



یک الگوریتم محاسباتی برای طراحی مجاری سیال خنک کن در یک جسم هادی حرارت

تخمین شکل مرزهای مجهول در بسیاری از مسایل انتقال حرارت حائز اهمیت است. به عنوان مثال می توان به تعیین شکل، اندازه و محل مجاری سیال خنک کن در پره های یک توربین گاز اشاره کرد. علیرغم ارائه روش های مختلفی برای تعریف و حل این نوع از مسائل، تحقیقات در این زمینه با هدف دستیابی به الگوریتم های محاسباتی کارآمد و کم هزینه ادامه دارد. در این مقاله یک روش بهینه یابی عددی مبتنی بر معادلات الحاقی برای طراحی شکل ارائه می گردد. برای گسسته سازی میدان از شبکه بی سازمان و برای گسسته سازی معادلات در مسئله های آنالیز، حساسیت و الحاقی از روش المان محدود استفاده شده است. الگوریتم پیشنهادی در تخمین موقعیت و اندازه مجاری خنک کن دایروی در چند میدان دو بعدی از جمله پره توربین گاز به کار گرفته شده و مقادیر مجهول مراکز و شعاع دایره ها به عنوان متغیرهای طراحی تعیین گردیده اند. نتایج بدست آمده به ازای اعداد بایوت مختلف نشان می دهند که روش پیشنهادی قادر به طراحی مجاری مورد نظر با دقت قابل قبول می باشد.

حمید فاضلی^۱

کارشناس ارشد

علی اشرفی زاده^۲

دانشیار

مسعود میرزایی^۳

دانشیار

واژه های راهنما: هدایت حرارتی معکوس، روش المان محدود، روش گرادیان مزدوج، روش کاهش سریع

۱- مقدمه

مسایل معکوس حرارتی کاربردهای متعددی در زمینه های مختلف علوم و مهندسی دارند. تعیین شرایط مرزی، خواص ترموفیزیکی، منابع داخلی و شکل مرز از جمله این مسایل به شمار می آیند [۱]. روش های تخمین یا طراحی شکل به عنوان یکی از زیر مجموعه های مسایل معکوس، در تعیین شکل مرز یک جسم هادی حرارت، پیش بینی شکل مرز بین دو فاز در مسئله انجماد، تشخیص حفره و ترک در آزمایش های غیر مخرب و نیز یافتن اندازه، شکل و محل مناسب مجاری سیال خنک کن در پره های توربین های گاز به کار گرفته شده اند. در این مقدمه به مرور بخشی از تحقیقات انجام شده در هریک از زمینه های فوق می پردازیم.

^۱ نویسنده مسئول، کارشناس ارشد، دانشکده هوا فضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی hamid.fazeli@gmail.com

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ashrafizadeh@kntu.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده هوا فضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی mirzaei@kntu.ac.ir

در زمینه تعیین شکل مرز مجهول یک جسم هادی حرارت، از روش های بهینه یابی بصورت گسترده ای استفاده بعمل آمده است. هوانگ و چاو با دو روش لونبرگ مارکورت و گرادیان مزدوج و با استفاده از دماهای اندازه گیری شده در قسمتی از مرز، شکل بخش مجهول مرزی را تخمین زده اند [۲]. چنگ و وو [۳]، لان و همکاران [۴] و چنگ و چانگ [۵] نیز با استفاده از روش های بهینه یابی و حل عددی بر روی شبکه های با سازمان به حل مسئله تخمین شکل مرز پرداخته اند. کوشش های زیادی نیز جهت ارائه الگوریتم های محاسباتی مناسب برای تعیین مجاری سیال خنک کن و کنترل دمای اجسام بعمل آمده است. در این زمینه می توان به کارهای کنون و دولیکراویچ [۷و۶]، دولیکراویچ [۸]، چیانگ و دولیکراویچ [۹]، دولیکراویچ و مارتین [۱۰]، هوانگ و هسیانگ [۱۱]، مارتین و دولیکراویچ [۱۲] و قدمیاری [۱۳] اشاره کرد.

در اغلب این تحقیقات از روش های پانل و المان مرزی برای حل عددی و از روش های بهینه یابی برای دستیابی به شکل مورد نظر استفاده شده است. همچنین بطور معمول شرط مرزی درিশله برای مجاری سیال خنک کن و شرط مرزی نیومن (معلوم بودن شار حرارتی) برای سطح خارجی پره یا جسم هادی حرارت در نظر گرفته شده است. با توجه به کاهش سرعت همگرایی با افزایش تعداد متغیر های طراحی در روش های سنتی بهینه یابی، در برخی از الگوریتم های پیشنهادی از روش های الحاقی برای تعیین گرادیان تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی استفاده شده است [۶-۹].

در روش های ذکر شده برای تعیین شکل مجاری سیال خنک کن گزارشی از ترکیب روش های بهینه یابی با معادلات الحاقی و روش اجزای محدود ارائه نشده است. علاوه بر این به مشکلات همگرایی در مناطقی که گرادیان تابع هدف کوچک باشد نیز اشاره و نیاز به تحقیق بیشتر در این مورد مطرح گردیده است [۱۰و۱۱].

در این مقاله، الگوریتمی محاسباتی برای طراحی مجاری سیال خنک کن در اجسام هادی حرارت پیشنهاد می شود که برای حل عددی از روش اجزای محدود بر روی یک شبکه بی سازمان و برای بهینه یابی از معادلات حساسیت و الحاقی استفاده بعمل می آورد. مزیت استفاده از شبکه بی سازمان ایجاد قابلیت حل میدان هایی با هندسه پیچیده برای این الگوریتم می باشد. همچنین به منظور کاهش مشکلات مربوط به نقاطی که گرادیان تابع هدف در آنها کوچک است، در این الگوریتم پیشنهادی از نقاطی استفاده می شود که گرادیان ها در آنها دارای مقادیر خیلی کوچک نیستند و در تعیین پارامترهای طراحی کانال های خنک کن مورد استفاده قرار می گیرند.

با به کارگیری الگوریتم پیشنهادی در حل سه مسئله شاخص، از جمله طراحی مجاری سیال خنک کن در یک پره، نشان داده ایم که این الگوریتم قادر به حل مسئله مورد نظر در هندسه های مختلف و به ازای اعداد بایوت گوناگون می باشد. همچنین اثر خطا در داده های ورودی نیز بررسی و نشان داده شده است که خطای ورودی موجب پیدایش خطای متناسبی در تخمین شکل می گردد.

