



تحلیل ارتعاشات چسبندگی - لغزش به روش خطی سازی

علی نصرتی^۱

کارشناس ارشد

ارتعاشات چسبندگی- لغزش^۳، ارتعاشات خود محرک غیر خطی هست که در سیستم های دینامیکی مانند ماشین ابزار باعث تولید صدا و ناهمواری سطح قطعه می شود. در این مقاله به منظور کنترل دقیقتر این ارتعاشات، حل تحلیلی دقیقتری به روش خطی سازی^۴ ارائه شده است. مدل یک درجه آزادی "جرم روی تسمه متحرک"^۵ با فرمول اصطکاک که نشان می دهد نیروی اصطکاک نسبت به سرعت نسبی بین دو سطح، اول کاهش و سپس افزایش می یابد، در نظر گرفته شده و به روش خطی سازی عبارتی تحلیلی برای پاسخ مکانی جرم و حداکثر دامنه ارتعاشات در دو حالت لغزش خالص^۶ و چسبندگی- لغزش ارائه شده است. برای بررسی صحت روابط بدست آمده، جواب های حاصل از مثال عددی با نتایج روش عددی و تحلیل اغتشاشی سایر محققین مقایسه شده است. نتایج حاصل نشان می دهد که تحلیل ارائه شده از دقت بالاتری نسبت به تحلیل های پیچیده تر دیگر پژوهشگرها برخوردار می باشد.

انوشیروان فرشیدیان فر^۲

دانشیار

واژه های راهنما: ارتعاشات چسبندگی - لغزش، اصطکاک، خطی سازی

۱- مقدمه

اصطکاک نیروی مقاومی است که از لغزش جلوگیری می کند و نقش مهمی در سیستم های دینامیکی ایفاء می کند. از یک طرف، در سیستم های دینامیکی که اصطکاک وجود دارد، باید اصطکاک و در نتیجه سائیدگی در آنها کاهش یابد تا سبب افزایش طول عمر و راندمان سیستم دینامیکی گردد. به واسطه اصطکاک و سایش، در هر کشوری زیان اقتصادی معادل ۰.۵٪ تولید ناخالص ملی تخمین زده شده است، بنابراین کاهش اصطکاک باعث صرفه جویی اقتصادی می شود [1]. از طرف دیگر در بعضی سیستم های دینامیکی برای انتقال نیروها و کاهش دامنه ارتعاشات از اصطکاک استفاده می شود. کاهش دامنه ارتعاشات، باعث کاهش تنش های متناوب، افزایش طول عمر و ضریب اطمینان سیستم می شود.

^۱ نویسنده مسئول، کارشناس ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، عضو باشگاه پژوهشگران جوان
ali_nti@yahoo.com

^۲ دانشیار، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد Farshid@um.ac.ir

^۳ Stick-slip vibrations

^۴ linearization method

^۵ Mass-on-moving-belt

^۶ Pure-slip vibrations

وقتی سرعت نسبی بین دو جسم تغییر می کند ضریب اصطکاک مابین دو جسم نیز تغییر می کند و این تغییر ضریب اصطکاک باعث ایجاد ارتعاشات خود محرک^۱ مانند ارتعاشات چسبندگی- لغزش در سیستم ها می شود. در بیشتر سیستم های دینامیکی که شامل اصطکاک خشک بین سطوح می باشد، در سرعت های کم، نمودار نیرو-سرعت دارای شیب منفی می باشد. شیب منفی، میرایی منفی در نظر گرفته می شود که در نوسانات تا زمانی که بالانسی بین تولید و اتلاف انرژی بدست آید موجب افزایش دامنه نوسان می شود [2].

ارتعاشات ایجاد شده از اصطکاک^۲ در سیستم های دینامیکی باعث اتلاف مقداری انرژی و تولید صدا در سیستم ها می شود. اتلاف انرژی بیشتر به حرارت تبدیل می شود و موجب گرمای اضافی در سیستم می شود و صدا موجب ناراحتی استفاده کننده از آن سیستم دینامیکی می شود. صداهای تولید شده نسبت به فرکانس و سیستم مورد نظر ارتعاشی به نام های مختلفی معروف هستند. بعنوان مثال اصطلاح اسکول^۳ برای نویزهای فرکانس بالا، اصطلاحات چتر^۴ و کلانک^۵ برای نویزهای فرکانس پایین استفاده می شوند.

ارتعاشات چسبندگی-لغزش دارای دو مرحله می باشد، مرحله چسبندگی که هیچ لغزشی بین قسمت ها نیست و نیروی اصطکاک محدود به نیروی اصطکاک ایستایی می شود و مرحله لغزش که نیروی اصطکاک کمتری نسبت به نیروی ایستایی دارد.

Leonardo da Vinci (۱۴۵۲-۱۵۱۹) بیان کرد که نسبتی مستقیم بین نیروی عمودی و نیروی اصطکاک است و [3] Amontons در سال ۱۶۹۹ ثابت تناسب را ضریب اصطکاک نامید. [4] Coulomb در سال ۱۷۸۵ آزمایش های Amontons را ادامه داد و رابطه خطی تغییر نیروی اصطکاک نسبت به سرعت نسبی را ارائه نمود.

در سالهای بعد مشاهده شد که در بیشتر سیستم های دینامیکی وقتی سرعت نسبی بین دو سطح از صفر شروع به افزایش می کند، پس از یک سرعت خاص ضریب اصطکاک دوباره افزایش می یابد، این سرعت را سرعت نسبی حداقل^۶ یا v_m می نامند. Panovko و همکارش [5] نشان دادند سیستمی که دارای اصطکاک است در سرعت v_m دارای حداقل ضریب اصطکاک است و فقط زمانی ارتعاشات خود محرک رخ می دهد که سرعت سیستم کمتر از این باشد و همچنین اثبات کردند زمانی نوسانات خود محرک پایدار در سیستم رخ می دهد که سیستم غیر خطی باشد. Feeny و همکاران [6] و Oden و همکارش [7] مروری وسیع بر تاریخچه اصطکاک خشک و پدیده چسبندگی-لغزش ارائه نمودند.

حل های تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی زیادی برای بدست آوردن دامنه و فرکانس این ارتعاشات انجام شده است. نخستین مطالعات روی ارتعاشات چسبندگی- لغزش را [8] Hartog در سال ۱۹۳۱ انجام داد، وی حل تحلیلی دقیق برای سیستم ارتعاش اجباری یک درجه آزادی با قانون کولمب برای دو حالت بدون ایست (فقط لغزش) و یک- ایست (یک بار چسبندگی- لغزش) ارائه نمود. [9] Tondl و Mitropolskii و همکارش [10] ارتعاشات خود محرک را در مدل جرم-روی- تسمه توضیح دادند و دامنه ارتعاش را در غیاب

¹ Self-excited vibrations

² Friction induced vibrations

³ squeal

⁴ chatter

⁵ clunk

⁶ Minimum relative velocity

چسبندگی بین جرم و تسمه تخمین زدند. [11] Sakamoto منحنی های چسبندگی- لغزش را در مرحله لغزش به روش آزمایشگاهی با در نظر گرفتن جابجایی عمودی بدست آورد. [12] Elmer ارتعاشات چسبندگی- لغزش و لغزش خالص سیستم جرم-روی- تسمه بدون دمپر و توابع مختلف اصطکاک مورد بررسی قرار داد و برای حالت سطوح روغن کاری شده، منحنی جابجایی-سرعت را به روش انتگرال گیری عددی بدست آورد.

Brockley و همکارانش [13] یک رابطه برای سرعت بحرانی را که در آن این ارتعاشات محو می شود، بر اساس میرایی سیستم، نیروی عمودی و فرمول اصطکاک ارائه کردند. [14] Block نشان داد که افزایش زیاد میرایی باعث محدود کردن پدیده چسبندگی-لغزش می شود و مقداری برای میرایی بحرانی را که باعث محو شدن این ارتعاش می شود پیش بینی کرد، همچنین نتیجه گرفت که شرط ضروری برای رخداد حرکت چسبندگی- لغزش کاهش نیروی اصطکاک با افزایش سرعت لغزش است. Gao و همکارانش [15] عبارتی تحلیلی برای تغییر مکان در طی مرحله لغزش و سیستم هایی که می توان برای آنها خطی بودن قانون اصطکاک کولمب و افزایش ضریب اصطکاک ایستایی با زمان را در نظر گرفت، ارائه کردند.

