روش تجزیه متعامد هموار بیشتر از حالتی است که از روشهای دو نقطه‌ای پیش‌رو و پس‌رو بوده و کمتر از حالتی است که از روش چهار نقطه‌ای مرکزی استفاده شود.



## ۵ - مقایسه دقت روش SOD اصلاح شده و روش SOD با اعمال به یک سیستم ارتعاشی گسسته

برای بررسی دقت روش پیشنهادی و مقایسه آن با روش تجزیه متعامد هموار اولیه، روش اصلاح شده برای یک سیستم ارتعاشی هشت درجه آزادی اعمال می‌گردد و نتایج روش جدید با نتایج روش اولیه که در مرجع [۱] ارائه گردیده است، مورد مقایسه قرار می‌گیرند ( شکل ۱).

برای اینکه امکان مقایسه دقت نتایج در هر یک از دو روش فوق فراهم گردد ابتدا مسئله مذکور توسط روش تحلیلی آنالیز مودال و با محاسبه ماتریس های جرم و سفتی حل می‌گردد. با نوشتن معادلات حرکت برای هر یک از جرم ها و نمایش نتیجه حاصل به فرم ماتریسی، رابطه (۲۵) بدست می‌آید:

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{f\} \quad (27)$$

در مرجع مذکور،  $m=1$  و  $k=1$  و میرایی سیستم به صورت میرایی تناسبی و به شکل  $\alpha=0.01$  در نظر گرفته شده است.

در رابطه (۲۷)،  $\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix}$  بردار جابه‌جائی،  $\{\dot{x}\}$  بردار سرعت،  $\{\ddot{x}\}$  بردار شتاب و  $\{f\}$  بردار نیروهای

اعمالی است. برای محاسبه پارامترهای مودال معادله (۲۷) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$M\{\ddot{x}\} + K\{x\} = \{0\} \quad (28)$$

که در آن ماتریس‌های سفتی و جرم به صورت زیر می‌باشند:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

با حل مسئله فوق، فرکانس‌های طبیعی (بر حسب rad/sec) و بردارهای مودال به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 0.1838 \\ 0.5266 \\ 0.8143 \\ 1.0966 \\ 1.3859 \\ 1.6412 \\ 1.8366 \\ 1.9586 \end{Bmatrix}$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} 0.0424 & 0.0899 & -0.150 & 0.2390 & -0.379 & 0.4849 & -0.313 & 0.0916 \\ -0.240 & -0.427 & 0.5092 & -0.440 & 0.1538 & 0.3267 & -0.453 & 0.1771 \\ 0.3989 & 0.4958 & -0.203 & -0.274 & 0.5022 & -0.048 & -0.467 & 0.2565 \\ -0.492 & -0.254 & -0.369 & 0.4185 & 0.2467 & -0.391 & -0.352 & 0.3273 \\ 0.5044 & -0.149 & 0.4583 & 0.3070 & -0.306 & -0.475 & -0.139 & 0.3871 \\ -0.434 & 0.4558 & 0.0508 & -0.394 & -0.490 & -0.243 & 0.1129 & 0.4337 \\ 0.2927 & -0.479 & -0.494 & -0.338 & -0.086 & 0.1492 & 0.3329 & 0.4658 \\ -0.1030 & 0.2018 & 0.2914 & 0.3674 & 0.4221 & 0.4429 & 0.4607 & 0.4820 \end{bmatrix}$$

نتایج به دست آمده از روش تحلیلی فوق به عنوان معیار سنجش دقت روش تجزیه متعامد هموار و روش اصلاحی ارائه شده در این تحقیق در نظر گرفته می‌شود.

برای بررسی دقت هر یک از دو روش اولیه و اصلاح شده، از نرم‌افزار Matlab استفاده شده است. به این ترتیب که سیستم ارتعاشی توسط یک ورودی نویز سفید که به اولین جرم اعمال می‌شود، تحریک می‌گردد. کلیه جرم‌های سیستم در لحظه  $t = 0$  ساکن هستند.