۲- مسئله مستقیم هدایت حرارتی

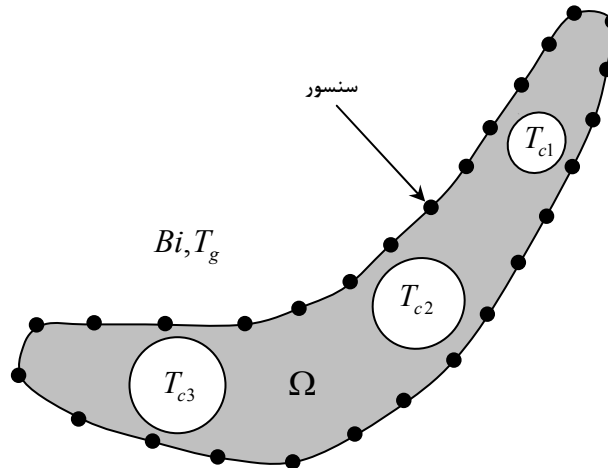
در حل مسئله طراحی مجاری سیال خنک کن به کمک روش های بهینه یابی، مسئله مستقیم هدایت حرارتی باید به دفعات حل شود. معادله حاکم بر دما در هدایت حرارتی دو بعدی و پایا در میدان های حل Ω در شکل (۱) و با فرض ضریب هدایت حرارتی واحد بصورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1\text{-الف})$$

شرایط مرزی معادله (۱-الف) عبارتند از:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = Bi(T_g - T) \quad \text{در امتداد مرز بیرونی} \quad (1\text{-ب})$$

$$T = T_{ci} \quad i = 2, 3, \dots \quad \text{مرزهای داخلی} \quad (1\text{-ج})$$



شکل ۱- میدان Ω در پره توربین با مجاری خنک کن داخلی.

پارامترهای بی بعد در رابطه بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$T = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_R} ; \quad x = \frac{\bar{x}}{d} ; \quad y = \frac{\bar{y}}{d} ; \quad Bi = \frac{\bar{h}l}{k}$$

در روابط بالا Bi عدد بایوت، T دما در میدان جامد، T_g دمای گاز داغ، T_c دمای خنک کن، T_R دمای مرجع و l طول مرجع می باشند.

معادله دیفرانسیل پاره ای (۱-الف) همراه با شرایط مرزی فوق با استفاده از روش المان محدود و جعبه ابزار معادله دیفرانسیل پاره ای نرم افزار MATLAB حل شده است [۱۸]:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla T) v d\Omega = 0 \quad (2)$$

در رابطه (۲) تابع آزمون می باشد. با استفاده از قضیه مشتق حاصلضرب، فرم ضعیف برای هر المان به صورت زیر بدست می آید:

$$\int_{\Omega} (\nabla T) \cdot \nabla v d\Omega - \oint_{\Gamma} q_n v ds = 0 \quad (3)$$

مقدار دما در نقطه (x, y) یک المان با استفاده از توابع میان یابی خطی ϕ به صورت زیر نوشته می شود:

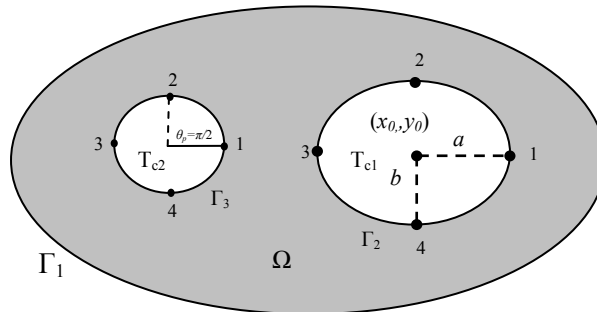
$$T = \sum_{t=1}^{N_p} T_t \phi_t(x, y) \quad (4)$$

با جایگذاری معادله (۴) و ϕ_s ($s=1, 2, \dots, N_e$) به ترتیب به جای T و v در معادله (۳) عبارتی به صورت زیر بدست می آید:

$$\sum_{t=1}^{N_p} \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_t \cdot \nabla \phi_t d\Omega \right) T_t = \oint_{\Gamma} q_n \phi_s ds \quad (5)$$

N_p تعداد گره ها و N_e تعداد المان ها می باشند. معادله بالا در نهایت، پس از نوشتن معادلات برای همه المان ها، یک دستگاه معادلات جبری بدست می آید:

$$K_{s,t} T_t = F_s \quad (6)$$



شکل ۲- مکان های مورد نظر اطراف مجرای خنک کن برای تعیین پارامترهای شکل.

$K_{s,t}$ ماتریس سختی، T_t بردار دما های مجهول و F_s بردار شارها می باشند.

۳- مسئله معکوس حرارتی و حل آن

هدف از حل این مسئله تخمین مرز مجهول با استفاده از دماهای اندازه گیری شده است. ابتدا تابع هدفی به صورت مجموع مربعات تفاضل دمای اندازه گیری شده و دمای محاسبه شده تعریف می شود. دماهای اندازه گیری شده توسط حسگرها بر روی مرز خارجی بدست آمده و به صورت $Y(x_m, y_m) = Y_m$ و $(m=1, 2, \dots, M)$ نشان داده می شوند که M تعداد حسگرهای دمایی است. بر این اساس تابع هدف به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$J[\Gamma] = \sum_{m=1}^M [T_m - Y_m]^2 \quad (7)$$

T_m دمای محاسبه شده از مسئله مستقیم بر اساس مرز حدسی Γ می باشد که در هر تکرار اصلاح می شود تا به مرز واقعی برسد.

