



به کارگیری روش معکوس جهت تلفیق حل عددی دوبعدی، حجم محدود و تفاضل محدود بین پره های ثابت توربین

ادریس یوسفی راد^۱

دانشجوی دکترا

محمد رضا مه پیکر^۲

دانشیار

با پیشرفت روش های شبیه سازی عددی حجم محدود و تفاضل محدود در مدلسازی جریان های مادون صوت و مافوق صوت در مسیرهای مختلف از جمله جریان های داخل پره های توربین، بکارگیری تلفیقی روش های عددی حجم محدود و تفاضل محدود می تواند ویژگی های مثبت هر دو روش را همزمان استفاده نماید. نوآوری این مقاله بهبود روش حجم محدود از طریق تلفیق آن با روش تفاضل محدود در مدلسازی دو بعدی جریان مافوق صوت بین پره های ثابت توربین می باشد. در این تحقیق همچنین با استفاده از روش معکوس لون برگ مارکوارت، سهم بهینه گره ها یا محدوده ی بین ناحیه ی حل روش های حجم محدود و تفاضل محدود نیز تعیین می شود. با توجه به اهمیت ناحیه شوک در قسمت سطح مکش پره، تمرکز روش معکوس که منجر به بهبود روش حجم محدود دنتون می شود به این ناحیه معطوف شده است. نتایج مدل تلفیقی پیشنهادی به همراه بکارگیری روش معکوس در منطقه شوک سطح مکش پره در مقایسه با نتایج تجربی، انطباق بسیار مطلوبی به همراه کاهش خطاهای عددی را در ناحیه مذکور نشان می دهد.

واژه های راهنما: حجم محدود، تفاضل محدود، روش معکوس، روش تلفیقی، پره توربین

۱- مقدمه

با توجه به اهمیت توربین ها در نیروگاه های بخاری، طراحی بهتر این تجهیزات می تواند باعث افزایش راندمان آنها شود. برای مدلسازی این جریانها معمولاً از دو روش عددی حجم محدود و تفاضل محدود استفاده می شود. که بر طبق مطالعات صورت گرفته معمولاً روش حجم محدود بلاخص برای هندسه های پیچیده بر روی سطوح و نزدیک به آن مناسب تر از روش تفاضل محدود می باشد. لذا با تلفیق این دو روش عددی می توان از مزایای هر دو روش بهره مند گردید، بعبارت دیگر از روش حجم محدود برای مدلسازی جریان قسمت نزدیک سطوح و همزمان از روش تفاضل محدود برای مدلسازی بقیه جریان دور از سطوح می توان استفاده نمود. نوآوری اول این تحقیق بهبود روش حجم محدود از طریق تلفیق دو روش عددی حجم محدود و تفاضل محدود می باشد که می تواند با بهره گیری از مزایای دو روش نتایج را بهبود نسبی بخشد. لازم به ذکر است که تاکنون روش های حجم محدود و تفاضل محدود متعددی توسط محققین ارائه شده است که در این مقاله از روش عددی حجم محدود دنتون [5,1] و روش عددی تفاضل محدود مک کورمک [2] استفاده شده است که

^۱ دانشجوی دکترا، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ نویسنده مسئول، دانشیار، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد mahpeymr@um.ac.ir

البته می‌تواند از هر روش عددی حجم محدود دیگری بمانند روش جیمسون و یا روش عددی تفاضل محدود لیپ‌فراگ استفاده گردد.

نوآوری دوم این تحقیق بکارگیری روش معکوس لون‌برگ‌مارکوارت [5&4,3] جهت بهبود حل و همچنین تعیین بهینه نواحی دو روش تلفیقی حجم محدود و تفاضل محدود در میدان حل پره‌های توربین می‌باشد که در بخش‌های بعدی تشریح می‌گردد [6].

در رابطه با بهبود روش‌های حجم محدود از جمله روش حجم محدود دنتون راه حل‌های مختلفی تاکنون پیشنهاد شده است که از جمله استفاده از کاسپ (Cusp)، فشار پایه (Base Pressure)، و همچنین بکارگیری شبکه‌های پیچیده‌تر بمانند C-mesh یا O-mesh بجای استفاده از شبکه‌های ساده یا استاندارد (H-grid Sheared) می‌باشد. در این تحقیق برنامه اصلی حجم محدود دنتون بدون هیچکدام از بهبودهای مذکور که طبیعتاً می‌توانست حجم محاسبات را افزایش دهد، استفاده شده و فقط با استفاده از روش معکوس در منطقه هدف برآوردی ($0.7 < X/X_{Chord} < 0.95$) بهبود قابل ملاحظه داشته است. لازم به ذکر است که این منطقه (بخش میانی سطح مکش پره به سمت انتهای پره) به علت وجود شوک آیرودینامیکی و در جریان دو فازی بخار وجود شوک میعان، مدلسازی جریان از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

با توجه به پیچیدگی جریان‌ها، از جمله جریان‌های دو فازی و نتیجتاً حجم بالای محاسبات، هنوز استفاده از شبکه استاندارد یا ساده در روش حجم محدود دنتون کاربری خود را دارد [7]. لذا استفاده همزمان روش تفاضل محدود بمانند روش مک کورمک در روش حجم محدود دنتون در یک شبکه محاسباتی ساده می‌تواند باعث بهبود این روش حجم محدود بلاخص با استفاده از روش معکوس گردد. این روش تلفیقی ابتکاری با استفاده از شبکه محاسباتی ساده می‌تواند علاوه بر مدلسازی جریان‌های تک فاز برای جریان‌های پیچیده دو فازی نیز بکار گرفته شود [8].

۲- معادلات حاکم بر جریان غیرلزج

معادلات اوایلر به صورت کلی زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$E = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho u h_0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ \rho v h_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

در روابط ۱ و ۲ معادله‌ی پیوستگی، مومنتوم در جهت‌های X و Y و همچنین معادله انرژی را نشان داده است. از آنجا که جریان آدیاباتیک فرض شده، در نتیجه آنتالپی سکون کل ثابت می‌ماند؛ بنابراین معادله‌ی انرژی به صورت زیر ساده می‌شود [9]:

$$h_0 = h + \frac{u^2 + v^2}{2} = cte \quad (3)$$

روش حل این معادلات در طرح دنتون و مک کورمک در ادامه توضیح داده می‌شود.

۳- الگوریتم حل جریان در روش عددی حجم محدود دنتون

در روش حجم دنتون، معادلات ۱ و ۲ در دستگاه مختصات کارتیزین به صورت زیر ساده خواهد شد، شکل (۱):

الف) بقاء جرم:

$$\Delta t \cdot \sum (\rho u dA_x + \rho v dA_y) = \Delta \nabla \cdot \Delta \rho \quad (4)$$

ب) مومنتوم در جهت X:

$$\Delta t \cdot \sum [(P + \rho u^2) dA_x + \rho u v dA_y] = \Delta \nabla \cdot \Delta (\rho u) \quad (5)$$

ج) مومنتوم در جهت Y:

$$\Delta t \cdot \sum [(P + \rho v^2) dA_y + \rho v u dA_x] = \Delta \nabla \cdot \Delta (\rho v) \quad (6)$$

که در آن‌ها u مولفه‌ی سرعت در جهت X، v مولفه‌ی سرعت در جهت Y، ρ جرم مخصوص، P فشار، $\Delta \nabla$ حجم المان، dA_x و dA_y تصاویر وجوه حجم محدود در جهت‌های X و Y بوده و Δt پله زمانی است [1].