[16] Thomsen به روش اغتشاش فرمولی برای نوسانات چسبندگی- لغزش سیستم هایی که تفاوت خیلی کمی بین اصطکاک جنبشی و ایستایی در اصطکاک لغزنده دارند ارائه کرد و نشان داد که اگر تحریک خارجی با فرکانس بالا و دامنه کم به سیستم وارد شود، دامنه این ارتعاشات کاهش می یابد. Thomsen و [17] Fidlin فرمولی دقیقتر به روش اغتشاش برای دامنه این ارتعاشات ارائه کردند.

جلوگیری از این ارتعاشات در صنعت از اهمیت بالایی برخوردار است. Hunt و همکارانش [18] در مورد ارتعاشات چسبندگی- لغزش که در سطوح ماشینکاری در سرعت های پایین رخ می دهد توضیح دادند و نشان دادند که برای هر ماده باید ابزار یک سرعت خاص داشته باشد که کمتر یا بیشتر از آن ارتعاشات خود محرک در سیستم ایجاد می شود. شبیه سازی این محدوده توسط کامپیوتر را Bilkay و همکارش [19] ارائه کردند.

با توجه به مطالبی که بیان شد، برای ارتعاشات چسبندگی- لغزش در سیستم یک درجه آزادی با میرایی، تحلیل دقیقی که هر دو مرحله ارتعاش را در نظر گرفته باشد وجود ندارد، بدین منظور در این مقاله ابتدا مدل دینامیکی و معادله های حاکم بر سیستم ارائه می گردد، سپس حل تحلیلی دقیق آن به روش خطی سازی ارائه می شود. در انتها نتایج بدست آمده، با نتایج تحلیل عددی و تحلیل اغتشاش سایر محققین مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲- مدل سازی ارتعاشات چسبندگی- لغزش

مدل های مختلفی برای ارتعاشات چسبندگی- لغزش در نظر گرفته شده است، مدل یک بعدی با یک درجه آزادی جرم-روی- تسمه متحرک همانند شکل (۱)، مرسوم ترین مدل گسسته ای است که برای ارتعاشات چسبندگی- لغزش در نظر گرفته می شود [20]. جرم M با مشخصه طولی L بوسیله فنر K و دمپر C به تکیه گاه ثابتی متصل است و روی تسمه ای با سرعت ثابت V_b قرار دارد. این جرم در زمان t دارای موقعیت $X(t)$ از تکیه گاه ثابت می باشد و در معرض نیروی جاذبه Mg ، نیروی خطی فنر KX ، نیروی

میرایی CdX/dt و نیروی اصطکاک $Mg\mu(V_r)$ می باشد که در آن μ تابعی از سرعت نسبی بین جرم و تسمه است.

ارتعاشات چسبندگی - لغزش دارای دو مرحله هستند: مرحله چسبندگی و مرحله لغزش. ضریب اصطکاک ایستایی شامل مقادیر زیادی است و حداکثر آن از ضریب اصطکاک جنبشی در اصطکاک خشک بیشتر است. در مرحله چسبندگی هیچ لغزشی بین قسمت ها نیست و تا زمانیکه نیروی اصطکاک ایستایی بین جرم و تسمه بزرگتر از نیروی فنر و دمپر باشد، جرم به تسمه متحرک چسبیده است. هنگامیکه مقدار نیروی فنر و دمپر به حداکثر نیروی اصطکاک ایستایی برسد، جرم شروع به حرکت نسبی در جهت خلاف تسمه می کند و مرحله لغزش شروع می شود که نیروی اصطکاک کمتری نسبت به نیروی ایستایی دارد. وقتی که سرعت جرم به سرعت تسمه برسد، مرحله لغزش خاتمه می یابد و به همین ترتیب این عمل تکرار می شود. معادلات حرکت سیستم را با توجه به شکل (۱) می توان به صورت زیر نوشت:

$$M\ddot{X} + KX + C\dot{X} + Mg\mu(V_r) = 0 \quad \text{for } \dot{X} \neq V_b \quad (\text{slip}) \quad (1)$$

$$\ddot{X} = 0, \quad KX + C\dot{X} \leq Mg\mu_s \quad \text{for } \dot{X} = V_b \quad (\text{stick}) \quad (2)$$

که در آن،

$$V_r = \frac{dX}{dt} - V_b \quad (3)$$

معادله (۱) و معادله (۲) به ترتیب معرف معادله مرحله لغزش و چسبندگی می باشد. اگر تغییر متغیرهای زیر برای بدون بعد کردن معادله حرکت در نظر گرفته شود [17]،

$$\begin{aligned} \tau = \omega_0 t & & \omega_0^2 = \frac{K}{M} & & x = \frac{X}{L} \\ v_b = \frac{V_b}{\omega_0 L} & & 2\beta = \frac{C}{\sqrt{KM}} & & \gamma^2 = \frac{gM}{KL} \end{aligned} \quad (4)$$

معادلات (۱) و (۲) به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + x + \gamma^2\mu(v_r) = 0 \quad \text{for } \dot{x} \neq v_b \quad (5)$$

$$x + 2\beta v_b \leq \gamma^2 \mu_s \quad \text{for } \dot{x} = v_b \quad (6)$$

که در آن،

$$v_r = \dot{x} - v_b \quad (7)$$

و γ^2 نسبت نیروی گرانش به نیروی فنر و β نسبت میرایی (حقیقی به بحرانی) را بیان می کند. شکل (۲) تغییر ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی را نمایش می دهد. μ_s ضریب اصطکاک جسم، قبل از آنکه لغزشی در سیستم رخ دهد می باشد. در یک سرعت خاص بعد از اینکه در سیستم لغزش صورت گرفت ضریب اصطکاک به حداقل خود می رسد که آن سرعت را v_m و ضریب اصطکاک جنبشی را μ_m نامگذاری می کنند. تابع $\mu(v_r)$ را Panovko و همکارش [5] به صورت زیر تخمین زده اند:

$$\mu(v_r) = \mu_s \operatorname{sgn}(v_r) - \frac{3}{2}(\mu_s - \mu_m) \left(\frac{v_r}{v_m} - \frac{1}{3} \left(\frac{v_r}{v_m} \right)^3 \right) \quad (8)$$

با توجه به شکل (۲) $|\mu| \leq \mu_s$ زمانی ظاهر می شود که جسم روی تسمه متحرک ثابت است (مرحله چسبندگی و $v_r = 0$) و هنگامیکه جسم شروع به لغزش می کند نیروی اصطکاک با افزایش سرعت کاهش می یابد (مرحله لغزش و $v_r \neq 0$).

۳- تحلیل معادله حرکت به روش خطی سازی

به دلیل اینکه تابع اصطکاک (۸) باعث شده است که معادله دیفرانسیل حرکت (۵) غیر خطی و ناپیوسته شود، پاسخ دقیقی برای این ارتعاشات وجود ندارد و معمولاً از انتگرال گیری عددی و روش اغتشاش استفاده می شود. در این پژوهش از محیط شبیه سازی Matlab برای حل عددی و روش تبدیل معادله دیفرانسیل غیر خطی به معادله ای جزء به جزء خطی برای حل تحلیلی، استفاده شده است. ابتدا عامل غیر خطی کننده معادله حرکت، تابع اصطکاک، را به چند معادله خطی تبدیل می کنیم. به این منظور ناحیه مثبت منحنی درجه ۳ شکل (۲) را با ۱، ۲ و ... خط تقریب می زنیم. بنابراین تابع اصطکاک (۸) در ناحیه مثبت به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \mu^+(v_r) &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\ \mu_1 &= \mu_{01} + k_{11}[v_r - v_{r01}] \quad \text{for} \quad v_{r01} \leq v_r \leq v_{r02} \\ \mu_2 &= \mu_{02} + k_{12}[v_r - v_{r02}] \quad \text{for} \quad v_{r02} < v_r \leq v_{r03} \\ &\vdots \\ \mu_n &= \mu_{0n} + k_{1n}[v_r - v_{r0n}] \quad \text{for} \quad v_{r0n} < v_r \end{aligned} \quad (9)$$

در آن $\mu^+(v_r)$ معادله کلی اصطکاک در ناحیه مثبت محور، n معرف تعداد خط تقریب در نظر گرفته شده، μ_n معادله خط n ام در محدوده مشخص و k_{1n} ، μ_{0n} و v_{r0n} به ترتیب، شیب، عرض از مبدأ و طول از مبدأ نقطه آغازی خط n ام می باشند، شکل (۳) نمونه ای از تقریب ۲ و ۵ خطی برای سیستمی با پارامترهای $\mu_s = 0.4$ ، $\mu_m = 0.25$ ، $v_m = 0.5$ را نمایش می دهد.