۳-۱- بهینه یابی در فضای طراحی

برای طراحی مجاری دایروی i ام در شکل (۲) به موقعیت مرکز (x_{0i}^k, y_{0i}^k) و شعاع آن (r_i^k) نیاز داریم. با استفاده از یک حدس اولیه، مقادیر (x_{0i}^k, y_{0i}^k) و نیز (r_i^k) در $(k=0)$ معلوم بوده و هدف ما آنست که در یک فرآیند تکراری مقادیر $(x_{0i}^{k+1}, y_{0i}^{k+1})$ و r_i^{k+1} ($k=1, 2, \dots$) را تعیین کنیم. فرض کنید نقاط ۱ تا ۴ در مجرای i در شکل (۲) را در موقعیت های مختلف زاویه ای $(\theta_p=0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi)$ انتخاب کرده و مختصات این نقاط را $(\hat{x}_{ip}^k, \hat{y}_{ip}^k)$ بنامیم ($p=1, 2, 3, 4$). برای بدست آوردن موقعیت و اندازه جدید مجرای جریان کافی است

$(\hat{x}_{ip}^{k+1}, \hat{y}_{ip}^{k+1})$ و $(\hat{x}_{0i}^{k+1}, \hat{y}_{0i}^{k+1})$ را بدست آوریم. نقطه $(\hat{x}_{ip}, \hat{y}_{ip})$ یکی از نقاط ۱ تا ۴ برای مجرای شماره i می باشد که به صورتی انتخاب می شود که بیشترین گرادیان تابع هدف را در آنجا داشته باشیم. بدین ترتیب از بروز مشکلات ناشی از کوچک بودن گرادیان در جریان بهینه یابی تا حد زیادی جلوگیری می شود.

برای حرکت در فضای طراحی در مرحله k ام بهینه یابی به یک جهت جستجو (d_{ip}^k) و یک ضریب اندازه گام (β^k) نیاز است که تعیین مقادیر در دو بخش بعدی مقاله مورد بحث قرار می گیرد.

چنانچه یکی از نقاط ۱ یا ۳ به عنوان نقطه p انتخاب گردد روابط لازم برای به روز کردن موقعیت و اندازه مجرای شماره i به صورت زیر خواهند بود:

$$\hat{x}_{ip}^{k+1} = \hat{x}_{ip}^k - \beta^k d_{ip}^k \cos \theta_p \quad (۸-الف)$$

$$\hat{y}_{ip}^{k+1} = y_{0i}^k \quad (۸-ب)$$

$$x_{0i}^{k+1} = (\hat{x}_{ip}^{k+1} \pm r_i^k) \quad (۸-ج)$$

$$y_{0i}^{k+1} = (\hat{y}_{ip}^{k+1} \pm r_i^k) \quad (۸-د)$$

$$r_i^{k+1} = |\hat{x}_i^{k+1} - x_{0i}^k| \quad (۸-ه)$$

در روابط (۸-ج) و (۸-د) علامت (+) بازای $p=1$ و علامت (-) بازای $p=3$ استفاده می شود. چنانچه یکی از نقاط ۲ یا ۴ به عنوان نقطه p انتخاب گردد روابط لازم برای به روز کردن موقعیت و اندازه مجرای شماره i به صورت زیر خواهند بود:

$$\hat{x}_{ip}^{k+1} = \hat{x}_{ip}^k \quad (۹-الف)$$

$$\hat{y}_{ip}^{k+1} = y_{0i}^k - \beta^k d_{ip}^k \sin \theta_p \quad (۹-ب)$$

$$x_{0i}^{k+1} = (\hat{x}_{ip}^{k+1} \pm r_i^k) \quad (۹-ج)$$

$$y_{0i}^{k+1} = (\hat{y}_{ip}^{k+1} \pm r_i^k) \quad (۹-د)$$

$$r_i^{k+1} = |\hat{y}_i^{k+1} - y_{0i}^k| \quad (۹-ه)$$

در روابط (۹-ج) و (۹-د) علامت (+) بازای $p=2$ و علامت (-) بازای $p=4$ استفاده می شود. توجه کنید که در حالتی که چند مجرای دایروی برای خنک کاری پره به کار گرفته شوند عملاً با بردار متغیرهای طراحی که شامل مختصات مراکز دایره ها و شعاع های آن هاست سروکار داریم که با بهینه یابی این مقادیر، موقعیت و اندازه بهینه این مجاری بدست می آید.

۳-۲- تعیین طول گام به کمک معادله حساسیت

معادله حساسیت از معادله مستقیم هدایت حرارتی (۱) بدست می آید. اگر مرز Γ به اندازه $\Gamma\Delta$ در راستای عمود بر مرز جابجا شود، دمای T به دمای $T+\Delta T$ تغییر پیدا می کند. از اینرو با قرار دادن $\Gamma+\Gamma\Delta$ به جای Γ

و $T+\Delta T$ به جای T در معادله مستقیم، معادله جدیدی بدست می آید که با کم کردن معادله مستقیم و صرفنظر کردن از ترم های مرتبه دوم، معادله حساسیت به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (10\text{-الف})$$

شرایط مرزی معادله (10-الف) عبارتند از:

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial n} = -Bi\Delta T \quad \text{در امتداد مرز بیرونی} \quad (10\text{-ب})$$

$$\Delta T = \Delta \Gamma_i \frac{\partial T}{\partial n} \quad i = 2, 3, \dots \quad \text{مرزهای داخلی} \quad (10\text{-ج})$$

این معادله دیفرانسیل نیز با استفاده از روش المان محدود گسسته سازی و حل می شود. می توان نشان داد که طول گام بهینه β^k با استفاده از مینیمم تابع هدف [۱۵] به صورت زیر بدست می آید:

$$\beta^k = \frac{\sum_{m=1}^M (T_m - Y_m) \Delta T_m}{\sum_{m=1}^M (\Delta T_m)} \quad (11)$$

۳-۳- تعیین جهت جستجو به کمک معادله الحاقی

گرادیان تابع هدف با روشی غیر از مشتق گیری معمولی محاسبه می شود. با ضرب معادله لاپلاس در پارامتری بنام ضریب لاگرانژ λ و انتگرال گیری روی ناحیه Ω عبارتی بدست می آید که با اضافه کردن آن به سمت راست تابع هدف خواهیم داشت [۱۵]:

$$J[\Gamma] = \sum_{m=1}^M [T_m - Y_m]^2 + \int_{\Omega} \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] d\Omega \quad (12)$$

مقدار ΔJ با قرار دادن $\Gamma + \Delta \Gamma$ به جای Γ و قرار دادن $T + \Delta T$ به جای T در معادله (۱۲) و کم کردن آن از همین معادله و صرفنظر کردن از جملات درجه دوم به بالا عبارت زیر بدست می آید:

$$\Delta J = \int_{\Gamma} 2(T - Y) \Delta T \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) d\Gamma + \int_{\Omega} \lambda \left[\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2} \right] d\Omega \quad (13)$$