در این بخش دو موضوع مورد بررسی قرار می‌گیرد، در گام نخست، تاثیر اصلاح عملگر  $D$  بر همگرایی روش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس همانند مرجع [۱] با اعمال تحریک نویز سفید، پاسخ سیستم در فواصل زمانی ۰/۱ ثانیه نمونه برداری می‌گردد. سیستم ارتعاشی به ازای طول بازه‌های زمانی مختلف از ۱۰ ثانیه تا ۱۰۰۰۰۰ ثانیه مورد تحریک قرار می‌گیرد و بدین ترتیب ماتریس  $x$  تولید می‌گردد و سپس برای مقایسه دقت روش تجزیه متعامد هموار و روش اصلاح شده، عملگرهای متناظر دو روش یعنی  $D$  و  $D_m$  محاسبه و مسئله مقدار ویژه مربوط به هر یک از دو روش تشکیل می‌گردد. در جدول (۲) فرکانسهای طبیعی حاصل از حل تحلیل مسئله مقدار ویژه<sup>۱</sup> (Structural EVP) و مقادیر ویژه به دست آمده از روش متعامد هموار<sup>۲</sup> (SOD) و فرکانسهای طبیعی حاصل از روش تجزیه متعامد هموار اصلاح شده<sup>۳</sup> (Modified SOD) به ازای تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه برداری از هر یک از جرم‌ها آورده شده است.

از مقایسه کلی نتایج ارائه شده در جدول (۲)، مشخص می‌گردد که فرکانسهای طبیعی بدست آمده از روش Modified-SOD به مقادیر حاصل از روش تحلیلی مسئله مقدار ویژه نزدیک‌تر است. در جداول (۳) و

<sup>1</sup> structural eigenvalue problem

<sup>2</sup> smooth orthogonal decomposition

<sup>3</sup> modified smooth orthogonal decomposition

(۴) به ترتیب خطاهای محاسبه فرکانسهای طبیعی حاصل از روشهای SOD و Modified-SOD به ازای مقادیر نمونه برداری‌های مختلف از ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰۰ آورده شده است.

برای بررسی دقت بردارهای مودال، روش‌های گوناگونی وجود دارد. یکی از روش‌های مورد استفاده این است که بردارهای مودال به دست آمده توسط روش تقریبی در قالب یک ماتریس تحت عنوان ماتریس مودال نوشته می‌شود. با ضرب ماتریس مودال حاصل از یکی از روش‌های تقریبی در ترانهاده ماتریس مودال دقیق حاصل از روش تحلیلی حل مساله مقدار ویژه، ماتریسی به دست می‌آید که در صورت صحیح بودن جوابهای حاصل از روش تقریبی، بایستی عناصر قطری ماتریس حاصل ۱ و سایر عناصر آن صفر باشند [۶ و ۷]. اگر از روش مذکور برای بررسی دقت بردارهای مودال حاصل از روش SOD استفاده شود. در صورت دقیق بودن شکل مودها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & [\{\psi_1\} \ \{\psi_2\} \ \dots \ \{\psi_n\}]_{SOD} [\{\psi_1\} \ \{\psi_2\} \ \dots \ \{\psi_n\}]_{structuralEVP}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

در رابطه فوق،  $\{\psi_i\}$ ها بردارهای مودال نرمالیزه شده است.

برای سیستم هشت درجه آزادی مورد بحث، ضرب ماتریس مودال حاصل از روش SOD (با مقدار ۱۰۰۰۰ داده) در ترانهاده ماتریس مودال حاصل از روش تحلیلی حل مساله مقدار ویژه به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$[\psi]_{SOD} [\psi]_{structuralEVP}^T = \begin{bmatrix} 0.9993 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0002 & 0.0004 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.9998 & 0.0004 & 0.0005 & 0.0001 & 0.0008 & 0.0019 & 0.0012 \\ 0.0003 & 0.0000 & 0.9994 & 0.0013 & 0.0002 & 0.0022 & 0.0051 & 0.0035 \\ 0.0003 & 0.0002 & 0.0003 & 0.9999 & 0.0005 & 0.0056 & 0.0127 & 0.0094 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0004 & 1.0000 & 0.0006 & 0.0022 & 0.0011 \\ 0.0003 & 0.0007 & 0.0023 & 0.0057 & 0.0005 & 0.9999 & 0.0279 & 0.0136 \\ 0.0008 & 0.0017 & 0.0051 & 0.0136 & 0.0018 & 0.0256 & 0.9997 & 0.0307 \\ 0.0005 & 0.0008 & 0.0021 & 0.0070 & 0.0012 & 0.0145 & 0.0296 & 0.9999 \end{bmatrix} \quad (30)$$