لازم به ذکر است که خط ها به ترتیب از مبدأ محور مختصات شماره گذاری می شود. بنابراین برای خط اول داریم:

$$\mu_{01} = \mu_s, \quad v_{r01} = 0, \quad k_{11} = \frac{\mu_{02} - \mu_s}{v_{r02}} \quad (10)$$

اگر معادله (۹) را بگونه ای بنویسیم که برای سرعت نسبی منفی نیز صدق کند، داریم:

$$\begin{aligned} \mu(v_r) &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\ \mu_1 &= \mu_{01} \operatorname{sgn}(v_r) + k_{11}[v_r - v_{r01} \operatorname{sgn}(v_r)] & \text{for } |v_r| \leq v_{r02} \\ \mu_2 &= \mu_{02} \operatorname{sgn}(v_r) + k_{12}[v_r - v_{r02} \operatorname{sgn}(v_r)] & \text{for } v_{r02} < |v_r| \leq v_{r03} \\ &\vdots \\ \mu_n &= \mu_{0n} \operatorname{sgn}(v_r) + k_{1n}[v_r - v_{r0n} \operatorname{sgn}(v_r)] & \text{for } v_{r0n} < |v_r| \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن:

$$\operatorname{sgn}(v_r) = \begin{cases} 1 & \text{if } v_r > 0 \\ 0 & \text{if } v_r = 0 \\ -1 & \text{if } v_r < 0 \end{cases} \quad (12)$$

با توجه به شکل (۳) و معادلات (۱۱) و (۱۲) مشاهده می شود که تابع اصطکاک به مجموع تعدادی معادله خط تبدیل شده است و می توان از آن در تحلیل خطی معادله حرکت استفاده کرد. در ادامه، تحلیل معادلات (۵) و (۶) در دو حالت ارتعاشات لغزش خالص که همیشه سرعت جسم کمتر از سرعت تسمه است و ارتعاشات چسبندگی- لغزش که سرعت جسم برابر یا کمتر از تسمه است و جسم به طور متناوب به تسمه می چسبد، ارائه می گردد.

۳-۱- ارتعاشات لغزش خالص

بنظر می رسد که سرعت جرم هرگز از تسمه بیشتر نمی شود، چون انرژی ذخیره شده در فنر از نوسان قبلی و انرژی جنبشی ناشی از تسمه نمی تواند شتابی به جرم دهد که بتواند از سرعت تسمه بیشتر شود. اگر

شروع سیستم از موقعیتی با $\dot{x} > v_b$ باشد، میرایی ویسکوز و اصطکاک خشک انرژی را کاهش می دهند تا حالت پایدار $\dot{x} \leq v_b$ بدست آید. این توضیح همیشه درست نیست، چون شیب منفی اصطکاک، مانند میرایی منفی عمل می کند و باعث افزایش انرژی جرم طی مرحله لغزش می شود، بنابراین می تواند برای مدت زمان کوتاهی جرم بر سرعت تسمه غلبه کند. اما با تغییر جهت سرعت نسبی، نیروی اصطکاک سرعت جرم را کاهش می دهد تا زمانی که جرم به تسمه بچسبند.

در حالت ارتعاشات لغزش خالص با فرض نبودن هیستریزیس در سیستم، همیشه سرعت جسم کمتر از تسمه است، در نتیجه معادله هر خط اصطکاک خواهد شد:

$$\mu_n = -\mu_{0n} + k_{1n}[v_r + v_{r0n}] \quad \text{for} \quad -v_{r0(n-1)} > v_r > -v_{r0n} \quad (13)$$

از معادله (۵) و (۱۳) نتیجه می شود،

$$\ddot{x}_n + k_{2n}\dot{x}_n + x_n = k_{3n} \quad (14)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} k_{2n} &= 2\beta + \gamma^2 k_{1n} \\ k_{3n} &= \gamma^2 [\mu_{0n} + k_{1n}(v_b - v_{r0n})] \end{aligned} \quad (15)$$

و x_n ، \dot{x}_n و \ddot{x}_n به ترتیب جابجایی، سرعت و شتاب جرم در محدوده هر خط می باشد که با بدست آوردن آنها برای هر خط می توان جابجایی، سرعت و شتاب کلی سیستم را مطابق زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \dot{x} &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dots + \dot{x}_n \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \dots + \ddot{x}_n \end{aligned} \quad (16)$$

بنابراین معادله (۵) به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل خطی تبدیل می شود که برای هر معادله، پاسخی دقیق وجود دارد. در ادامه تحلیل معادله حرکت با تقریب نمودار اصطکاک به کمک ۲ خط ارائه می شود. با تقریب ۲ خط، برای خط اول با فرض شرایط اولیه $x_1(t_1) = \alpha_{11}$ و $\dot{x}_1(t_1) = \alpha_{21}$ پاسخ معادله دیفرانسیل (۱۴) به صورت زیر می باشد،

$$x_1 = e^{-\frac{k_{21}t}{2}} [A_1 \cos(k_{41}t) + B_1 \sin(k_{41}t)] + k_{31} \quad , \quad t \in [t_1, t_2] \quad (17)$$

$$\dot{x}_1 = e^{-\frac{k_{21}t}{2}} [C_1 \cos(k_{41}t) + D_1 \sin(k_{41}t)] \quad , \quad t \in [t_1, t_2] \quad \& \quad |\dot{x}_1 - v_b| \in [0, v_m] \quad (18)$$

که در آن:

$$A_1 = \frac{-e^{-\frac{k_{21}t_1}{2}}}{k_{41}} \left\{ \left[(\alpha_{11} - k_{31}) \frac{k_{21}}{2} + \alpha_{21} \right] \sin(k_{41}t_1) - k_{41} (\alpha_{11} - k_{31}) \cos(k_{41}t_1) \right\} \quad (19)$$

$$B_1 = \frac{e^{-\frac{k_{21}t_1}{2}}}{k_{41}} \left\{ \left[(\alpha_{11} - k_{31}) \frac{k_{21}}{2} + \alpha_{21} \right] \cos(k_{41}t_1) - k_{41} (\alpha_{11} - k_{31}) \sin(k_{41}t_1) \right\} \quad (20)$$

$$k_{41} = \sqrt{1 - \frac{k_{21}^2}{4}} \quad , \quad C_1 = -\frac{k_{21}}{2} A_1 + B_1 k_{41} \quad , \quad D_1 = -\frac{k_{21}}{2} B_1 - A_1 k_{41} \quad (21)$$

زمانی که سرعت نسبی جرم از محدوده خط اول وارد محدوده خط دوم می شود، t_2 از پاسخ معادله $\dot{x}_1 = v_b - v_m$ بدست می آید، بنابراین شرایط اولیه معادله دیفرانسیل خط دوم، $x_2(t_2) = \alpha_{12} = x_1(t_2)$ و $\dot{x}_2(t_2) = \alpha_{22} = \dot{x}_1(t_2) = v_b - v_m$ خواهد شد و پاسخ آن به صورت زیر می باشد:

$$x_2 = e^{-\frac{k_{22}t}{2}} [A_2 \cos(k_{42}t) + B_2 \sin(k_{42}t)] + k_{32} \quad , \quad t \in [t_2, t_3] \quad (22)$$

$$\dot{x}_2 = e^{-\frac{k_{22}t}{2}} [C_2 \cos(k_{42}t) + D_2 \sin(k_{42}t)] \quad , \quad t \in [t_2, t_3] \quad \& \quad |\dot{x}_2 - v_b| \geq v_m \quad (23)$$