در معادله بالا δ تابع دلتای دیراک می باشد. با استفاده از رابطه دوم گرین، بسط معادله (۱۳) و استفاده از شرایط مرزی در معادله حساسیت (۱۰) ترم های بسط داده شده شامل ΔT حذف شده اند و معادله الحاقی به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \quad (۱۴-الف)$$

شرایط مرزی این معادله به صورت زیر بدست می آیند [۱۵]:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} + Bi\lambda = 2(T - Y)\delta(x - x_m)\delta(y - y_m) \quad \text{در امتداد مرز بیرونی} \quad (۱۴-ب)$$

$$\lambda_i = 0 \quad i = 2, 3, \dots \quad \text{مرزهای داخلی} \quad (۱۴-ج)$$

با استفاده از روش المان محدود معادله الحاقی در میدان مورد نظر حل شده است. می توان نشان داد که [۲۳] گرادیان تابع هدف در مرزهای داخلی به صورت زیر بدست می آید:

$$J' = - \frac{\partial \lambda}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_i} \quad (۱۵)$$

جهت کاهش با استفاده از روش کاهش سریع بدست می آید که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$d_i^k = J_i'^k \quad (۱۶)$$

معیار همگرایی

در حالتی که دماهای اندازه گیری شده همراه با خطا باشند ممکن است الگوریتم معکوس واگرا شود. از اینرو معیار همگرایی ضعیف تری در الگوریتم معکوس تعریف می شود تا الگوریتم معکوس همگرا شود که این معیار همگرایی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$J[\Gamma] < \varepsilon \quad (۱۷)$$

در این رابطه ε به گونه ای انتخاب می شود که حل پایدار برای مسئله معکوس حاصل شود. در الگوریتم معکوس فرآیند تکراری زمانی متوقف می شود که مانده حاصل از تفاضل دماهای اندازه گیری شده و تخمینی از مرتبه خطاهای اندازه گیری باشد که به صورت زیر می باشد:

$$|T_m - Y_m| \approx \sigma_m \quad (۱۸)$$

σ_i انحراف معیار اندازه گیری است و فرض می شود که مقدار ثابتی برابر با $\sigma_m = \sigma$ دارد و با جایگذاری در رابطه (۷) داریم:

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^M \sigma_m^2 = M\sigma^2 \quad (۱۹)$$

در رابطه بالا M تعداد حسگرهای دمایی است. در صورتی که اندازه گیری بدون خطا باشد می توان مقدار ε را بسیار کوچک انتخاب کرد تا تابع هدف را تا مقادیر بسیار کوچک کاهش داد. مطابق رابطه بالا محاسبه معیار همگرایی برای داده های همراه با خطا، به داشتن انحراف معیار اندازه گیری نیازمند می باشد.

به منظور شبیه سازی خطای حسگرها، خطایی با توزیع نرمال و مقدار میانگین صفر همراه با انحراف معیار ثابت در نظر گرفته شده است که اطلاعات مربوط به دمای اندازه گیری شده به صورت زیر تعریف می شود:

$$Y = Y_{exact} + \omega\sigma \quad (20)$$

در رابطه بالا Y_{exact} از حل معادله مستقیم شکل دقیق مجاری بدست می آید. σ مقدار انحراف معیار اندازه گیری و ω متغیر تصادفی است که در اینجا توسط تابع Randn که در زمره توابع نرم افزار MATLAB است تولید شده است که ۹۹٪ از مقادیر تولید شده در محدوده $2/576 \sim -2/576$ می باشند.

۴- الگوریتم محاسباتی

با حدس اولیه برای مرز Γ روند حل شروع می شود. در هر تکرار شکل مرز اصلاح شده و روند حل تا جایی که معیار همگرایی ارضا شود، ادامه پیدا می کند. مراحل اجرای الگوریتم معکوس برای تخمین مرز مجهول را می توان به صورت زیر بیان کرد:

۱. حل معادله مستقیم با استفاده از معادله (۱).
۲. بررسی معیار همگرایی با استفاده از معادله (۱۷).
۳. حل معادله الحاقی با استفاده از معادله (۱۴).
۴. محاسبه گرادیان تابع هدف J' با استفاده از معادله (۱۵).
۵. محاسبه جهت کاهش d^k با استفاده از معادله (۱۶).
۶. حل معادله حساسیت به ازای $\Delta\Gamma_i = d_i^k$ با استفاده از معادله (۱۰).
۷. محاسبه طول گام بهینه β^k با استفاده از معادله (۱۱).
۸. محاسبه \hat{x}_i^{k+1} و \hat{y}_i^{k+1} تخمینی از معادلات (۸-الف وب، ۹-الف وب).
۹. محاسبه پارامترهای $x_{0i}^{k+1}, y_{0i}^{k+1}$ از معادلات (۸-ج ود، ۹-ج ود).
۱۰. محاسبه پارامتر r_i^{k+1} از معادلات (۸-ه، ۹-ه).
۱۱. تخمین اندازه و موقعیت مجاری دایروی بر اساس پارامترهای تخمینی $x_{0i}^{k+1}, y_{0i}^{k+1}, r_i^{k+1}$ و برگشت به گام ۱.

۵- نتایج

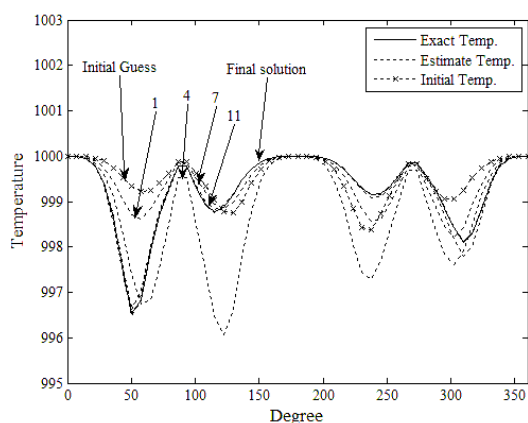
برای ارزیابی دقت الگوریتم معکوس در تخمین موقعیت و اندازه مجاری دایروی، ابتدا یک مسئله مستقیم در جسم مورد نظر با مجاری خنک کن مشخص با روش المان محدود حل شده و توزیع دما در سطح خارجی جسم محاسبه می شود. با داشتن نرخ جابجایی حرارت در سطح خارجی و دمای آن می توان مسائل معکوس را برای یافتن مجاری خنک کن تعریف کرد. در ادامه این بخش با تعریف و حل سه مسئله معکوس به ارزیابی الگوریتم پیشنهادی می پردازیم.