اگر از روش فوق برای بررسی دقت بردارهای مودال حاصل از روش Modified-SOD (با تعداد ۱۰۰۰۰ داده) استفاده شود رابطه زیر بدست می‌آید:

$$[\psi]_{\text{Modified-SOD}} [\psi]_{\text{structural-EVP}}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0.9995 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0001 & 0.9999 & 0.0004 & 0.0004 & 0.0001 & 0.0006 & 0.0013 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.9995 & 0.0009 & 0.0001 & 0.0017 & 0.0041 & 0.0029 \\ 0.0003 & 0.0002 & 0.0002 & 0.9998 & 0.0004 & 0.0037 & 0.0091 & 0.0007 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0002 & 0.9999 & 0.0006 & 0.0021 & 0.0009 \\ 0.0003 & 0.0004 & 0.0013 & 0.0041 & 0.0003 & 0.9999 & 0.0131 & 0.0113 \\ 0.0005 & 0.0019 & 0.0041 & 0.0104 & 0.0017 & 0.0241 & 0.9998 & 0.0291 \\ 0.0005 & 0.0006 & 0.0017 & 0.0051 & 0.0004 & 0.0097 & 0.0204 & 0.9999 \end{bmatrix} \quad (31)$$

از مقایسه اجمالی طرف دوم روابط (۳۰) و (۳۱) مشاهده می‌شود که اعضای قطری ماتریس مربوط به روش Modified-SOD نسبت به روش SOD به واحد نزدیکترند. بعلاوه اعضای غیر قطری ماتریس حاصل از روش Modified-SOD در مقایسه اعضای غیر قطری حاصل از روش SOD به صفر نزدیکترند. مقایسه اخیر دقت بیشتر روش Modified-SOD را آشکار می‌سازد.

چنانکه قبلاً نیز اشاره شد اصولاً روش SOD برای سیستم‌های نامیرا و کم میرا اعمال می‌شود. در ادامه نشان داده می‌شود که با اعمال روش Modified-SOD به سیستم‌های کم میرا نیز می‌توان با دقت بیشتر نسبت به روش SOD فرکانس‌های طبیعی را بدست آورد. بدین منظور در سیستم هشت درجه آزادی مورد بحث، فرکانس‌های طبیعی سیستم به ازای مقادیر مختلف  $\alpha$  با استفاده از دو روش SOD و Modified-SOD به ازای مقدار داده‌های یکسان ۱۰۰۰۰ محاسبه و درصد خطاهای هر یک از دو روش مذکور به ترتیب در جداول (۵) و (۶) ارائه شده است.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله با اعمال تغییراتی در فرایند محاسبات و بهبود دقت روش تجزیه متعامد هموار (SOD)، روش تجزیه متعامد هموار اصلاح شده (Modified-SOD) ارائه گردید. در روش SOD در عملگر D از مشتق دو نقطه‌ای پیشرو استفاده شده است که دقت آن از مرتبه  $\Delta t$  می‌باشد. به منظور افزایش دقت، در روش پیشنهادی (Modified-SOD) در عملگر D از مشتق چهار نقطه‌ای مرکزی استفاده شد ( $D_m$ ) که دقت آن از مرتبه  $(\Delta t)^4$  می‌باشد. همچنین با بررسی قابلیت استفاده از مشتقات دو نقطه‌ای، سه نقطه‌ای و چهار نقطه‌ای (در حالت‌های پیشرو، پسرو و مرکزی) مشخص شد که استفاده از مشتقات سه نقطه‌ای در استخراج عملگر D منجر به نقض فرض اساسی روش تجزیه متعامد هموار (رابطه ۹) می‌شود.