۳-۱ الگوریتم حل جریان در روش حجم محدود استفاده شده

با توجه به شکل (۱)، تغییر در خواص جریان ϕ برای هر المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta \phi_{i,j} = [F 2_{i,j-1} + F 1_{i+1,j} - F 1_{i,j} - F 2_{i,j}] \frac{\Delta t}{\Delta V} \quad (7)$$

که در آن $\Delta \phi$ تغییر خواص سیال مثل ρ و ρu و ρv ، برای هر المان و F شار خواص جریان است که از سطوح عبور می‌کند. خواص جریان در نقاط مورد نظر، بدین طریق محاسبه می‌شود که تغییرات خواص به غیر از فشار به دست آمده برای هر المان در پایین دست عمل کند؛ بنابراین مقدار خواص ϕ در زمان $t + \Delta t$ برای یک گره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{t+\Delta t} = & (1 - SF_x)(1 - SF_y)\phi_{i,j}^t + \frac{SF_y}{2}(\phi_{i,j-1}^t + \phi_{i,j+1}^t) \\ & + \frac{SF_x}{2}(1 - SF_y)\phi_{i-1,j}^t + \frac{SF_y}{2}(\phi_{i-1,j-1}^t + \phi_{i-1,j+1}^t) \\ & + \frac{SF_x}{2}(1 - SF_y)\phi_{i+1,j}^t + \frac{SF_y}{2}(\phi_{i+1,j-1}^t + \phi_{i+1,j+1}^t) \\ & + \frac{1}{2}[(\Delta \phi)_{BCDE}^t + (\Delta \phi)_{ABEF}^t] \end{aligned} \quad (8)$$

در هر تکرار، پارامترهای جریان به ترتیب زیر به دست می‌آید:

۱- جرم مخصوص (ρ) به وسیله معادله‌ی بقاء جرم محاسبه و ضرایب هموارکننده، اصلاح می‌گردد.

- ۲- درجه حرارت و فشار هر نقطه یا گره با استفاده از معادله انرژی و معادله حالت و مقدار قبلی آنتالپی و مقدار جدید جرم مخصوص، دارای مقادیر جدید می‌شوند.
- ۳- فشار با استفاده از فاکتورهای تصحیح کننده اصلاح می‌گردد.
- ۴- ρv و ρu با استفاده از مقادیر جدید ρ و P و مقادیر قدیمی u و v از معادله مومنتوم و سپس با استفاده از ضرایب هموارکننده به دست می‌آید [10].

۴- الگوریتم حل در روش عددی تفاضل محدود مک کورمک

این روش شامل دو مرحله‌ی: پیش‌بینی کننده^۱، تصحیح کننده^۲ با تفاضل یک طرفه و دارای دقت مرتبه‌ی دو در زمان و مکان است.

در این روش، مرحله‌ی پیش‌بینی کننده‌ی اولیه، به منظور ارائه‌ی یک مقدار تخمینی در زمان $t + \Delta t$ به کار می‌رود؛ سپس مرحله‌ی تصحیح کننده با جهت تفاضلی مخالف مرحله اول، وارد عمل می‌شود. ترکیب حاصل از این دو مرحله، دقتی از مرتبه‌ی دو برای زمان و مکان به وجود می‌آورد. براساس این طرح، انفصال معادله اولی در یک شبکه‌ی مستطیلی که فواصل فضایی آن $\Delta Y, \Delta X$ باشد، به صورت زیر خواهد بود:

گام پیش‌بینی:

$$E_{i,j}^* = E_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta X} (F_{i,j}^n - F_{i,j-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta Y} (G_{i,j}^n - G_{i-1,j}^n) \quad (9)$$

گام تصحیح:

$$E_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} [E_{i,j}^n + E_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta X} (F_{i,j+1}^* - F_{i,j}^*) - \frac{\Delta t}{\Delta Y} (G_{i+1,j}^* - G_{i,j}^*)] \quad (10)$$

همان‌طور که در روابط فوق دیده می‌شود، درگام پیش‌بینی، مشتقات: $\frac{\partial F}{\partial X}$ ، $\frac{\partial G}{\partial Y}$ با تفاضل پسرو، و در گام تصحیح با تفاضل پیشرو تقریب زده شده است. روابط فوق بر اساس یک شبکه‌ی مستطیلی نوشته شده است و از آن‌جا که شکل بیشتر قلمروهای فیزیکی نامنظم است، تبدیل مختصاتی از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی ضروری است. این امر، مستلزم محاسبه‌ی متریک‌ها و ژاکوبین‌های تبدیل است که پیچیدگی و حجم محاسبات را افزایش می‌دهد. در این طرح، مقدار مشتقات: $\frac{\partial F}{\partial X}$ ، $\frac{\partial G}{\partial Y}$ در گره محاسباتی M به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_M = \frac{Y_{MP} \cdot F_{MQ} - Y_{MQ} \cdot F_{MP}}{Y_{MP} \cdot X_{MQ} - Y_{MQ} \cdot X_{MP}} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_M = \frac{X_{MP} \cdot G_{MQ} - X_{MQ} \cdot G_{MP}}{X_{MP} \cdot Y_{MQ} - X_{MQ} \cdot Y_{MP}} \quad (12)$$

¹ Predictor

² Corrector

که در آن $X_{MP} = X_P - X_M, Y_{MP} = Y_P - Y_M, \dots$ است. مطابق شکل (۲) نقاط P و Q در روابط (۱۱) و (۱۲)، گره‌های همسایه گره M می‌باشند این نکته قابل ذکر است که مقدار X_{MQ} در روابط (۱۱) و (۱۲) در شبکه‌ی مورد استفاده، صفر است. با اعمال روابط فوق، مقدار پارامتر E معادله‌ی اوپلر، هم‌چون $\rho u, \rho v$ در زمان $t + \Delta t$ به دست می‌آید. به منظور کمک در بهبود پایداری حل و حذف هرگونه حالت موجی در اثر تغییرات شدید حاصل از عواملی مانند شوک در روش مک‌کورمک، از ترم لزجت مصنوعی^۱ ترکیبی مرتبه دوم و چهارم، معرفی شده توسط جیمسون [11,2] استفاده شده است.

۴-۱- ترم اتلافی مرتبه دو

این ترم اتلافی به صورت مشتق دوم E در معادله‌ی اوپلر است که ضریب آن متناسب با مقدار مطلق مشتق دوم فشار است:

$$D_{i,j}^{(2)} = \gamma_{xi,j}^{(2)}(E_{i,j+1} - 2E_{i,j} + E_{i,j-1}) + \gamma_{yi,j}^{(2)}(E_{i+1,j} - 2E_{i,j} + E_{i-1,j}) \quad (13)$$

$$\gamma_{yi,j}^{(2)} = \text{Max}(\varepsilon_{yi,j}, \varepsilon_{yi+1,j}) \quad (14)$$

$$\gamma_{xi,j}^{(2)} = \text{Max}(\varepsilon_{xi,j}, \varepsilon_{xi,j+1})$$

$$\varepsilon_{xi,j} = K^{(2)} \frac{|P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}|}{P_{i,j+1} + 2P_{i,j} + P_{i,j-1}} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{yi,j} = K^{(2)} \frac{|P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}|}{P_{i+1,j} + 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}$$

در روابط فوق، $K^{(2)}$ یک ثابت مثبت است.

۴-۲- ترم اتلافی مرتبه چهارم

$$D_{i,j}^{(4)} = D_{xi,j}^{(4)} + D_{yi,j}^{(4)} \quad (16)$$

$$D_{xi,j}^{(4)} = -\lambda_{xi,j}^{(4)} [E_{i,j+2} + E_{i,j-2} - 4(E_{i,j+1} + E_{i,j-1}) + 6E_{i,j}] \quad (17)$$

$$D_{yi,j}^{(4)} = -\lambda_{yi,j}^{(4)} [E_{i+2,j} + E_{i-2,j} - 4(E_{i+1,j} + E_{i-1,j}) + 6E_{i,j}]$$

$$\lambda_{xi,j}^{(4)} = \text{Max}[0, (K^{(4)} - \gamma_{xi,j}^{(2)})] \quad (18)$$

$$\lambda_{yi,j}^{(4)} = \text{Max}[0, (K^{(4)} - \gamma_{yi,j}^{(2)})]$$

براساس این طرح ترکیبی، در اطراف شوک که ضریب ترم اتلافی مرتبه دوم، مقدار بالایی دارد، ترم اتلافی مرتبه چهارم غیرفعال شده؛ ولی در سایر نواحی فعال خواهند ماند. ترم‌های لزجت مصنوعی مرتبه دوم و چهارم، پس از محاسبه به صورت زیر به نتایج حاصل از گام تصحیح افزوده می‌شود:

$$E_{i,j}^{**} = E_{i,j}^{n+1} + D_{i,j}^{(2)} + D_{i,j}^{(4)} \quad (19)$$

¹ Artificial Viscosity

۴-۳- الگوریتم حل جریان در روش عددی تفاضل محدود استفاده شده

در روش مک کورمک نیز مانند هر روش زمان پیمایشی، در مرحله‌ی اول، یک حدس اولیه برای متغیرهای جریان روی هر گره محاسباتی انجام می‌شود. در کار حاضر، یک تغییر خطی فشار مابین صفحات ورودی و خروجی فرض شده و با این فرض، فشار برای هریک از نقاط محاسبه به دست آمده است. سپس با استفاده از روابط آیزنتروپیک و روابط گاز کامل، دما، چگالی و دیگر خواص در میدان جریان، محاسبه شده است. پس از تعیین مقدار اولیه‌ی خواص برای گره‌های محاسباتی، حل معادلات بقاء براساس روش بیان شده در روش مک کورمک صورت می‌پذیرد و در هر تکرار، پارامترهای جریان به ترتیب زیر به دست می‌آیند:

(۱) چگالی (ρ) به وسیله‌ی معادله‌ی بقاء جرم اصلاح می‌گردد.

(۲) با استفاده از معادلات انرژی و حالت مقادیر جدید درجه حرارت و فشار با به کار بردن مقدار جدید چگالی و مقادیر قبلی u, v در هر گره محاسبه می‌شود.

(۳) ρu و ρv با استفاده از مقادیر ρ و u, v مقدار جدید فشار از معادله‌ی مومنتم به دست می‌آیند.

(۴) مقادیر جدید u, v با استفاده از مقادیر جدید ρu و ρv به دست می‌آید.

بدین ترتیب، مراحل فوق آن قدر تکرار می‌شود تا حالت پایدار حاصل گردد [2].

توضیح اینکه در نقاط مشترک روش‌های حجم محدود و تفاضل محدود، از روش معدل گیری استفاده می‌شود.

۵- تشریح مسأله‌ی معکوس یا روش معکوس

مسأله‌ی معکوس، یافتن پارامترهای مجهول با استفاده از اطلاعات اندازه‌گیری شده از فرآیند است (پیدا کردن معلول از روی علت)؛ اما معمولاً به علت وجود خطا در مقادیر اندازه‌گیری و بدخیم بودن مسأله که در بخش‌های بعدی توضیح داده خواهد شد، نمی‌توان از حل مستقیم و دقیق مسأله برای پارامتر مجهول استفاده کرد؛ به همین لحاظ باید بتوان از رسیدن به پاسخ تعریفی مناسب ارائه کرد. در این قسمت با بررسی روش‌های مختلف تعریف مسأله، پاسخ تشریح می‌شود [12].

۵-۱- بیان ریاضی مسأله

در مسأله‌ی معکوس خطا \bar{e} ، اختلاف بین خروجی اندازه‌گیری شده‌ی فرآیند، \bar{T}^m ، و خروجی مدل در محل اندازه‌گیری، \bar{T}^c ، تعریف می‌شود:

$$\bar{e} = \bar{T}^m - \bar{T}^c \quad (20)$$

در این مسأله، بردارهای \bar{T}^m و \bar{T}^c در واقع یک عنصری‌اند؛ زیرا نتیجه‌ی حل در حالت پایدار و در یک نقطه از میدان حل، مورد توجه است و این بردارها به یک اسکالر که به ترتیب فشار اندازه‌گیری شده به صورت تجربی و فشار محاسبه شده در یک نقطه‌ی خاص هستند، تنزل می‌یابد. هدف این است که با مقایسه‌ی این فشارها نهایتاً به یک ترکیب مناسبی از سهم نواحی حل دنتون و مک کورمک در شبیه‌سازی برسیم. هرچه فاصله‌ی این دو مقدار کم‌تر باشد، سهم‌دهی مناسب‌تر انجام شده است؛ البته مقدار فشار می‌تواند به‌طور تخمینی از نتایج حل پره‌های مشابه، مشخص شود [3].

برای کمینه کردن این خطا، روش‌های مختلفی برای تعریف تابع هدف وجود دارد. یکی از روش‌های معمول، استفاده از روش مربعات خطاهاست. در مسأله‌ی معکوس هدف کمینه کردن جمع مربعات می‌باشد:

$$S(\bar{P}) = \bar{e}^T \bar{e} \quad (21)$$

جمع مربعات خطاها می‌تواند با وزن‌دهی مشخص \mathbf{W} تأثیر هر یک از خطاها را تغییر دهد [4]:

$$S(\bar{P}) = (\bar{T}^m - \bar{T}^c)^T \mathbf{W} (\bar{T}^m - \bar{T}^c) \quad (22)$$

S تابعی از متغیر \bar{P} می‌باشد. در مسأله‌ی حاضر، بردار \bar{P} برداری با ابعاد $1 \times I_{\max}$ می‌باشد که هر عنصر آن معرف سهم روش مک‌کورمک است که متعاقباً سهم دنتون نیز مشخص می‌شود. در این‌جا از وزن‌دهی استفاده نمی‌کنیم. اولین راهی که از ریاضیات پایه به ذهن می‌رسد، استفاده از مشتق در نقطه‌ی بهینه می‌باشد. با استفاده از مشتق، نقطه‌ی بهینه برای تابع S تعیین می‌شود که به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{P}} = 0 \Rightarrow \nabla S(\bar{P}) = 2 \left[-\frac{\partial \bar{T}^c}{\partial \bar{P}} \right] \mathbf{W} [\bar{T}^m - \bar{T}^c] = 0 \quad (23)$$

or

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W} (\bar{T}^m - \bar{T}^c) = 0$$

که در اینجا ماتریس حساسیت \mathbf{X} به صورت زیر تعریف می‌شود که برای مسائل معکوس با رفتار خطی، ماتریس حساسیت تابع پارامترهای مجهول نیست:

$$\mathbf{X} = \left[\frac{\partial \bar{T}(\bar{P})}{\partial \bar{P}} \right]^T \quad (24)$$

در مسائل معکوس با رفتار غیرخطی، ماتریس حساسیت به بردار \bar{P} بستگی پیدا می‌کند؛ بنابراین حل معادله (۲۳) به یک روش سعی و خطا نیاز دارد که این روش سعی و خطا با خطی‌سازی بردار پارامتر معلوم محاسبه شده با یک بسط تیلور حول \bar{P} ، به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\bar{T}^c(\bar{P}) = \bar{T}^c(\bar{P}^k) + \mathbf{X}^k (\bar{P} - \bar{P}^k) \quad (25)$$

که بالانویس k به معنی مقادیر پارامتر در گام زمانی k ام است. با جای‌گذاری معادله‌ی (۲۳) در معادله‌ی (۲۵) و بازنویسی معادله خواهیم داشت:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W} (\bar{T}^m - \bar{T}^c) = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \Delta \bar{P} \quad (26)$$

or

$$P^{k+1} = P^k + \left[(\mathbf{X}^k)^T \mathbf{X}^k \right]^{-1} (\mathbf{X}^{T^k} \mathbf{W}) [\bar{T}^m - \bar{T}^c(P^k)]$$

روش معرفی شده در معادله (۲۶)، به روش گوس معروف است. این روش در واقع یک تقریب برای روش نیوتن-رافسن است. به منظور امکان حل معادله (۲۶) بایستی ترم $(X^k)^T X^k$ تکین نباشد که به عبارت دیگر خواهیم داشت:

$$\left| (X^k)^T X^k \right| \neq 0 \quad (27)$$

مسائلی که در آن‌ها این دترمینان صفر می‌شود، به مسائل بدخیم معروف هستند و در حقیقت اکثر مسائل آنالیز معکوس از این نوع هستند.