که در آن:

$$A_2 = \frac{-e^{-\frac{k_{22}t_2}{2}}}{k_{42}} \left\{ \left[(\alpha_{12} - k_{32}) \frac{k_{22}}{2} + \alpha_{22} \right] \sin(k_{42}t_2) - k_{42} (\alpha_{12} - k_{32}) \cos(k_{42}t_2) \right\} \quad (24)$$

$$B_2 = \frac{e^{-\frac{k_{22}t_2}{2}}}{k_{42}} \left\{ \left[(\alpha_{12} - k_{32}) \frac{k_{22}}{2} + \alpha_{22} \right] \cos(k_{42}t_2) - k_{42} (\alpha_{12} - k_{32}) \sin(k_{42}t_2) \right\} \quad (25)$$

$$k_{42} = \sqrt{1 - \frac{k_{22}^2}{4}} \quad , \quad C_2 = -\frac{k_{22}}{2} A_2 + B_2 k_{42} \quad , \quad D_2 = -\frac{k_{22}}{2} B_2 - A_2 k_{42} \quad (26)$$

t_3 نیز مانند معادله قبل از پاسخ معادله $\dot{x}_2 = v_b - v_m$ بدست آورده می شود. این مراحل برای هر سیکل دوباره تکرار می شود، در نتیجه پاسخ کلی سیستم را می توان بصورت زیر نوشت:

$$x(t) = x_1(t_1:t_2) + x_2(t_2:t_3) + \dots \quad (27)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t_1:t_2) + \dot{x}_2(t_2:t_3) + \dots \quad (28)$$

برای بدست آوردن دامنه هر سیکل می توان از شرط $\dot{x}_1 = 0$ استفاده نمود، در نتیجه زمان حداکثر و حداقل جابجایی بصورت زیر می باشد:

$$t_{d\min} = \frac{\arctan\left(\frac{C_1}{D_1}\right)}{k_{41}}, \quad t_{d\max} = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{C_1}{D_1}\right)}{k_{41}} \quad (29)$$

و حداکثر دامنه، در ارتعاشات لغزش خالص مطابق زیر خواهد بود:

$$a_1 = \frac{1}{2} [x_1(t_{d\max}) - x_1(t_{d\min})] \quad (30)$$

۳-۲- ارتعاشات چسبندگی - لغزش

در این حالت $\dot{x} \leq v_b$ و جرم در بخشی از پریود نوسان به تسمه می چسبد. این حالت را نمی توان مانند بخش قبل تحلیل نمود، چون هنگام انتقال از لغزش به چسبندگی، درجه آزادی سیستم از یک به صفر تقلیل می یابد. در طی مرحله چسبندگی، حرکت جرم، ساده و بدون شتاب ($\dot{x} = vt$) در نظر گرفته می شود که فاقد درجه آزادی است. یک روش ساده حل، اینگونه است که مرحله لغزش و مرحله چسبندگی را جداگانه تحلیل نموده و جواب های حاصل را بهم متصل کرد.

شکل (۴) یک سیکل از این ارتعاش را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود در این حالت، ۲ مرحله وجود دارد، یکی وقتی جسم بطور متناوب به تسمه می چسبد ($\dot{x} = v_b$) و مرحله دیگر هنگامیکه جسم روی تسمه می لغزد که همیشه $\dot{x} < v_b$ می باشد. حداکثر دامنه چسبندگی ($\max(x_{st})$) از معادله (۶) بدست می آید، در نتیجه:

$$\max(x_{st}) = \gamma^2 \mu_s - 2\beta v_b \quad (31)$$

مرحله لغزش بعد از مرحله چسبندگی شروع می شود که حرکت طی آن از معادله (۵) بدست می آید. همانطور که ملاحظه می شود معادله (۵)، معادله ای غیر خطی است، بنابراین مطابق کار صورت گرفته بخش های پیشین، تحلیل بر اساس روش خطی سازی و با بهره گیری از معادله (۱۴) انجام می شود. از $\dot{x} = v_b$ در زمان $t = t_1$ ، به عنوان شرط اولیه معادله دیفرانسیل حرکت برای مرحله لغزش در هر سیکل استفاده می شود، بنابراین:

$$x_1(t_1) = \alpha_{11} = \max(x_{st}) \quad \text{و} \quad \dot{x}_1(t_1) = \alpha_{21} = v_b \quad (32)$$

t_2 و t_3 زمان پایان یافتن حرکت جرم در محدوده خط اول و دوم، از پاسخ معادله $\dot{x}_1 = v_b - v_m$ و $\dot{x}_2 = v_b - v_m$ بدست آورده می شود. ادامه تحلیل مرحله لغزش مانند بخش قبلی می باشد و پاسخ مکانی جرم در مرحله لغزش، x_{sl} ، عبارت است از:

$$x_{sl}(t) = x_1(t_1:t_2) + x_2(t_2:t_3) + \dots + x_1(t_{n-1}:t_n) \quad (33)$$

$$\dot{x}_{sl}(t) = \dot{x}_1(t_1:t_2) + \dot{x}_2(t_2:t_3) + \dots + \dot{x}_1(t_{n-1}:t_n) \quad (34)$$

t_n زمانی است که مرحله لغزش تمام و چسبندگی شروع می شود و این وقتی اتفاق می افتد که جرم توسط فنر و اصطکاک، شتابی به جلو پیدا می کند و سرعت جرم با تسمه یکسان می شود. بنابراین t_n از اولین جواب معادله زیر بدست می آید:

$$\dot{x}_{sl} = v_b \quad (35)$$

برای معادله جابجایی طی مرحله چسبندگی داریم،

$$x_{st}(t) = v_b t \quad t \in [t_n, t_n + t_s] \quad (36)$$

$$\dot{x}_{st}(t) = v_b \quad t \in [t_n, t_n + t_s] \quad (37)$$

مقدار زمانی که مرحله چسبندگی طول می کشد، t_s ، مطابق شکل (۴) برابر است با:

$$t_s = \frac{x_{sl}(t_1) - x_{sl}(t_n)}{v_b} \quad (38)$$

بنابراین پاسخ کلی سیستم در حالت ارتعاش چسبندگی-لغزش خواهد شد:

$$x(t) = x_{sl}(t_1:t_n) + x_{st}(t_n:t_n + t_s) \quad (39)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{sl}(t_1:t_n) + \dot{x}_{st}(t_n:t_n + t_s) \quad (40)$$

جابجایی حداقل و حداکثر جرم، طی مرحله لغزش و خط اول رخ می دهد. با استفاده از معادله $\dot{x}_1 = 0$ برای بدست آوردن حداقل و حداکثر زمان جابجایی در هر سیکل داریم:

$$t_{d\max} = \frac{\arctan\left(\frac{C_1}{D_1}\right)}{k_{41}}, \quad t_{d\min} = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{C_1}{D_1}\right)}{k_{41}} \quad (41)$$

و حداکثر دامنه ارتعاشات چسبندگی - لغزش a_0 خواهد شد،

$$a_0 = \frac{1}{2} [x_1(t_{d\max}) - x_1(t_{d\min})] \quad (42)$$

برای تقریب با خط های بیشتر نیز به همین صورت می توان روابط لازم را استخراج نمود. در این مقاله، برای تقریب با ۵ خط نیز استخراج شده است و در نرم افزار Matlab با بقیه پاسخ ها مقایسه صورت گرفته است.

۴ - مطالعه موردی و بحث

سیستمی با شرایط اولیه و پارامترهای ثابت جدول (۱) در نظر گرفته و نسبت به سرعت های مختلف تحریک تسمه منحنی های لازم بدست آورده می شود. شکل (۳) تغییر ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی بر اساس مقادیر ارائه شده در جدول (۱) را نمایش می دهد، که برای تحلیل، این منحنی با ۲ و ۵ خط تقریب زده شده است. با استفاده از این تقریب ها و روابط بدست آمده در بخش قبل، نمودار های شکل (۵) حاصل شده است.