برای بررسی و مقایسه دقت روش پیشنهادی یک سیستم هشت درجه آزادی با استفاده از دو روش SOD و Modified-SOD مورد مقایسه قرار گرفت. به منظور داشتن مبنائی برای مقایسه دقت دو روش، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی سیستم مورد بحث با تشکیل و حل مسئله مقدار ویژه بطور تحلیلی استخراج گردید. بررسی نتایج نشان می‌دهد که برای سیستم‌های کم میرا به ازای تعداد نمونه‌های یکسان، درصد خطا در روش Modified-SOD کمتر از درصد خطای روش SOD می‌باشد و با افزایش تعداد داده‌ها، در روش پیشنهادی درصد خطای محاسبه فرکانس‌های طبیعی به سرعت کاهش می‌یابد.

قابلیت استفاده از روش پیشنهادی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم با میرائی‌های مختلف نیز مورد بررسی قرار گرفت. اصولاً روش SOD برای سیستم‌های نامیرا قابل اعمال است و برای سیستم‌های میرا، نتایج با خطا همراه هستند. برای مقایسه دقت روش SOD و روش پیشنهادی در محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم‌های میرا، سیستم هشت درجه آزادی مورد بحث، با میرائی مختلف، مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاکی از این است که روش پیشنهادی در مقایسه با روش SOD دارای دقت بیشتری می‌باشد. بنابراین روش پیشنهادی نسبت به روش SOD قبلی دارای قابلیت بیشتری در تحلیل سیستم‌های کم‌میرا است.

## مراجع

- [1] Farooq, U., and Feeny, B.F., "Smooth Orthogonal Decomposition for Modal Analysis of Randomly Excited Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 316., pp. 137-146, (2008).
- [2] Juang, J.N., Pappa, R., "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 8., pp. 620-627, (1985).
- [3] Shih, C.Y., Tsuei, Y.G., Allemang, R.J., and Brown, D.L., "Complex Mode Indication Function and its Application to Spatial Domain Parameter Estimation", *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 2, pp. 367-377, (1988).
- [4] Chelidze, D., and Zhou, W., "Smooth Orthogonal Decomposition-based Vibration Mode Identification", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, pp. 461-473, (2006).
- [5] Feeny, B. F., "A Complex Orthogonal Decomposition for Wave Motion Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310 (1-2), pp. 77-90, (2008).
- [6] Allemang, R.J., and Brown, D. A., "Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis", *Proceedings, International Modal Analysis Conference, Orlando, FL, USA*, pp. 110-116, (1982).
- [7] Allemang, R.J., "The Modal Assurance Criterion-twenty Years of use and Abuse", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37(8), pp. 14-21, August (2003).
- [8] Richardson, M., and Formenti, D.L., "Parameter Estimation from Frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials", *Proceedings of the International Modal Analysis Conference, Orlando, FL, USA*, pp. 167-182, (1982).
- [9] Demidovich, B.P., and Maron, I.A., "*Computational Mathematics*", Mir Publishers, Moscow, (1987).

## فهرست نمادهای انگلیسی

$a_i(t_j)$	: شتاب در لحظه $j$
$C$	: ماتریس میرائی
$D$	: عملگر مشتق در روش SOD
$D_m$	: عملگر مشتق در روش SOD اصلاح شده
$F$	: ماتریس نیرو
$f$	: بردار نیرو
$K$	: ماتریس سفتی فنر
$M$	: ماتریس جرم
$N$	: تعداد درجات آزادی سیستم ارتعاشی گسسته
$n$	: تعداد دفعات نمونه برداری
$R$	: ماتریس کواریانس جابه جایی
$S$	: ماتریس کواریانس سرعت
$V$	: ماتریس سرعت
$v_i(t_j)$	: سرعت جرم $i$ ام در لحظه $j$
$X$	: ماتریس جابه جایی
$x_i(t_j)$	: جابه جایی جرم $i$ ام در لحظه $j$