۵-۲- روش‌های انتخاب پارامتر

یکی از مهم‌ترین روش‌ها توسط لون‌برگ ارائه شد [13]، که روش کمترین مربعات مستهلک شده نیز نامیده می‌شود. این روش براساس مبانی آماری برای مسائل کمترین مربعات ارائه شده است. در این روش، عبارت (۲۲) به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$S = (\bar{T}^m - \bar{T}^c)^T \mathbf{W} (\bar{T}^m - \bar{T}^c) + v^k (\bar{P} - \bar{P}^k)^T \Omega^k (\bar{P} - \bar{P}^k) \quad (28)$$

or

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W} (\bar{T}^m - \bar{T}^c) = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} + v^k \Omega^k) \Delta \bar{P}$$

در این عبارت Ω^k یک ماتریس قطری است که تغییرات در راستای مطلوب را کاهش می‌دهد و از انحراف، جلوگیری می‌کند و هنگامی که جملات قطری مربوطه از جملات قطری $\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X}$ بزرگتر باشد، باعث کاهش نوسانات یا ناپایداری‌ها می‌شود. لون‌برگ نشان داد که اگر ضریب تنظیم ابتدا بزرگ باشد، k به سرعت کاهش می‌یابد و در ادامه باید این ضریب کاهش پیدا کند؛ چرا که پاسخ P^k می‌تواند پاسخ درستی نباشد و عملاً گرادیان‌ها پاسخ واقعی را بیابند:

$$\Omega_m^k = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{LL} \end{bmatrix} \quad (29)$$

که در آن:

$$C_{jj} = W_{lr} X_{lj} X_{rj} \quad (30)$$

که در آن از جمع تانسوری استفاده شده است. این انتخاب، باعث می‌شود تا نتیجه‌ی روش، تحت انتقال خطی ثابت باشد. در این حالت، ضریب مناسب از عبارت زیر بدست می‌آید:

$$v^k = \frac{(\bar{T}^m - \bar{T}^c)^T \mathbf{W} \mathbf{X} \Omega_m^k \mathbf{X}^T \mathbf{W} (\bar{T}^m - \bar{T}^c)}{S^k} \quad (31)$$

روش مارکوارت مشابه روش لونبرگ است. در این روش از معادله‌ی (۳۱) همراه با رابطه‌ی زیر برای تغییر ضریب تنظیم استفاده شده است:

$$v^k = \frac{V_0}{(\alpha)^k} \quad (32)$$

که در آن V_0 یک عدد ثابت مناسب، و α عددی بزرگ‌تر از ۱ است. این روش هم‌چون روش لونبرگ، باعث ایجاد تعادل بین روش تندترین شیب کاهنده و روش گوسی می‌شود. این روش در گام‌های ابتدایی که ماتریس $X^T W X$ بدخیم است، از روش تندترین شیب کاهنده، و به هنگام نزدیک شدن به پاسخ، از روش گوسی استفاده می‌شود، که باعث می‌شود ماتریس مذکور، خوش خیم شود. عموماً این روش در متون مربوط به مسائل معکوس کاربرد بیشتری دارد.

بنابراین، روش لونبرگ مارکوارت با تغییر معادله‌ی (۲۶) به صورت زیر عمل می‌کند:

$$P^{k+1} = P^k + \left[(X^k)^T X^k + v^k \Omega^k \right]^{-1} (X^k) [T^m - T^c(P^k)] \quad (33)$$

که v^k ، یک مقدار اسکالر است و پارامتر استهلاک نیز نامیده می‌شود و Ω^k یک ماتریس قطری است که طبق رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\Omega^k = \text{diag} \left[(X^k)^T X^k \right] \quad (34)$$

معرفی $v^k \Omega^k$ به معادله‌ی تکرار، به منظور مستهلک کردن نوسانات و ناپایداری‌هایی است که به خاطر ماهیت بدخیم مسأله به وجود می‌آید. پارامتر استهلاک، معمولاً در ابتدای شبیه‌سازی که پارامتر مجهول با حدس اولیه معرفی می‌شود، بزرگ است؛ بنابراین با این کار، دیگر لازم نیست عدم تکین بودن ترم $(X^k)^T X^k$ بررسی گردد.

۳-۵- معیارهای همگرایی

$$\|\Delta \bar{P}\| < \varepsilon_1 \quad (35)$$

$$S < \varepsilon_2 \quad (36)$$

$$\left| \frac{S^{k+1} - S^k}{S^k} \right| < \varepsilon_3 \quad (37)$$

۴-۵- محاسبه‌ی ماتریس حساسیت

محاسبه‌ی ماتریس حساسیت، یکی از معضلات در مسائل معکوس غیرخطی است. مولفه سطر i و ستون j طبق تعریف برای یک مسأله‌ی فراگیر، از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$X_{ij} = \frac{\partial T_i^c}{\partial P_j} \quad (38)$$

که در این مسأله، $I = 1$ و $J = I_{\max}$ است. چون تعداد پارامترهای محاسبه و اندازه‌گیری شده در یک نقطه، مد نظر قرار گرفته است و تعداد پارامتر مجهول؛ یعنی سهم تفاضل محدود مک کورمک و متعاقباً سهم حجم محدود دنتون به تعداد نقاط شیکه‌بندی در جهت x می‌باشد. برای محاسبه‌ی این مولفه، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود [14]:

$$X_{ij} = \frac{T_i^c(P_j(1+\varepsilon)) - T_i^c(P_j)}{\varepsilon P_j} \quad (39)$$

بدین ترتیب معادله‌ای برای تصحیح \bar{P} و معیاری برای پایان حل معکوس بدست می‌آید.

۶- الگوریتم بکارگیری روش معکوس جهت تلفیق بهینه دو روش حل

در این روش، مجاور دیواره‌ها توسط روش حجم محدود و بقیه‌ی جریان، توسط روش تفاضل محدود مذکور حل می‌شود. از شبکه استاندارد 12×115 جهت حل میدان جریان استفاده شده است. برای حدس اولیه، تعداد سه گره روی سطح مکش و سه گره روی سطح فشار از روش حجم محدود دنتون و شش گره میانی از روش تفاضل محدود مک کورمک مطابق شکل (۳) در نظر گرفته شده است. جهت بهبود جواب‌ها، داده‌ی آزمایشگاهی محاسبه شده برای فشار در یک نقطه از میدان حل را به عنوان \bar{T}^m به روش حل عددی معکوس معرفی می‌شود؛ در نتیجه، بهترین سهم از فضای حل برای دو روش حجم محدود دنتون و تفاضل محدود مک کورمک توسط ماتریس حساسیت محاسبه می‌شود. همانگونه که قبلاً توضیح داده شده در صورتی که نتایج آزمایشگاهی پره‌های هم‌خانواده و یا مشابه، فشار مورد نظر را تخمین زد.

این روش به چند گام اساسی زیر تقسیم می‌شود:

(۱) حل مسأله‌ی مستقیم با تخمین موجود برای P^k (پارامتر نامعلوم) به منظور به‌دست آوردن پارامتر حل مستقیم تا زمان همگرایی،

(۲) قرار دادن P^k در رابطه‌ی (۲۱) جهت محاسبه $S(P^k)$

(۳) محاسبه‌ی ماتریس حساسیت با استفاده از رابطه‌ی (۳۹) و محاسبه‌ی ترم استهلاک Ω^k با استفاده از (۳۴) و مقدار موجود برای P^k ،

(۴) حل به کمک روش لون‌برگ مارکوارت و محاسبه‌ی مقدار تخمینی جدید P^{k+1} که به صورت زیر است:

$$P^{k+1} = P^k + \Delta P^k$$

(۵) حل مسأله‌ی مستقیم با استفاده از P^{k+1} به منظور پیدا کردن مقدار $T(P^{k+1})$ سپس محاسبه‌ی $S(P^{k+1})$

(۶) در برنامه نوشته شده جهت همگرایی از شرایط زیر استفاده شده است :

$$\text{اگر } S(P^{k+1}) \geq S(P^k) \text{، } V^k \text{ برابر شود}$$

اگر $S(P^{k+1}) < S(P^k)$ ، v^k ، $0, 1$ برابر شود

(۷) معیار همگرایی چک شود، در صورت عدم همگرایی، رفتن به مرحله ی (۳)

۷- بررسی نتایج

همانگونه که قبلا توضیح داده شده است، ایده تلفیق دو روش حجم محدود و تفاضل محدود می تواند روش حجم محدود دنتون را بهبود نسبی دهد که در مرجع [6] آورده شده است. در این تحقیق به منظور افزایش نتایج این تلفیق، روش معکوس نیز برای بهبود نتایج حجم محدود دنتون در منطقه هدف بکار گرفته شده است. ضمنا با استفاده از روش معکوس، مرز بهینه (شماره ی گره عمودی در راستای i) برای محدوده ی حل عددی حجم محدود دنتون در امتداد جریان نیز تعیین می شود.