شکل (۵) نمودارهای جابجایی - زمان، سرعت - زمان و صفحه مرحله^۱ برای یک سیکل ارتعاشات پایدار چسبندگی - لغزش سیستم را نمایش می دهد که تخمین تحلیلی برای جابجایی و سرعت، $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ ، از روابط (۲۷) و (۲۸) برای ارتعاشات لغزش خالص و روابط (۳۹) و (۴۰) برای ارتعاشات چسبندگی - لغزش استفاده شده است. هر ستون از شکل ها پاسخ برای یک سرعت تحریک تسمه v_b را نمایش می دهد و بقیه پارامترها یکسان می باشد.

سرعت تحریک تسمه از مقدار صفر هر چقدر بیشتر میشود دامنه نوسان چسبندگی - لغزش افزایش می یابد، ولی از سهم مرحله چسبندگی نسبت به مرحله لغزش در دامنه ارتعاش کاهش می یابد، همانطور که در ستون دوم شکل (۵) دیده می شود با افزایش سرعت تحریک دامنه ارتعاش چسبندگی - لغزش نسبت به ستون اول شکل (۵) تقریباً ۲ برابر شده و سهم مرحله چسبندگی نیز به همان نسبت کاهش یافته است. مرحله چسبندگی با افزایش سرعت کاهش می یابد و زمانیکه صفر شود، ارتعاشات چسبندگی - لغزش به ارتعاشات لغزش خالص تبدیل می شود که در ستون سوم شکل (۵) یک نمونه از این ارتعاشات دیده می شود. برای بدست آوردن سرعتی که ارتعاشات لغزش خالص شروع می شود (v_{b0}) از معادله (۳۴) و شرط اینکه معادله $\dot{x}_{sl} = v_b$ دارای جواب نباشد استفاده شده که در این صورت $v_{b0} = 0.396$ خواهد شد. همانطور که در شکل (۶) برای سرعت تحریک $v_b = 0.5$ مشاهده می شود با افزایش بیشتر سرعت تحریک

¹ Phase plane

دامنه ارتعاشات کاهش می یابد و از یک سرعتی بیشتر دیگر هیچگونه ارتعاشی در سیستم نداریم و نوسانات سیستم میرا میشود.

شکل (۷) حداکثر دامنه نوسان a_0 و a_1 (بترتیب برای حالت چسبندگی- لغزش و لغزش خالص) بر اساس روابط (۴۲) و (۳۰) نسبت به سرعت های مختلف تسمه در دو حالت تقریب ۲ و ۵ خطی را نمایش می دهد. در این شکل، نتایج حاصل از این پژوهش و تحلیل عددی شبیه سازی، مقایسه شده اند. با توجه به شکل، هر چقدر تعداد خط های تقریب بیشتر می شود نتیجه دقیقتر می شود، بطوریکه در حالت ۵ خطی تفاوت ناچیزی بین حل عددی و تحلیلی وجود دارد که دقت بالای این روش را می رساند. در این شکل ۳ ناحیه از هم جدا شده اند، ناحیه اول، ارتعاشات چسبندگی-لغزش که با افزایش سرعت تحریک حداکثر دامنه نیز افزایش می یابد، دامنه در سرعت $v_{b0} = 0.396$ به حداکثر خودش می رسد. بعد از این سرعت یعنی در ناحیه دوم، ارتعاشات لغزش خالص است که با افزایش سرعت، حداکثر دامنه ارتعاش کاهش می یابد و تقریباً بعد از سرعت $v_{b1} = 0.45$ که ناحیه سوم شروع می شود ارتعاشی در سیستم نداریم. در ناحیه سوم که بیانگر سرخوردن پایدار است، جسم در جای خود ساکن می شود و تسمه در زیر آن با سرعت ثابت حرکت می کند.

Thomsen[16] به کمک تبدیل ون- در- پل^۱ معادله دیفرانسیل حرکت را با فرض اینکه تفاضل ضریب اصطکاک ایستایی و حداقل ضریب اصطکاک جنبشی $(\mu_s - \mu_m)$ ، مقداری کم باشد و به فرم استاندارد تبدیل نمود، سپس با روش میانگین گیری^۲ دامنه ارتعاشات را بدست آورد. Thomsen و همکارش Fidlin[17] برای ارتعاشات لغزش خالص از همان روش میانگین گیری استفاده کردند و برای ارتعاشات چسبندگی- لغزش، مرحله لغزش و چسبندگی را بطور جداگانه تحلیل نمودند و جابجایی در مرحله لغزش را به روش اغتشاش و در مرحله چسبندگی به صورت خطی نسبت به زمان بدست آوردند.

در شکل (۸) نتایج حاصل از تقریب ۵ خطی با نتایج بدست آمده توسط Thomsen[16]، Thomsen و Fidlin[17] و حل عددی شبیه سازی، مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می شود در $\mu_s - \mu_m = 0.15$ تحلیل به روش خطی سازی در ناحیه چسبندگی-لغزش از مرجع [16] دقیقتر و تقریباً با مرجع [17] برابر می باشد.

شکل (۹)، مقایسه بین نتایج تحلیل با تقریب ۵ خط و تحلیل مرجع [17] نسبت به حل عددی را نشان می دهد، در این شکل مقدار تفاضل μ_s و μ_m ، $0/3$ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل می توان نتیجه گرفت که با افزایش تفاضل ضرایب اصطکاک μ_s و μ_m ، برخلاف اینکه میزان دقت تحلیل ارائه شده توسط Thomsen و Fidlin[17] به شدت کاهش می یابد، دقت روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله تغییر نمی کند و می توان گفت که این روش به تغییر ضرایب اصطکاک وابسته نیست.

۵- نتایج

¹Van-Der-Pol transformation

²Averaging method

در این مقاله به منظور دستیابی به یک حل دقیقتر برای یافتن دامنه ارتعاشات چسبندگی - لغزش در یک سیستم، از روش های خطی سازی بهره گرفته شد و مدل غیر خطی سیستم با مدلی خطی تقریب زده شد. در بررسی ارتعاشات این سیستم چسبندگی - لغزش، سرعت های مختلفی برای تسمه در نظر گرفته شد که با توجه به شکل (۷)، می توان ۳ محدوده کلی را برای سیستم در نظر گرفت:

۱- محدوده ارتعاشات چسبندگی - لغزش که سرعت تسمه $v_b \leq v_{b0}$ می باشد و جسم بطور متناوب به تسمه می چسبد، در این محدوده با افزایش سرعت، دامنه این ارتعاشات افزایش می یابد ولی از سهم مرحله چسبندگی نسبت به مرحله لغزش در دامنه ارتعاش کاسته می شود. ۲- ناحیه ارتعاشات لغزش خالص که در آن، سرعت تسمه در محدوده $v_{b0} < v_b \leq v_{b1}$ قرار دارد، با افزایش سرعت در این منطقه از دامنه ارتعاش کاسته می شود و در دامنه فقط مرحله لغزش وجود دارد. ۳- اگر سرعت تسمه $v_b > v_{b1}$ باشد نوسانات سیستم دمپ می شود، جرم در نقطه ای ساکن و تسمه با سرعت ثابت از زیر آن می گذرد، از سرعت v_{b1} به بعد را محدوده سرخوردن پایدار می نامند.

همانطور که در شکل (۷)، مقایسه بین روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله و حل عددی شبیه سازی شده در نرم افزار Matlab نشان داده شد، با افزایش تعداد خط تقریبی، دقت این روش افزایش می یابد و در حالت تقریب با ۵ خط نتایج از تطابق خوبی برخوردار است. در ادامه، نمودار حاصل از تحلیل خطی ارتعاشات چسبندگی - لغزش با تقریب ۵ خط با نمودارهای بدست آمده توسط سایر محققین، [16] و [17]، مقایسه گردید. نتایج نشان می داد که در $\mu_s - \mu_m = 0.15$ تحلیل به روش خطی سازی در ناحیه چسبندگی - لغزش از مرجع [16] دقیقتر و تقریباً با مرجع [17] برابر می باشد (شکل (۸)). کار صورت گرفته در این مقاله نسبت به کار Thomsen و همکارش [17]، از این مزیت برخوردار بود که دقت روش خطی سازی ارائه شده به تغییرات تفاضل $\mu_s - \mu_m$ وابسته نیست، در حالیکه در کار صورت گرفته توسط سایر محققین، [16] و [17]، با افزایش تفاضل $\mu_s - \mu_m$ ، دقت به شدت کاهش می یابد (شکل (۹)).