## نمادهای یونانی

$\alpha$	: ضریب تناسب میرائی
$\Delta t$	: نمو زمانی
$\Lambda$	: ماتریس مقادیر ویژه
$\lambda$	: مقادیر ویژه
$\Phi$	: ماتریس بردارهای مودال
$\phi$	: بردار ویژه مودال
$\Psi$	: ماتریس بردارهای ویژه روش SOD
$\psi$	: بردار ویژه SOD
$\omega$	: سرعت زاویه‌ای

## جدولها

جدول ۱- محاسبه مشتق به روش تفاضل محدود با دقت‌های مختلف

مرتبۀ دقت روش	فرمول	نام روش
$\Delta t$	$v_i = \frac{1}{\Delta t}(x_i - x_{i-1})$	دو نقطه ای پسرو
$(\Delta t)^2$	$v_i = \frac{1}{2\Delta t}(3x_i - 4x_{i-1} + x_{i-2})$	سه نقطه ای پسرو
$\Delta t$	$v_i = \frac{1}{\Delta t}(x_{i+1} - x_i)$	دو نقطه ای پیشرو
$(\Delta t)^2$	$v_i = \frac{1}{2\Delta t}(-3x_i + 4x_{i+1} - x_{i+2})$	سه نقطه ای پیشرو
$(\Delta t)^2$	$v_i = \frac{1}{2\Delta t}(x_{i+1} - x_{i-1})$	دو نقطه ای مرکزی
$(\Delta t)^4$	$v_i = \frac{1}{12\Delta t}(x_{i-2} - 8x_{i-1} + 8x_{i+1} - x_{i+2})$	چهار نقطه ای مرکزی

جدول ۲- فرکانسهای طبیعی به دست آمده از روش تحلیلی مسئله مقدار ویژه و روشهای SOD و Modified-SOD

frequency	Structural EVP	SOD	Modified SOD
$\omega_1$	۰/۱۸۳۸	۰/۱۸۱۶	۰/۱۸۳۷
$\omega_2$	۰/۵۲۶۶	۰/۵۲۷۵	۰/۵۲۴۱
$\omega_3$	۰/۸۱۴۳	۰/۸۱۳۳	۰/۸۱۳۴
$\omega_4$	۱/۰۹۶۶	۱/۰۹۶۳	۱/۰۹۷۱
$\omega_5$	۱/۳۸۵۹	۱/۳۸۷۵	۱/۳۸۴۵
$\omega_6$	۱/۶۴۱۲	۱/۶۴۴۹	۱/۶۳۹۴
$\omega_7$	۱/۸۳۶۶	۱/۸۳۶۸	۱/۸۳۷۱
$\omega_8$	۱/۹۵۲۴	۱/۹۵۲۴	۱/۹۵۵۸

**جدول ۳-** درصد خطای محاسبه فرکانسهای طبیعی به ازای تعداد نمونه برداری مختلف با استفاده از روش *SOD*

تعداد نقاط	۱۰ <sup>۲</sup>	۱۰ <sup>۲.۵</sup>	۱۰ <sup>۳</sup>	۱۰ <sup>۳.۵</sup>	۱۰ <sup>۴</sup>	۱۰ <sup>۴.۵</sup>	۱۰ <sup>۵</sup>	۱۰ <sup>۵.۵</sup>	۱۰ <sup>۶</sup>
$\omega_1$	۹/۶۸	۹/۶۹	۴/۹۵	۱/۰۸	۱/۱۹	۰/۷۰	۰/۴۸	۰/۳۸	۰/۰۰
$\omega_2$	۲/۵۴	۲/۱۴	۲/۸۲	۰/۴۹	۰/۱۷	۰/۱۷	۰/۱۱	۰/۰۵	۰/۰۳
$\omega_3$	۲/۶۰	۳/۵۳	۱/۳۰	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۲۰	۰/۰۲	۰/۰۷	۰/۰۱
$\omega_4$	۶/۳۸	۴/۵۱	۰/۵۷	۰/۲۹	۰/۰۲	۰/۱۱	۰/۰۴	۰/۰۰	۰/۰۰
$\omega_5$	۸/۶۰	۰/۸۵	۰/۲۱	۰/۳۹	۰/۱۱	۰/۰۸	۰/۰۶	۰/۰۲	۰/۰۰
$\omega_6$	۱۲/۹۴	۰/۱۳	۱/۸۴	۰/۳۷	۰/۲۲	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۱
$\omega_7$	۲۱/۷۹	۱/۴۲	۱/۴۵	۰/۲۷	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۰
$\omega_8$	۶۸/۰۴	۵/۸۳	۲/۲۵	۰/۳۹	۰/۳۱	۰/۱۴	۰/۰۷	۰/۰۳	۰/۰۱
میانگین	۱۶/۵۷	۳/۵۱	۱/۹۲	۰/۴۲	۰/۲۶	۰/۱۸	۰/۱۰	۰/۰۷	۰/۰۱