نتایج مدل پیشنهادی نشان می دهد که محدوده حل روش عددی حجم محدود دنتون که در مجاور سطوح پره می باشد، حداکثر کمتر از چند گره با محدوده حل روش عددی تفاضل محدود در قسمت دور از سطوح جابجا می شود و کماکان در حدود دو سوم ناحیه حل جریان به روش تفاضل محدود اختصاص دارد.

نتایج حاصل از بهبود روش عددی حجم محدود دنتون (از طریق تلفیق با روش تفاضل محدود و همچنین بکارگیری روش معکوس) در شکل های (۴) تا (۹) ارائه شده است. در شکل های (۵)، (۶) و (۷) تغییرات نسبت فشار استاتیک به فشار سکون (P/P_0) در طول پره در سطوح مکش، فشار و خط مرکزی جریان نشان داده شده است. همانگونه که در شکل های مذکور مشاهده می شود در منطقه هدف ($0.7 < X/X_{Chord} < 0.95$) که ناحیه حساس و پر اهمیت شوک ها روی سطح مکش می باشد و روش معکوس هم در آن ناحیه تمرکز یافته است، نتایج تئوری انطباق مطلوبی با نتایج آزمایشگاهی در مقایسه با روش اولیه دنتون دارد. برای نواحی خارج از منطقه هدف، شامل قسمت ورودی پره، قسمت انتهایی پره و جریان دنباله، چنانچه نیاز به دقت بیشتری داشته باشد، پیشنهاد می شود که برای بهبود روش حجم محدود دنتون، از روش های ساده تر با حجم محاسبات کمتر بمانند استفاده از کاسپ یا مدل فشار پایه استفاده شود.

البته از روش معکوس برای دیگر نواحی نیز بطور همزمان در چند منطقه می تواند استفاده شود ولی حجم محاسبات بمیزان قابل توجهی افزایش می یابد. در این تحقیق هدف ابتدا تلفیق دو روش عددی حجم محدود و تفاضل محدود بوده و سپس بهبود این تلفیق از طریق اعمال روش معکوس می باشد، که نتایج مطلوبی را این طرح جدید نشان می دهد.

در شکل (۷)، تغییرات عدد ماخ در طول پره در خط مرکزی جریان رسم شده است. با توجه به اینکه شوک باعث کاهش سرعت و در نتیجه کاهش ماخ می شود، روش معکوس بهتر اثرات شوک (کاهش عدد ماخ یا افزایش موضعی فشار) را نشان می دهد.

در جریان مورد نظر که آدیاباتیک می باشد، مقدار فشار سکون تا قبل از شوک بایستی ثابت بماند. در شکل (۸) تغییرات فشار سکون نسبت به فشار سکون ابتدای پره ترسیم شده که هرچه این تغییرات کم تر باشد حل مسأله به واقعیت نزدیکتر است. از آن جا که در طرح یا مدل پیشنهادی تغییرات فشار سکون کم تر بوده و نوسانات خطای محاسباتی در کل مسیر بطور نسبی گرفته شده، لذا نتایج حاصل از این روش به واقعیت نزدیک تر می باشد.

در شرایط پایدار با توجه به اصل بقا جرم، باید میزان دبی جرمی ورودی در طول مسیر ثابت باشد. در شکل (۹) درصد تغییرات دبی جرمی نسبت به دبی جرمی ورودی برای هر دو روش ترسیم شده است. از آن-جا که تغییرات این نسبت در مدل پیشنهادی بمراتب کم‌تر از روش حجم محدود دنتون اولیه می‌باشد، می‌توان از موفقیت جدید اطمینان حاصل نمود.

۸- نتیجه‌گیری

با توجه به ویژگی‌ها و کاربری گسترده روش‌های عددی حجم‌محدود که برای هندسه‌های پیچیده بمانند جریان‌های داخل توربین‌ها بکار گرفته می‌شود، لازم است که نسبت به بهبود این روش‌ها تحقیقات لازمه صورت پذیرد. در این تحقیق بهبود روش حجم‌محدود دنتون مدنظر قرار گرفته است که با تلفیق روش تفاضل محدود مک کورمک و همچنین با بکارگیری روش معکوس در منطقه هدف، این مهم محقق شده است. البته این ایده ابتکاری یا نوآوری می‌تواند از هر روش حجم‌محدود و تفاضل‌محدود استفاده نماید و اصل ایده تلفیق دو روش و همچنین بکارگیری روش معکوس، یک مدل فراگیر می‌باشد.

مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با نتایج آزمایشگاهی و همچنین نتایج مدل استاندارد و یا نتایج حجم‌محدود دنتون اولیه، نشان از انطباق مطلوب نتایج طرح جدید بلاخص در منطقه هدف (نواحی شوک روی سطح مکش پره) می‌باشد.

برای بهبود دیگر نواحی چنانچه دقت آن کافی نباشد، توصیه می‌شود که از روش‌های با حجم محاسباتی کمتر، بجای گسترش روش معکوس به دیگر نواحی مورد نظر، استفاده شود که در بخش‌های قبلی توضیح داده شده است.

مراجع

- [1] Denton, J. D., "An Improved Time Marching Method for Turbomachinery Flow Calculations" ASME paper 82-GT-239, (1983).
- [2] MacCormack, R.W., "Numerical Solution of the Equation of Compressible Viscous Flow", Department of Aeronautics and Astronomy University of Washington, Amens Research Center, NASA, Moffett Field, California, (1982).
- [۳] محمدرضا مه‌پیکر، ادریس یوسفی‌راد، اسماعیل لکزبان، " ترکیب روش‌های حجم‌کنترل و تفاضل-محدود، جهت مدل کردن جریان بین پره‌های توربین و بهینه‌سازی آن به کمک روش معکوس"، کنفرانس دینامیک شاره‌ها، بابل، (۱۳۸۸).
- [4] Ozisik, M.N., and Orlande, H.R.B., "Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications", Taylor and Francis Pub, New York, (2000).
- [5] Mahpeykar, M.R., and Yousefirad, E., "Using Entropy Flow in Inverse Modeling Method to Reconcile Finite Volume and Finite Difference Numerical Solving Method Between Turbine Blades", Vancouver, British Columbia, Canada, International Mechanical Engineering Congress and Exposition/IMECE, (2010).