همانطور که بررسی شد، این روش حتی با تقریب تعداد ۵ خط که تعداد کمی است، بر خلاف سایر روش های تحلیلی که دارای پیچیدگی بیشتری هستند، از دقت بالاتری برخوردار می باشد و می توان از آن در کنترل دقیقتر سیستم های دینامیکی استفاده کرد.

مراجع

- [1] Sextro, W., "Dynamical Contact Problems with Friction", Springer, London, (2006).
- [2] Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., "Nonlinear Oscillations", Wiley, New York, (1979).
- [3] Amontons, S., "De La Résistance Causée Dans Les Machines", J. Mem. Acad. Roy. Sci., Vol. A, pp. 206-226, (1699).
- [4] Coulomb, C.A., "Théorie Des Machines Simples", J. Mém. Math. Phys. Acad. Sci., Vol. 10, pp. 161-331, (1785).
- [5] Panovko, Y.G., and Gubanov, I.I., "Stability and Oscillations of Elastic Systems; Paradoxes, Fallacies and New Concepts", Consultants Bureau, New York, (1965).

- [6] Feeny, B., Guran, A., Hinrichs, N., and Popp, K., "A Historical Review on Dry Friction and Stick-slip Phenomena", ASME Appl. Mech. Rev., Vol. 51(5), pp. 321-341, (1998).
- [7] Oden, J.T., and Martins, J.A.C., "Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 52, pp. 527-634, (1985).
- [8] Hartog, J.P., "Forced Vibrations with Combined Coulomb and Viscous Damping", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 107-115, (1931).
- [9] Tondl, A., "*Quenching of Self-Excited Vibrations*", Elsevier, Amsterdam, (1991).
- [10] Mitropolskii, Y.A., and Nguyen, V.D., "*Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations*", Kluwer, Dordrecht, (1997).
- [11] Sakamoto, T., "Normal Displacement and Dynamic Friction Characteristics in a Stick-slip Process", J. Tribology International, Vol. 20, pp. 25-31, (1987).
- [12] Elmer, F.J., "Nonlinear Dynamics of Dry Friction", J. Phys. A: Math. General, Vol. 30, pp. 6057-6063, (1997).
- [13] Brockley, C.A., Cameron, R., and Potter, A.F., "Friction Induced Vibration", J. Lubrication Technology, Vol. 89, pp. 101-108, (1967).
- [14] Block, H., "Fundamental Aspects of Boundary Friction", J. Society of Auto-motive Engineers, Vol. 46, pp. 275, (1940).
- [15] Gao, C., Kuhlmann-Wilsdorf, D. D., and Mekel, D., "The Dynamic Analysis of Stick-slip Motion", J. Wear, Vol. 173, pp. 1-12, (1994).
- [16] Thomsen, J.J., "Using Fast Vibrations to Quench Friction-induced Oscillations", J. Sound Vibration, Vol. 228(5), pp. 1079-1102, (1999).
- [17] Thomsen, J.J., and Fidlin, A., "Analytical Approximations for Stick-slip Vibration Amplitudes", J. Non-Linear Mechanics, Vol. 38, pp. 389-403, (2003).
- [18] Hunt, J.B., Torbe, I., and Spencer, G.C., "The Phase-plane Analysis of Sliding Motion", J. Wear, Vol. 8, pp. 455-465, (1965).
- [19] Bilkay, O., and Anlagan, O., "Computer Simulation of Stick-slip Motion in Machine Tool Slide Ways", J. Tribology International, Vol. 37, pp. 347-351, (2004).
- [20] Popp, K., "Some Model Problems Showing Stick-slip Motion and Chaos, Friction-induced Vibration, Chatter, Squeal, and Chaos", J. ASME Design Engineering Division, New York, Vol. 49, pp. 1-12, (1992).

فهرست نمادهای انگلیسی

M : جرم جسم

L : مشخصه طولی جرم

C : ضریب میرایی

K : ضریب سختی فنر

X : محور جابجایی جسم

v_b : سرعت تسمه

v_r : سرعت نسبی

t : زمان

a_0 : حداکثر دامنه در ارتعاشات چسبندگی-لغزش

a_1 : حداکثر دامنه در ارتعاشات لغزش خالص

نمادهای یونانی

μ : تابع ضریب اصطکاک

g : نیروی گرانش

γ^2 : نسبت نیروی گرانش به نیروی فنر

β : نسبت میرایی (حقیقی به بحرانی)

ω_0 : فرکانس طبیعی سیستم

μ_s : ضریب اصطکاک ایستایی

μ_m : ضریب اصطکاک حداقل

زیرنویس ها

b : تسمه

r : نسبی

n : شماره خط تقریبی

d_{min} : حداقل جابجایی

d_{max} : حداکثر جابجایی

st : چسبندگی

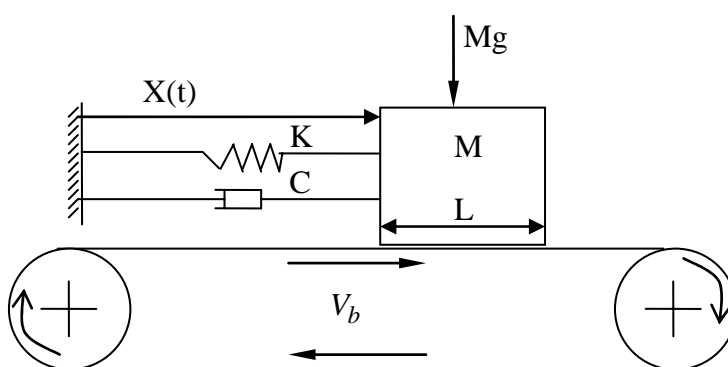
sl : لغزش

جدولها

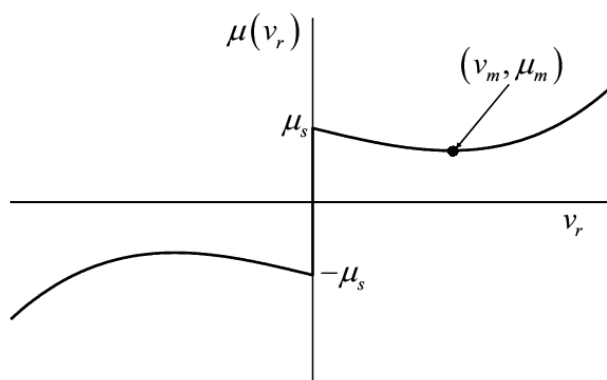
جدول ۱- مقدار پارامترهای ثابت.