**جدول ۴-** خطای مقادیر ویژه مودال برای بازه های نمونه برداری مختلف با *MSOD*

تعداد نقاط	۱۰ <sup>۲</sup>	۱۰ <sup>۲.۵</sup>	۱۰ <sup>۳</sup>	۱۰ <sup>۳.۵</sup>	۱۰ <sup>۴</sup>	۱۰ <sup>۴.۵</sup>	۱۰ <sup>۵</sup>	۱۰ <sup>۵.۵</sup>	۱۰ <sup>۶</sup>
$\omega_1$	۷/۴۹	۲/۱۷	۲/۱۹	۰/۹۵	۰/۸۳	۰/۳۱	۰/۲۸	۰/۱۹	۰/۰۱
$\omega_2$	۸/۷۱	۳/۰۱	۲/۵۳	۰/۳۹	۰/۴۸	۰/۱۱	۰/۰۲	۰/۰۵	۰/۰۰
$\omega_3$	۸/۸۲	۱/۷۹	۰/۸۱	۰/۱۵	۰/۱۱	۰/۱۹	۰/۲۰	۰/۰۷	۰/۰۱
$\omega_4$	۹/۰۹	۲/۱۱	۰/۷۵	۰/۱۷	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۳	۰/۰۰	۰/۰۰
$\omega_5$	۹/۱۷	۰/۲۱	۰/۱۹	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۲	۰/۰۰
$\omega_6$	۹/۲۷	۰/۱۳	۰/۸۳	۰/۱۴	۰/۱۰	۰/۰۰	۰/۰۷	۰/۰۱	۰/۰۰
$\omega_7$	۱۳/۰۹	۲/۱۸	۱/۹۵	۱/۱۷	۰/۶۲	۰/۲۸	۰/۱۰	۰/۰۴	۰/۰۰
$\omega_8$	۲۵/۱۸	۳/۱۹	۱/۸۳	۰/۴۰	۰/۱۴	۰/۰۸	۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۱
میانگین	۱۱/۳۵	۱/۸۴	۱/۳۸	۰/۴۳	۰/۲۱	۰/۱۳	۰/۱۰	۰/۰۵	۰/۰۰