- [۶] محمدرضا مه‌پیکر، ادريس يوسفی‌راد، اسماعیل لکزیان، "نحوه‌ی تلفیق روش‌های حجم‌کنترل و تفاضل محدود، جهت مدل کردن جریان بین پره‌های توربین"، کنفرانس هوافضا، دانشگاه مالک اشتر، اصفهان، (۱۳۸۷).
- [7] Bakhtar, F., Zamiri, M.R., and Rodrigues-Lelis, E., "A Comparative Study of Treatment of 2-D Two-phase Flows of Steam by a Rung-Kutta and by Denton's Method", International Mechanical Engineering, Vol. 221, part C, pp. 89-97, (2007).
- [8] Mahpeykar, M.R., Yousefirad, E., "Optimizing Surface Tension and Condensation Coefficient in Two-phase Flow with using Inverse Modeling of Levenberg-Marquardt", Vancouver, British Columbia, Canada, International Mechanical Engineering Congress and Exposition/IMECE, (2010).
- [9] Mashmouhy, H., Mahpeykar, M.R., Bakhtar, F., "Studies of Nucleating and Wet Steam Flows in Two-dimensional Cascades", Proc. Instn. Mech. Engrs. Part C: J. Mechanical Engineering Science, Vol. 218(C8), pp. 843-858, (2004).
- [10] Bakhtar, F., Mahpeykar, M.R., and Abbas, K.K., "An Investigation of Nucleating Flows of Steam in a Cascade of Turbine Balding-theoretical Treatment", J. Fluids Eng, March, Vol. 117, Issue 1, pp. 138-145, (1995).
- [11] Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Rung-Kutta Time Stepping Schemes" AIAA paper No. 81, pp. 1259, (1981).
- [12] Engl, H.W., Hanke, M., and Neubauer, A., "*Regularization of Inverse Problems*", Kluwer Academic Pub, Prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, (1996).
- [13] Levenberg, K.A., "A Method for the Solution of Certain Nonlinear Problems in Least Squares", Q. Appl. Math., Vol. 2, pp. 164-168, (1944).
- [14] Davies, M., and Whitting, I.J., "A Modified Form of Levenberg's Correction, in Numerical Methods for Nonlinear Optimization", Lootsma, F.A., Ed., Academic Press, London, pp. 191-201, (1972).

فهرست نمادهای انگلیسی

A : مساحت وجه المان

C_p, C_v : گرمای ویژه در فشار و حجم ثابت

C_0 : سرعت صوت

D_x, D_y : اتلافات مصنوعی در جهت x, y

E, F, G : بردارهای شار

e : انرژی داخلی

k : مقادیر پارامتر در گام زمانی

M : ماخ

P : فشار استاتیک

\vec{P} : پارامتر مجهول

\vec{P}_{est} : تخمینی از پارامتر مجهول

S : جمع مربعات

SF_X, SF_Y : ضرایب هموار کننده دنتون در جهت y, x

\vec{T}^c : خروجی مدل در محل اندازه‌گیری

\vec{T}^m : خروجی اندازه‌گیری شده

Δt : گام زمانی

u, v : مولفه‌های سرعت

W : ماتریس وزنی

W_0 : ماتریس وزنی

$\Delta \nabla$: حجم المان

X : ماتریس حساسیت

x, y : مختصات در راستای جریان و عمود بر آن

$\Delta x, \Delta y$: گام مکانی در جهت y, x

فهرست نمادهای یونانی

ρ : چگالی

Ω : ماتریس قطری جهت کاهش انحراف

δ_{XF}, δ_{YF} : تفاضل پیشرو در جهت y, x

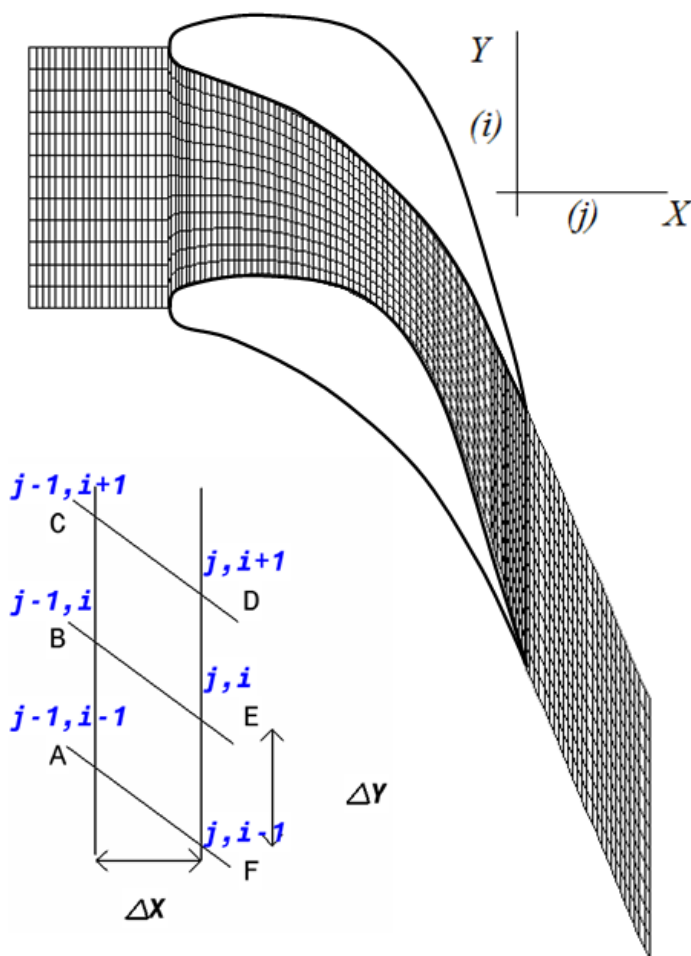
δ_{XB}, δ_{YB} : تفاضل پسرو در جهت y, x

γ_x, γ_y : ضریب ترم اتلافی مرتبه دو

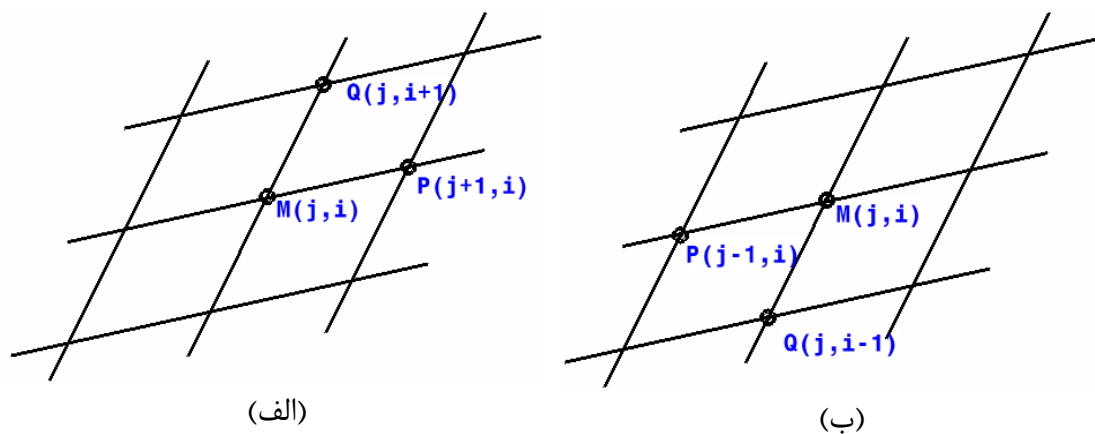
λ_x, λ_y : ضریب ترم اتلافی مرتبه چهار

V : پارامتر تنظیم

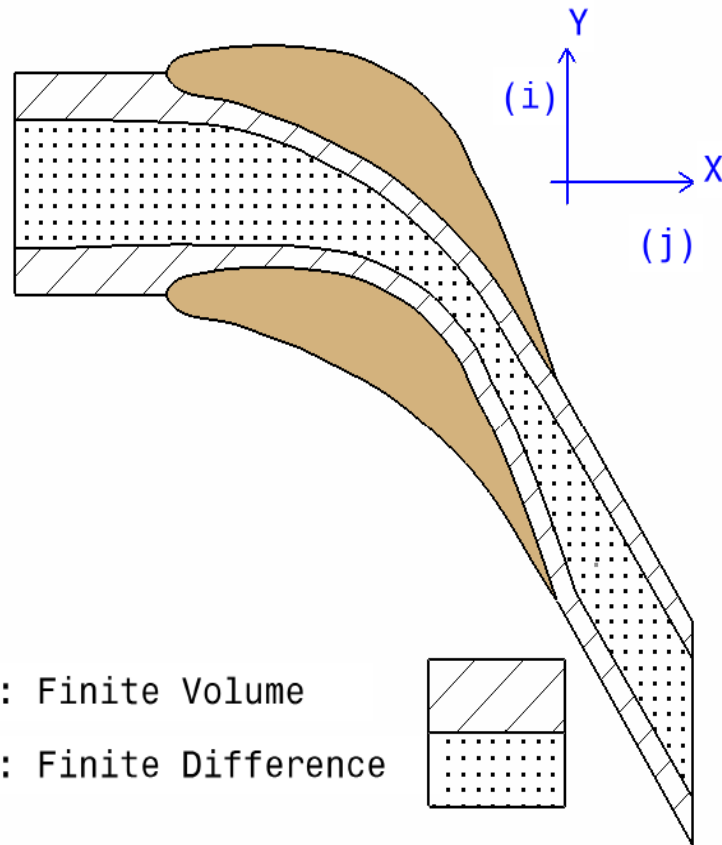
شکلها



شکل ۱- شبکه استاندارد نوع H (۱۱۵×۱۲)