در مسئله اول، تخمین اندازه و مکان مجرای خنک کن دایروی در یک چهار ضلعی مورد بحث قرار می گیرد. در این مسئله علاوه بر حالتی که در آن مقادیر دقیق دمای اندازه گیری شده معلوم می باشند، به

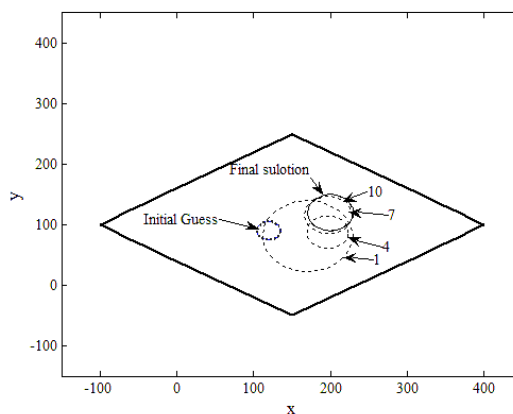
بررسی حالاتی که خطای اندازه گیری نیز وجود دارد نیز خواهیم پرداخت. در مسئله دوم، به بررسی اثر جابجایی در سطح خارجی جسم و در واقع تاثیر عدد بایوت (Bi) بر الگوریتم حل معکوس در حل مسئله اول می پردازیم. و بالاخره، در مسئله سوم، الگوریتم معکوس را برای تخمین مکان و اندازه سه مجرای خنک کن دایروی در مقطع پره یک توربین گاز به کار گرفته و کارایی الگوریتم را مورد قرار می دهیم.

تخمین مکان و اندازه مجاری خنک کن در سه مسئله شاخص مورد بحث قرار گرفته است. برای تعیین دقت الگوریتم در تخمین مرزها ابتدا حل معادله مستقیم شکل دقیق مرز های داخلی با روش المان محدود انجام می گیرد. در ادامه با استفاده از اختلاف معیارهای مختلف، مرز مجهول با توجه به مقدار خطای اندازه گیری، تخمین زده می شود و همچنین نرخ همگرایی تخمین مرزها نسبت به عدد بایوت بدست می آید.

در مسئله اول تخمین اندازه و مکان مجرای خنک کن در یک شکل ساده انجام گرفته است. تاثیر مقادیر مختلف اختلاف معیار بر الگوریتم معکوس در حل این مسئله نشان داده شده اند. در مسئله دوم تاثیر اعداد بایوت مختلف در تخمین مکان و اندازه مجاری خنک کن بررسی شده اند. در مسئله سوم الگوریتم معکوس برای تخمین مکان و اندازه مجاری خنک کن در استوانه و پره توربین به کار گرفته شده است.

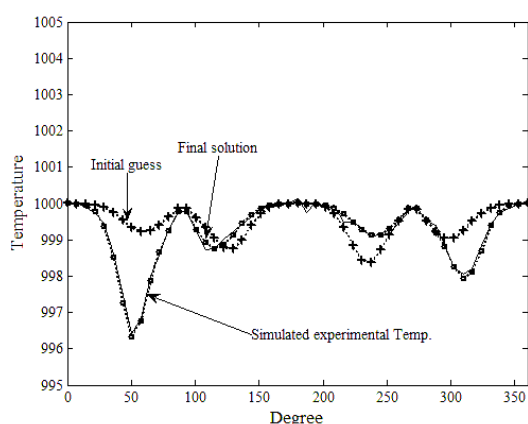


(ب)

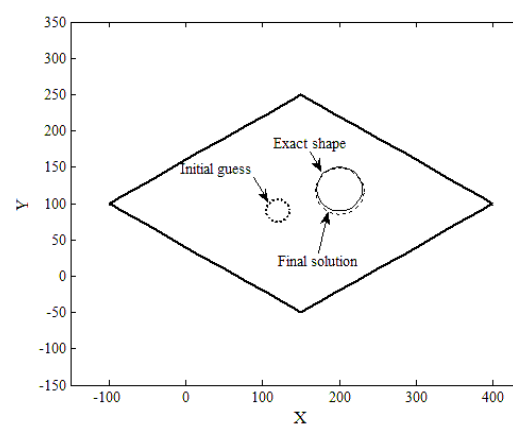


(الف)

شکل ۳- (الف) تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن (ب) دمای تخمین زده شده در $\sigma=0$.

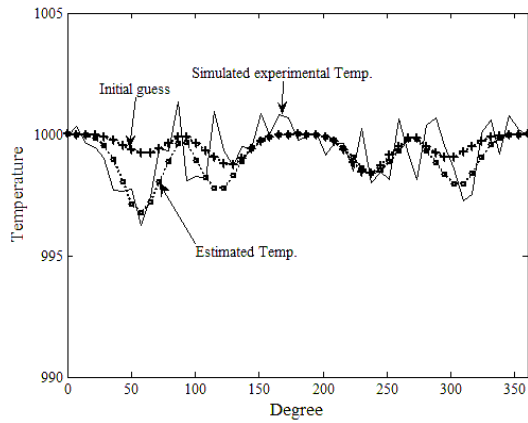


(ب)

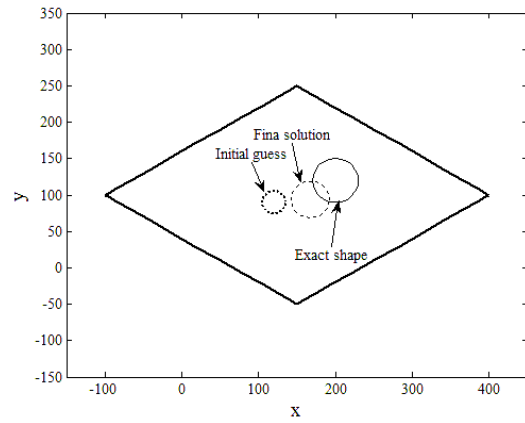


(الف)

شکل ۴- (الف) تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن (ب) دمای تخمین زده شده در $\sigma=0.1$.