**جدول ۵-** درصد خطای محاسبه فرکانسهای طبیعی به ازای *c* های مختلف در روش *SOD*

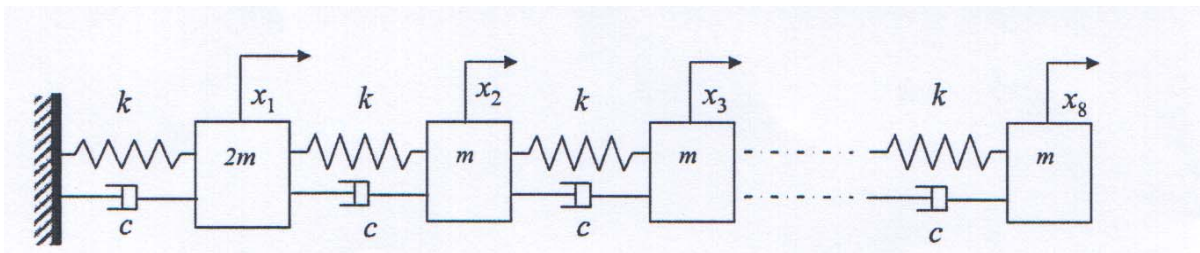
<b>c</b>	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۵
$\omega_1$	۳/۰۴۴۲	۳/۶۱۲۹	۱۱/۸۳۴	۱۴/۹۵۷	۲۱/۱۶۷۷
$\omega_2$	۱/۷۴۹۱	۱/۷۶۹۶	۱/۲۸۹۴	۵/۲۹۹۵	۱۶/۶۶۶۳
$\omega_3$	۰/۱۰۲۳	۱/۳۳۰۳	۱/۲۹۵۳	۲/۵۶۹۹	۳/۰۳۵۳
$\omega_4$	۰/۳۰۲۹	۰/۱۰۳۲	۱/۹۶۹۱	۰/۲۲۳۵	۲/۴۲۰۶
$\omega_5$	۰/۲۴۸۹	۰/۲۳۰۲	۱/۴۳۶۱	۲/۱۷۲۸	۳/۲۶۷۰
$\omega_6$	۰/۰۵۷۶	۰/۰۹۷۲	۱/۳۶۷۴	۲/۸۳۳۳	۳/۴۶۲۷
$\omega_7$	۰/۱۶۷۸	۰/۷۵۱۲	۱/۰۷۹۷	۱/۹۵۱۷	۱/۹۴۵۷
$\omega_8$	۰/۱۶۹۷	۰/۲۵۷۲	۰/۸۷۹۷	۲/۵۹۳۵	۵/۷۲۶۹
میانگین	۰/۷۳۰۳	۱/۰۲۸۹	۲/۶۸۲۱	۴/۰۷۵۲	۷/۲۱۱۵



جدول ۶- درصد خطای محاسبه فرکانسهای طبیعی به ازای  $c$  های مختلف در Modified-SOD

$c$	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۵
$\omega_1$	۲/۱۵۷۶	۳/۰۸۹۶	۸/۷۵۹۲	۹/۷۵۳۹	۱۷/۵۹۳
$\omega_2$	۰/۹۳۸۴	۱/۲۸۵۴	۱/۶۲۷۳	۹/۱۲۸۵	۱۵/۲۱۴
$\omega_3$	۰/۷۷۶۸	۰/۱۴۳۹	۱/۰۳۳۰	۰/۳۷۷۸	۴/۶۶۴۷
$\omega_4$	۰/۹۴۹۰	۰/۸۷۴۱	۰/۵۴۵۵	۱/۴۹۲۸	۲/۹۴۳۵
$\omega_5$	۰/۲۴۲۱	۰/۸۱۶۴	۰/۶۰۱۶	۲/۲۲۵۰	۲/۴۲۵۲
$\omega_6$	۰/۱۷۷۶	۰/۳۵۷۶	۰/۰۷۱۳	۱/۴۸۸۳	۳/۴۰۲۲
$\omega_7$	۰/۱۰۶۹	۰/۵۶۱۹	۰/۵۷۵۸	۰/۳۶۴۸	۱/۲۴۹۰
$\omega_8$	۰/۰۲۷۱	۰/۳۹۲۷	۰/۴۹۶۲	۱/۵۳۹۹	۵/۳۶۰۹
میانگین	۰/۶۷۱۹	۰/۹۴۰۲	۱/۷۱۳۷	۳/۲۹۶۴	۶/۷۳۱۶

## شکلها



شکل ۱- سیستم ارتعاشی ۸ درجه آزادی [۱]

## Abstract

In this paper, a new method is proposed for increasing the accuracy of the smooth orthogonal decomposition (SOD) method. To this end, some modifications were made on the traditional SOD algorithm, and the central four point differential operator  $D_m$  with the accuracy order of  $(\Delta t)^4$  were used instead of forward two point differential operator  $D$  with the accuracy order of  $(\Delta t)$ . We called this method “the modified smooth orthogonal decomposition” (M-SOD).

In order to compare the accuracy of the proposed Modified-SOD method with the traditional SOD method, the two methods with the same number of data, are used for vibrational analysis of a discrete system and the results are compared with those obtained through the exact solution of the corresponding Eigenvalue problem. The results show that the Modified-SOD method has superior accuracy than the traditional SOD method.