متغیر	γ^2	v_m	μ_m	μ_s	t_1	α_2	α_1	β
مقدار	1	0.5	0.25	0.4	0	0	0	0.05

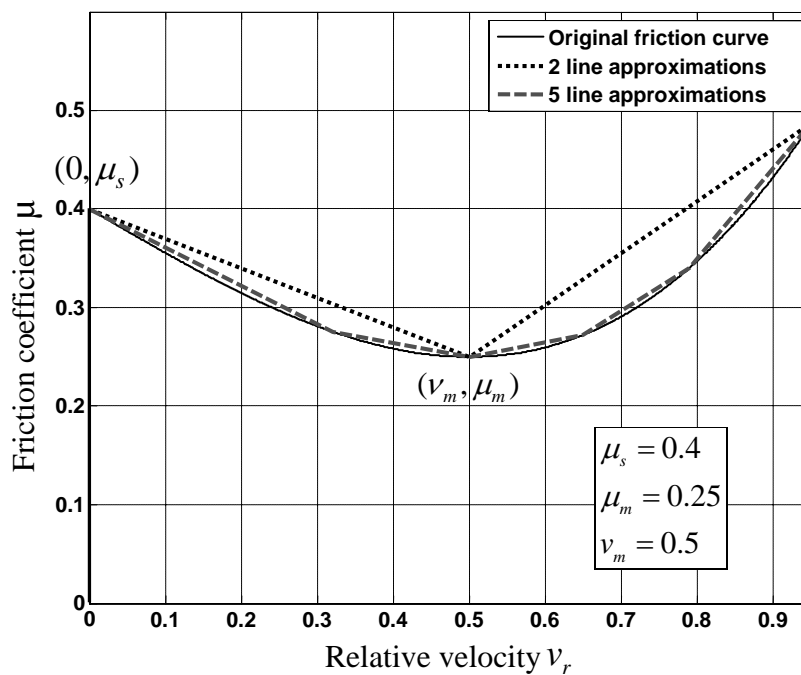
شکلها



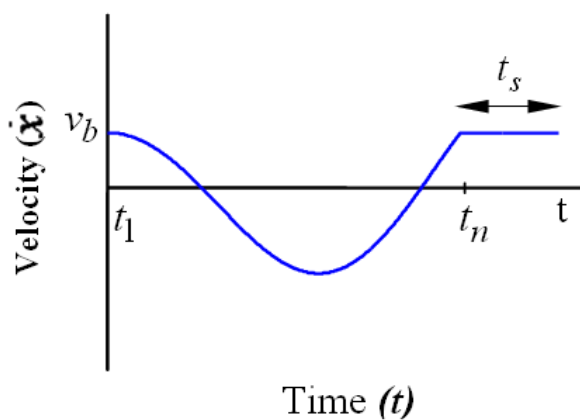
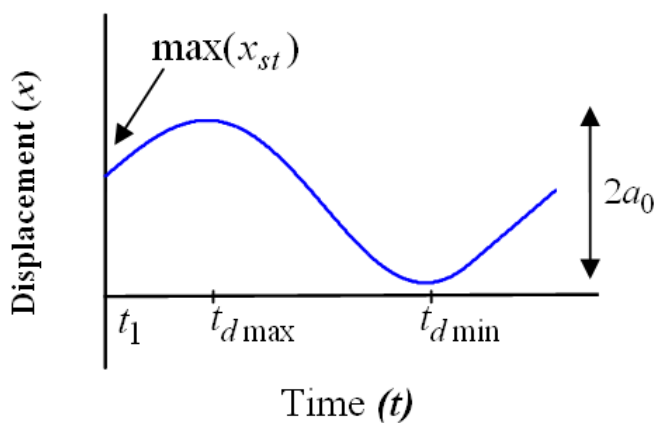
شکل ۱- مدل ارتعاشات چسبندگی-لغزش با یک درجه آزادی.



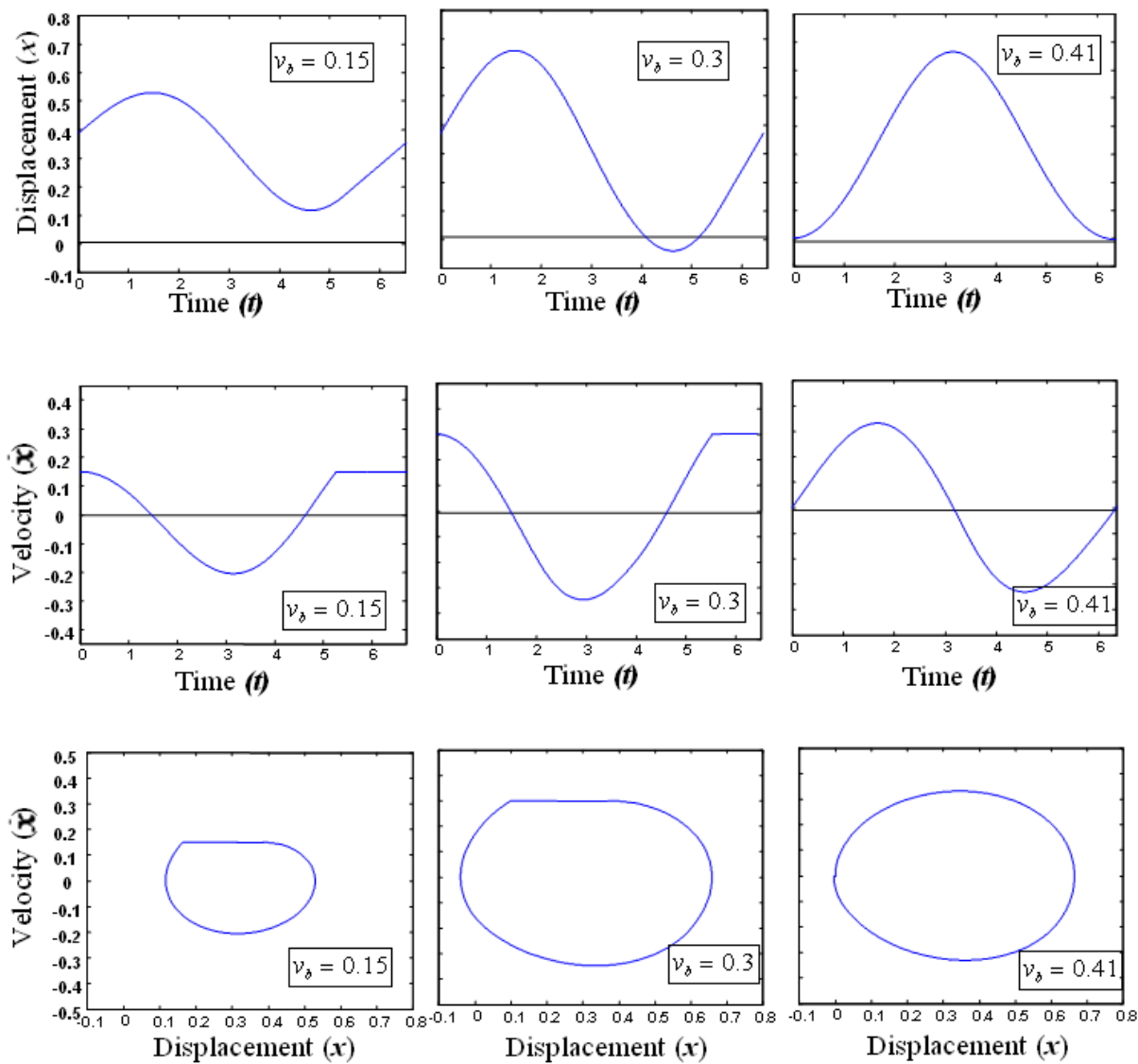
شکل ۲- تغییر ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی لغزنده [5].



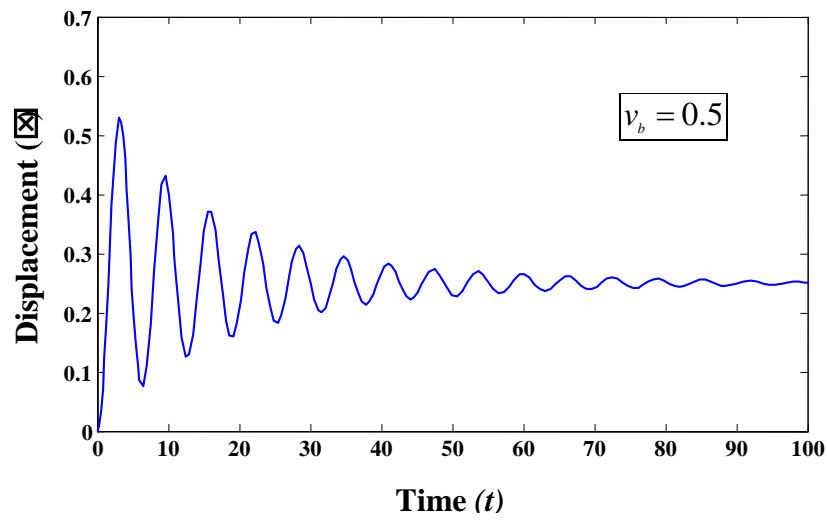
شکل ۳- تقریب منحنی ضریب اصطکاک نسبت به سرعت نسبی با ۲ و ۵ خط .