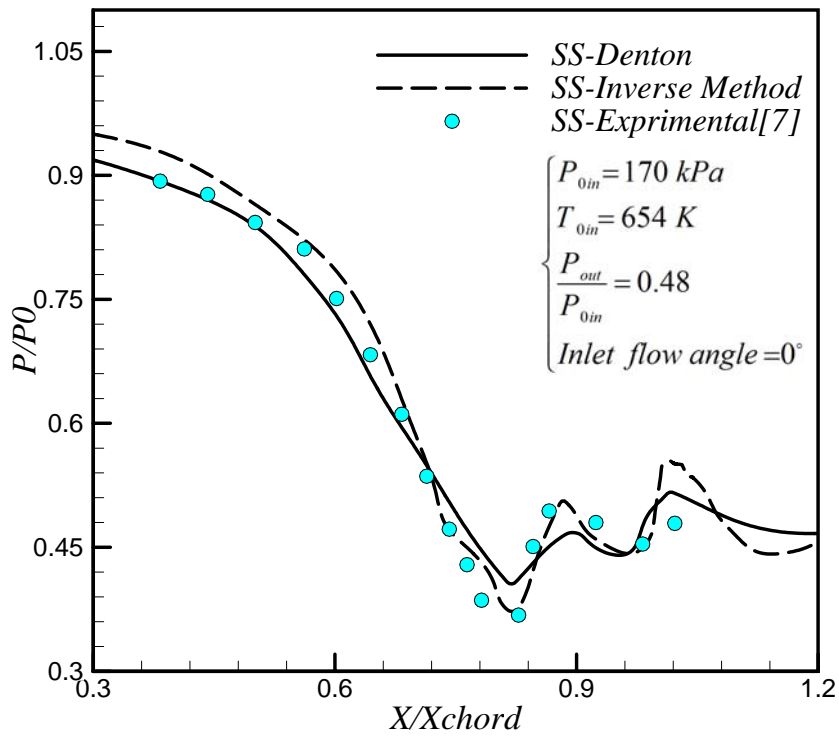


شکل ۲- موقعیت نقاط P و Q در حالت تفاضل پیشرو (الف) و پسرو (ب) روش مک کورمک



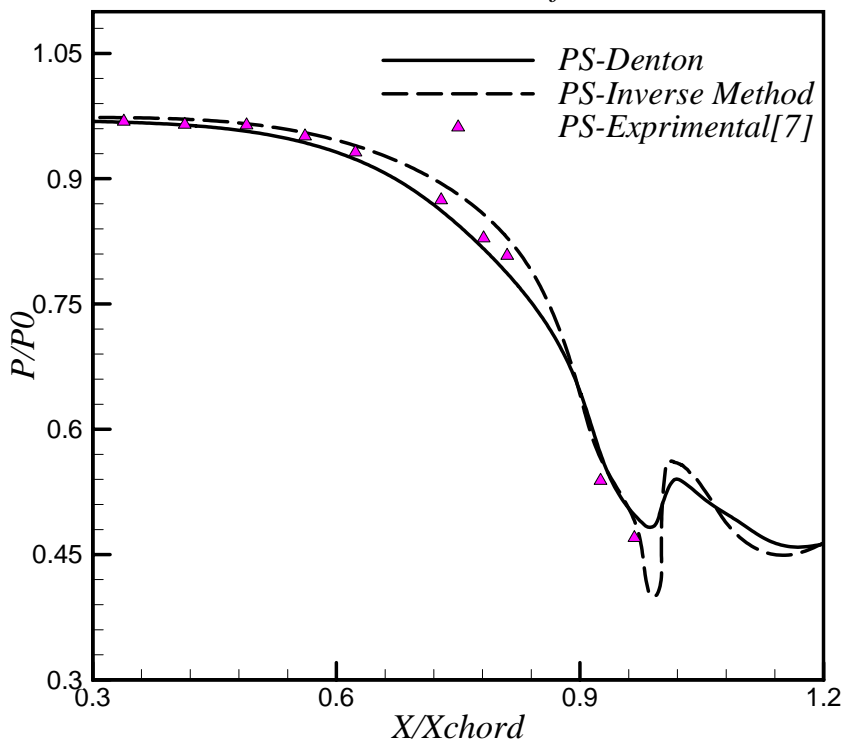
شکل ۳- شماتیک نمادین محدوده‌ی نواحی روش‌های حل عددی حجم محدود و تفاضل محدود به کمک روش معکوس

SS: Suction Surface



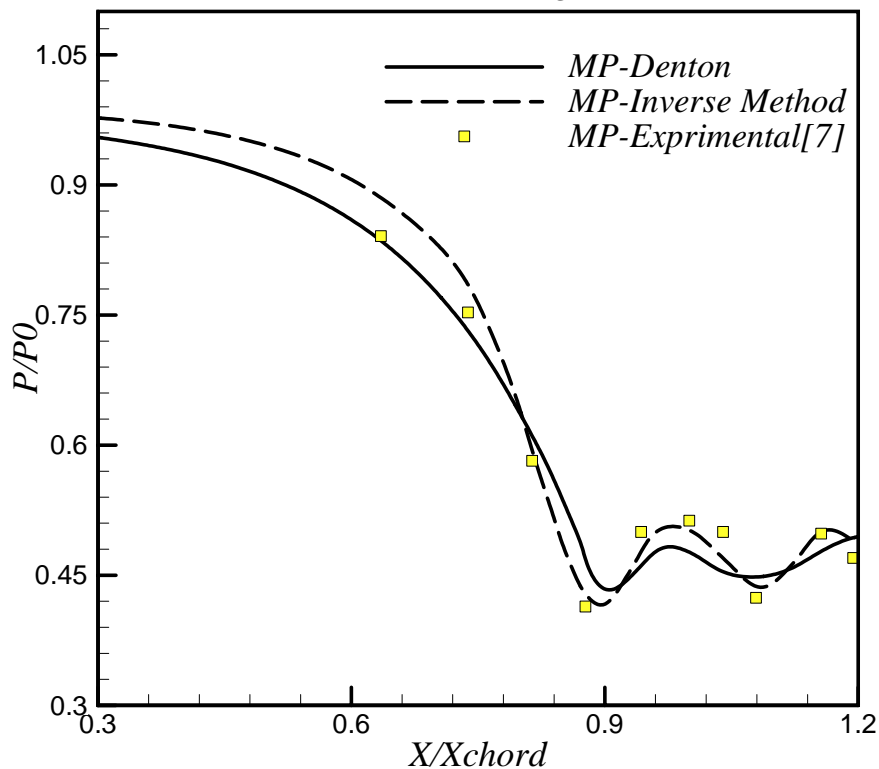
شکل ۴- تغییرات نسبت فشار استاتیک به فشار سکون در طول پره در سطح مکش (SS)