(ب)



(الف)

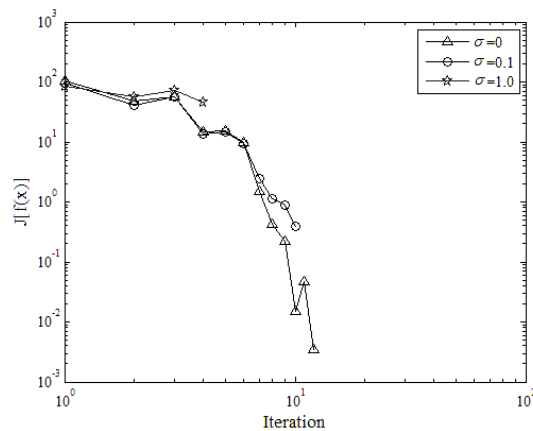
شکل ۵- (الف) تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن (ب) دمای تخمین زده شده در $\sigma=1/0$.

مسئله اول

در این مسئله تاثیر مقادیر مختلف اختلاف معیار بر تخمین مکان و اندازه مجرای خنک کن مورد بررسی قرار گرفته است. شکل هدف دایره ای است به شعاع ۳۰ و به مرکز (۲۰۰، ۱۲۰) و شکل اولیه نیز دایره ای است به شعاع ۱۵ و به مرکز (۹۰، ۱۲۰). عدد بایوت در تمامی حالت ها برابر با ۲ می باشد. در شکل (۳-الف) مجاری خنک کن محاسبه شده بازای $\sigma=0$ و در شکل (۳-ب) نحوه تغییرات دمای مرز خارجی در طول بهینه یابی در این حالت نشان داده شده اند.

جدول ۱- مقادیر تعداد تکرار، تابع هدف و خطای متوسط بر حسب اختلاف معیار در مسئله اول.

خطای نهایی	خطای اولیه	تابع هدف نهایی	تابع هدف اولیه	تعداد تکرار	ϵ	اختلاف معیار
۰/۰۰۰۴۵۲	۰/۰۰۴۵۶	۰/۰۰۳۴	۲۹/۳۴۸۶	۱۲	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰
۰/۰۰۷۰	۰/۰۴۷۳	۰/۳۸۹۸	۲۹/۷۴۲۲	۱۰	۰/۵	۰/۱
۰/۰۷۴۷	۰/۰۸۶۵	۴۶/۰۶۹۸	۶۱/۹۱۹۷	۴	۵۰	۱



شکل ۶- نمودار کاهشی تابع هدف در تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن نسبت به تعداد تکرار نسبت به اختلاف معیار ها.

اشکال (۴) و (۵) به ترتیب نمودارهای مشابهی را برای حالات $\sigma=0/1$ و $\sigma=1/0$ نمایش می دهند. ملاحظه می گردد که خطای محاسباتی در شکل (۵-ب) به علت بالا بودن اختلاف معیار در داده های ورودی قابل توجه است. در جدول (۱) مقادیر تکرار، تابع هدف و خطای نسبی بر حسب اختلاف معیار نشان داده شده اند. با توجه به این جدول در حالت $\sigma=0$ که شامل معیار همگرایی $0/005$ می باشد. ابتدا مقادیر تابع هدف و خطای نسبی اولیه به ترتیب برابر $29/3486$ و $0/00456$ می باشند که بعد از ۱۲ تکرار به مقادیر $0/0034$ و $0/00452$ می رسند. برای حالات $\sigma=0/1$ و $\sigma=1/0$ معیارهای همگرایی با توجه به معادله ۲۵ به ترتیب $0/5$ و 50 بدست می آیند. در حالت $\sigma=0/1$ در ابتدا مقادیر تابع هدف و خطای نسبی اولیه به ترتیب از $29/7422$ و $0/0473$ بعد از ۱۰ تکرار به مقادیر $0/3898$ و $0/0070$ می رسند. در حالت $\sigma=1/0$ تابع هدف و خطای نسبی اولیه به ترتیب از مقادیر $61/9197$ و $0/0865$ بعد از ۴ تکرار به مقادیر $46/0698$ و $0/0747$ می رسند. با توجه به نتایج ذکر شده می توان گفت که هرچه مقدار اختلاف معیار کمتر باشد دقت تخمین شکل بالاتر است. در شکل (۶) نمودار کاهش تابع هدف در تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن داخلی نسبت به اختلاف معیارها نشان داده شده اند. مقادیر تخمینی پارامترهای شکل در این مسئله در جدول (۲) آورده شده است. در حالت $\sigma=0$ مقدار شعاع تخمینی برابر $29/9357$ و مرکز مختصات تخمینی برابر $(120/1284)$ ، $29/5024$ می باشند. در صورتی که برای حالات $\sigma=0/1$ و $\sigma=1/0$ شعاع تخمینی به ترتیب برابر $29/5024$ و $24/8717$ و مرکز مختصات تخمینی برابر $(200/120, 8523/4803)$ و $(167/3546, 93/728)$ می باشند. در شکل (۷) روند حل شکل تخمینی در عدد بایوت ۲ و در حالت $\sigma=0$ در تعدادی از تکرارهای الگوریتم معکوس با در نظر گرفتن شبکه بی سازمان در میدان حل، نشان داده شده است.

جدول ۲- پارامترهای دقیق و تخمینی با استفاده از الگوریتم معکوس در اختلاف معیارهای مختلف در مسئله اول.