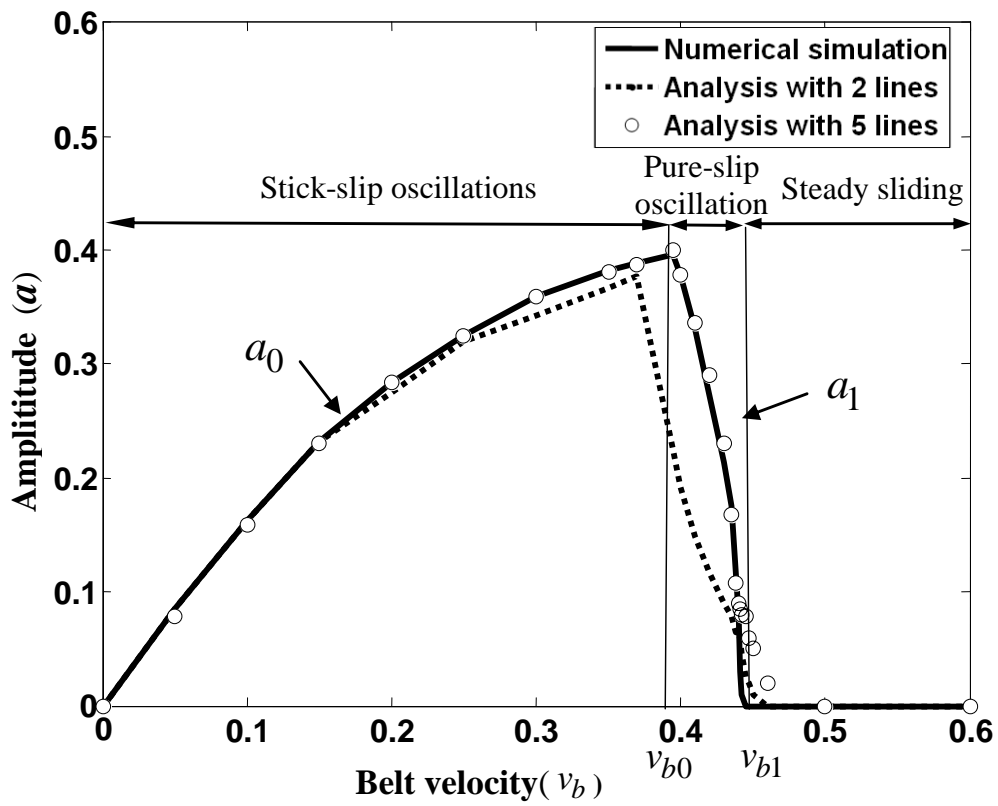
شکل ۴- جابجایی x و سرعت \dot{x} نسبت به زمان در یک سیکل از ارتعاشات چسبندگی- لغزش.



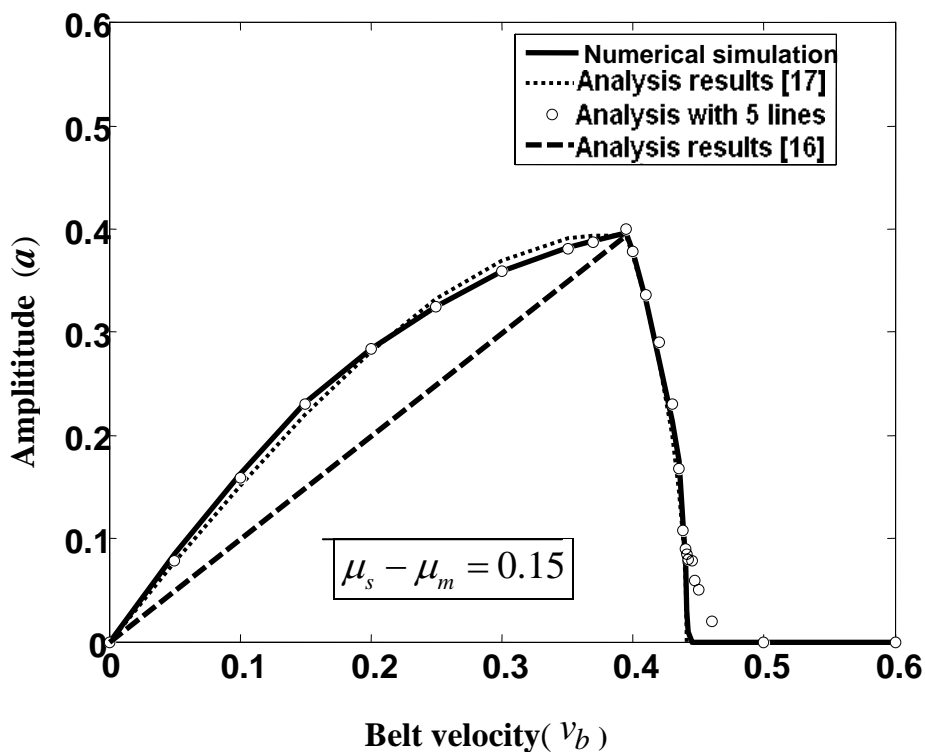
شکل ۵ - جابجایی- زمان (ردیف اول)، سرعت- زمان (ردیف وسط) و نمودار صفحه مرحله (ردیف پایین) برای یک سیکل ارتعاشات پایدار سیستم با ۳ سرعت تحریک مختلف.



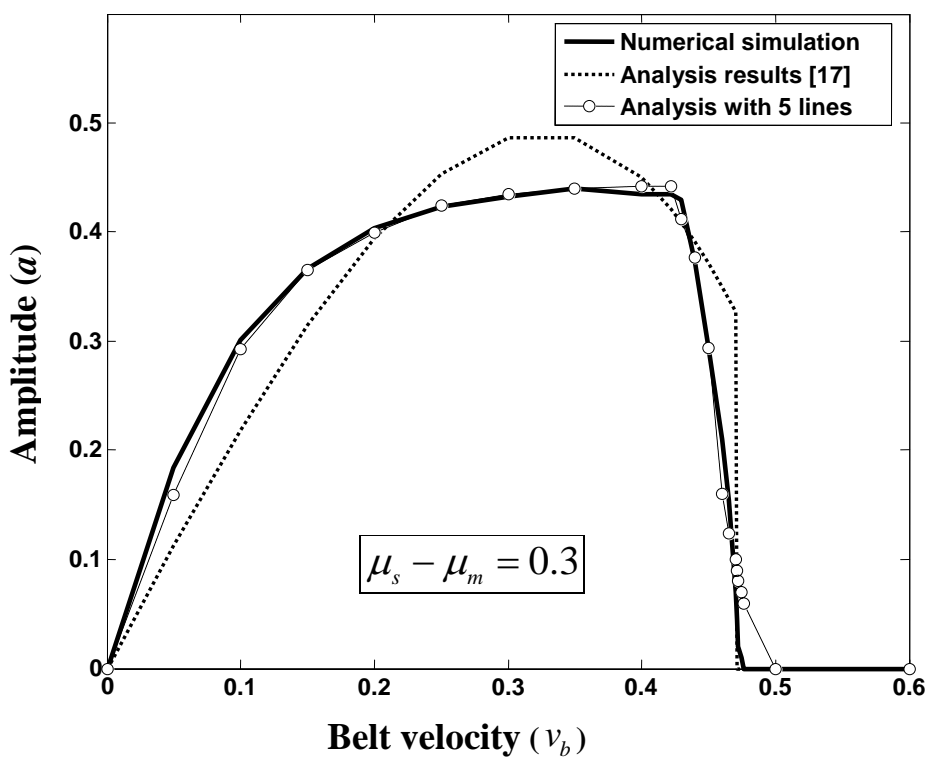
شکل ۶- پاسخ سیستم به سرعت تحریک $v_b = 0.5$.



شکل ۷- تغییر حداکثر دامنه نوسان جسم نسبت به سرعت تسمه با $\mu_s - \mu_m = 0.15$.



شکل ۸- تغییر حداکثر دامنه نوسان جسم نسبت به سرعت تسمه با $\mu_s - \mu_m = 0.15$.



شکل ۹- تغییر دامنه نوسان نسبت به سرعت تسمه با $\mu_s - \mu_m = 0.3$.

Abstract

The stick-slip vibrations are nonlinear self-excited oscillations in dynamical systems such as machine tools, which generate squeals and ruffle the surface of work piece. In this paper, a more accurate analytical approximated solution for stick-slip vibrations is presented by a linearization method. The one degree freedom model, "mass-on-moving-belt" is considered for describing friction-induced vibrations with a friction law which describes friction forces that first decreases and then increases smoothly with relative interface speed. Analytical expressions are approximated for the conditions and the amplitudes of stick-slip and also pure-slip oscillations. The results are illustrated and compared with the results which are achieved by numerical simulation of the equations of motion and also with the analytical solutions of other researchers. These comparisons demonstrate higher accuracy of this simple method than the other analytical method.