PS: Pressure Surface

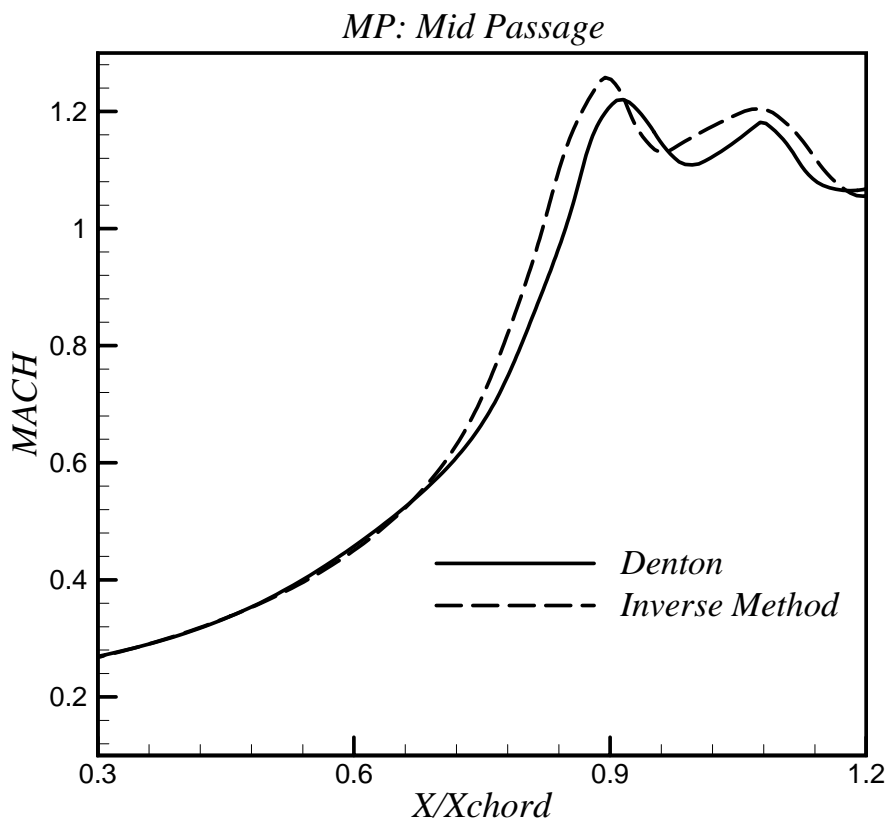


شکل ۵- تغییرات نسبت فشار استاتیک به فشار سکون در طول پره در سطح فشار (PS)

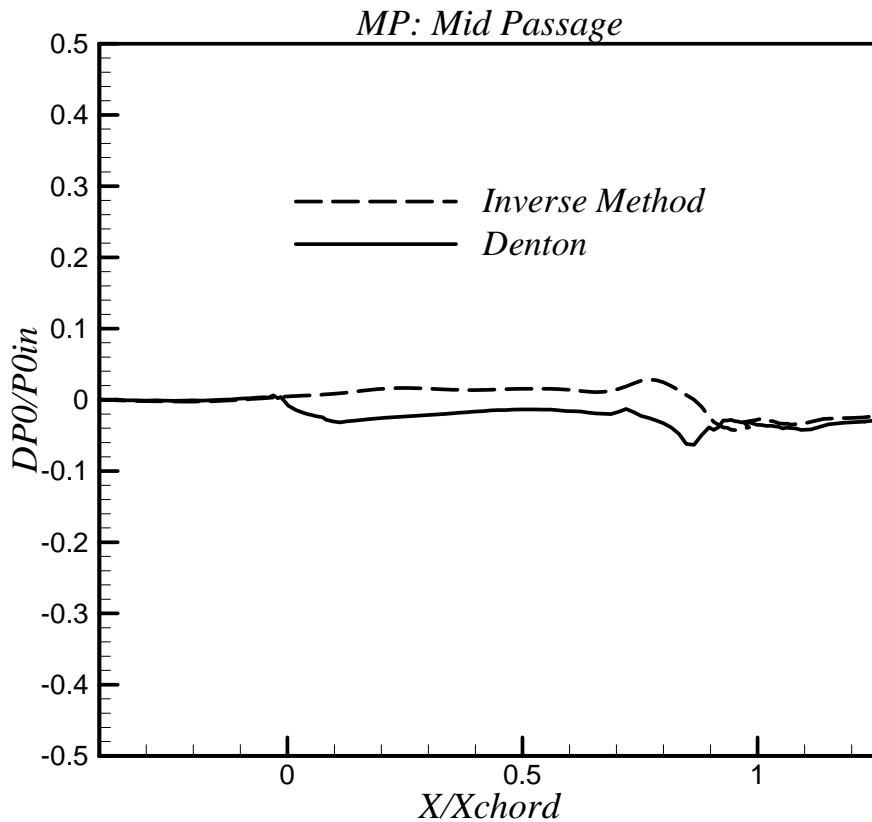
MP: Mid Passage



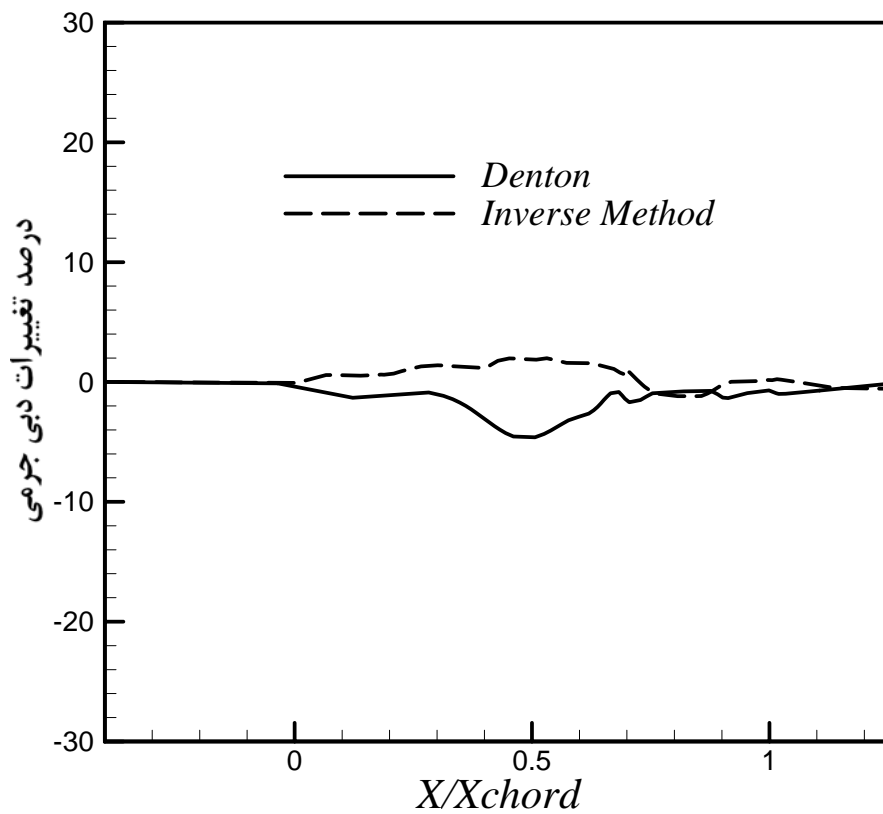
شکل ۶- تغییرات نسبت فشار استاتیک به فشار سکون در خط مرکزی جریان (MP)



شکل ۷- منحنی تغییرات ماخ در طول پره در خط مرکزی جریان (MP)



شکل ۸- درصد تغییرات نسبت فشار سکون به فشار سکون ورودی در خط مرکزی جریان (MP)



شکل ۹- درصد نسبت تغییرات دبی بر دبی ورودی پره در طول پره

Abstract

With the advance of numerical methods of finite volume and finite difference in modeling subsonic and supersonic flows through various paths such as flows inside turbine blades, employing unified numerical methods of finite volume and difference are able to benefit from the advantages of both methods at the same time. The innovation of this article is improving the finite volume method by combining it with the finite difference method on 2-D modeling of supersonic flow between stator turbine blades. In this research using the reverse Levenberg-Marquardt method, the optimum portion of nodes or the range between finite volume and finite difference solving region is specified. Considering the significance of the shock zone on suction surface of blades, the focus of the reverse method, which leads to improvement of Denton's finite volume, is directed to this zone. Compared to the experimental data, the theoretical results of the unified model along with the employment of the reverse method on the shock zone of the turbine blades suction area, show a favorable agreement and reduction of numerical errors in the mentioned region.