σ	پارمترهای دقیق	پارامترهای تخمینی		
		$0/000$	$0/1$	$1/0$
r	۳۰	$29/9357$	$29/5024$	$24/8717$
x_0	۲۰۰	$200/0447$	$200/8523$	$167/3546$
y_0	۱۲۰	$120/1284$	$120/4803$	$93/728$

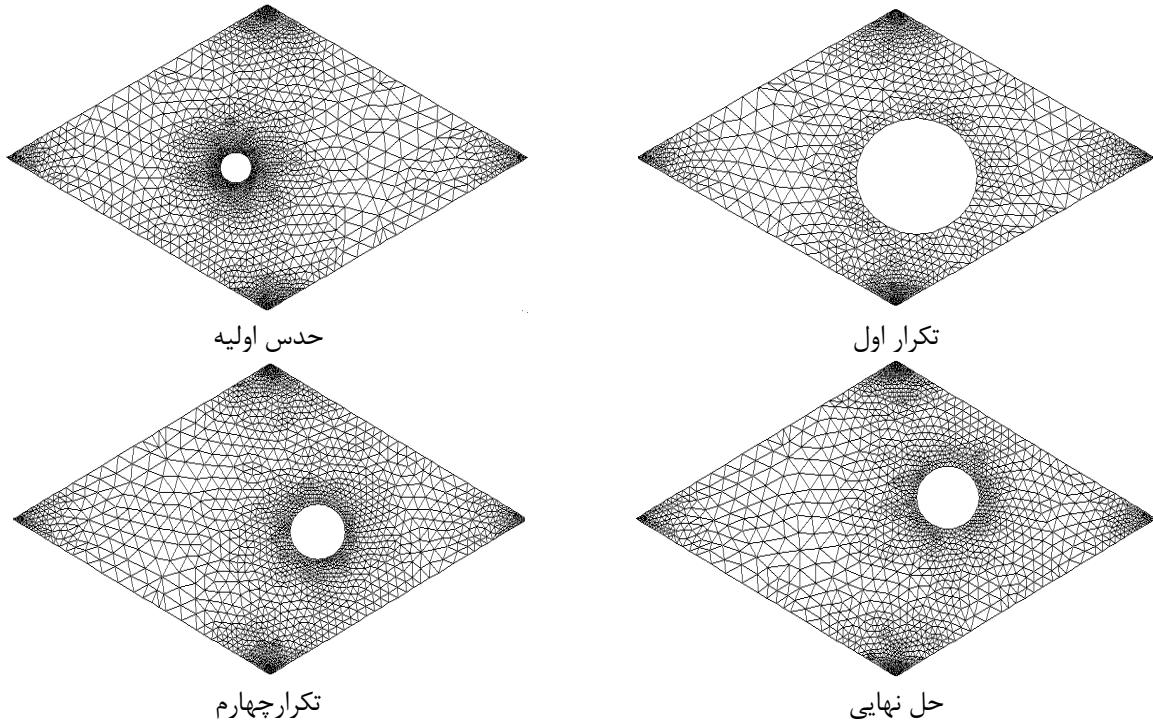
جدول ۳- مقادیر تعداد تکرار، تابع هدف و خطای متوسط نسبت به اعداد بایوت در مسئله دوم.

اعداد بایوت	ϵ	تعداد تکرار	تابع هدف اولیه	تابع هدف نهایی	خطای اولیه	خطای نهایی
۰/۳	$0/005$	۱۵	$1188/8$	$0/0026$	$0/3006$	$0/000489$
۰/۷	$0/005$	۱۲	$232/4336$	$0/0034$	$0/1300$	$0/000397$
۲/۰	$0/005$	۱۲	$29/3486$	$0/0034$	$0/00456$	$0/000542$

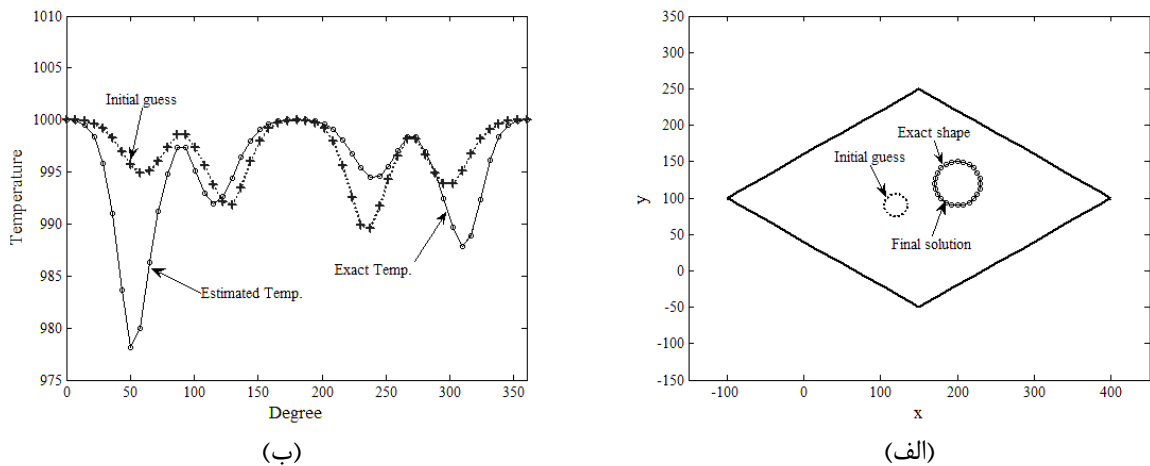
مسئله دوم

در این مسئله تاثیر مقادیر مختلف عدد بایوت بر تخمین شکل مجرای خنک کن مورد بررسی قرار گرفته است. در این مسئله هندسه مورد نظر همان هندسه مسئله اول می باشد و نتایج در سه عدد بایوت $0/3$ ،

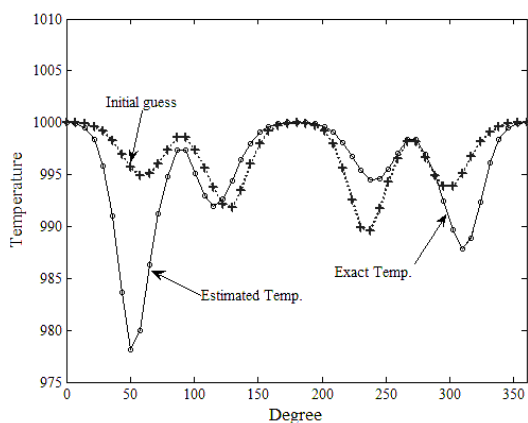
در حالت $\sigma=0$ مورد بررسی قرار گرفته اند. در شکل (۸-الف) مجرای خنک کن محاسبه شده بازای $Bi=0.17$ و $Bi=0.13$ و شکل (۸-ب) نحوه تغییرات دمای مرز خارجی در طول بهینه یابی در این حالت نشان داده شده اند. شکل (۹) نیز نمودارهای مشابهی را برای حالت $Bi=0.17$ نمایش می دهد. نتایج حاصل بازای $Bi=2.0$ در شکل (۳) نشان داده شده است. در شکل (۱۰) نمودار کاهشی تابع هدف در تخمین مجرای خنک کن داخلی نسبت به اختلاف معیارها نشان داده شده است.



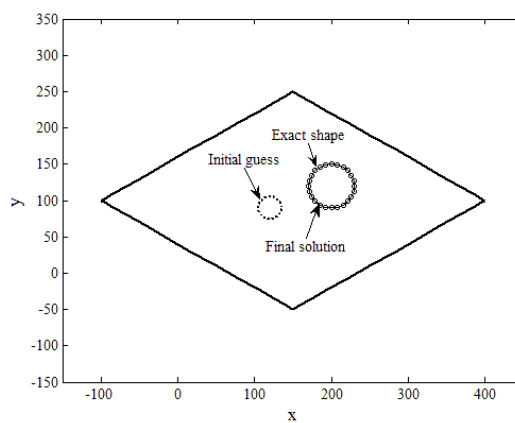
شکل ۷- روند تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن در $Bi=2.0$



شکل ۸- (الف) تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن (ب) دمای تخمین زده شده در $Bi=0.13$

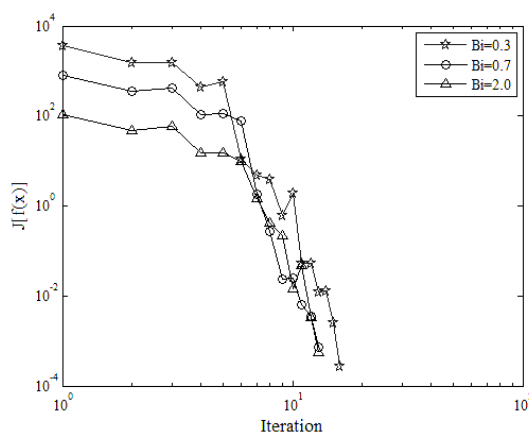


(ب)



(الف)

شکل ۹- (الف) تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن (ب) دمای تخمین زده شده در $Bi=0.7$



شکل ۱۰- نمودار کاهش تابع هدف در تخمین محل و اندازه مجرای خنک کن نسبت به تعداد تکرار نسبت به اعداد بایوت.

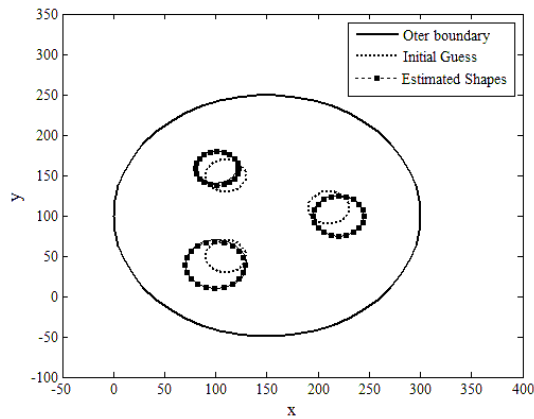
در جدول (۳) مقادیر تکرار، تابع هدف و خطای نسبی بر حسب عدد بایوت نشان داده شده که با توجه به این جدول در تمامی حالات معیار همگرایی 0.005 در نظر گرفته شده است. مقادیر تابع هدف و خطای نسبی اولیه از مقادیر $1188/8$ و 0.3006 بعد از 15 تکرار به مقادیر 0.0026 و 0.000489 می رسند. مقادیر تابع هدف و خطای نسبی اولیه به ترتیب از $232/4336$ و 0.1300 بعد از 12 تکرار به مقادیر 0.0034 و 0.000397 می رسند.

جدول ۴- پارامترهای دقیق و تخمینی با استفاده از الگوریتم معکوس نسبت به اعداد بایوت مختلف در مسئله دوم.

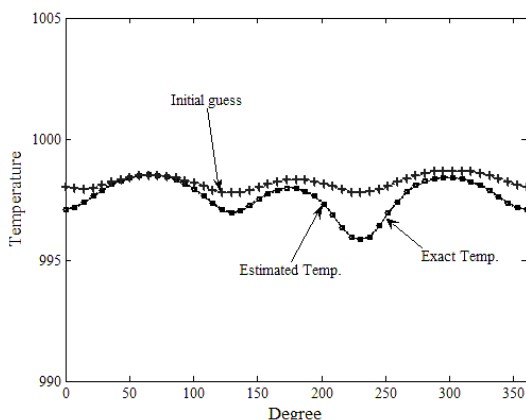
Bi	پارامترهای دقیق			پارامترهای تخمینی
	0.3	0.7	0.2	0.2
r	30	$30/0.22$	$29/9556$	$29/9357$
x_0	200	$119/9959$	$119/9537$	$200/0.477$
y_0	120	$119/9847$	$120/0.387$	$120/0.184$

مقادیر تخمینی پارامترهای شکل در این مسئله در جدول (۴) آورده شده است که مطابق آن در حالت $Bi=0.3$ مقدار شعاع تخمینی به $30/0.22$ و مقادیر مرکز مختصات تخمینی به $(119/9959, 119/9847)$

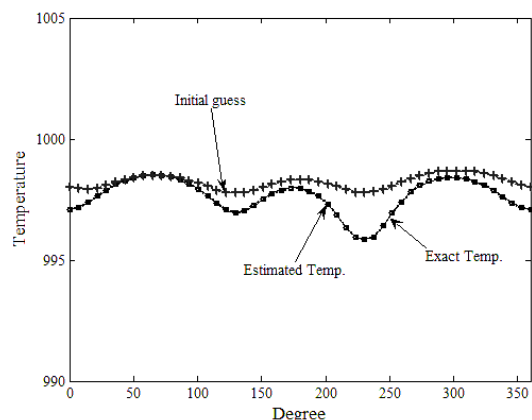
رسیده اند. در صورتی که در حالت $Bi=0.7$ شعاع تخمینی به $29/9556$ و مرکز مختصات تخمینی به $(120/0387, 199/9573)$ رسیده اند. با توجه به نتایج بدست آمده می توان گفت که هرچه مقدار عدد بایوت بیشتر باشد سرعت همگرایی افزایش می یابد. افزایش گرادیان های دمایی باعث افزایش جهت کاهش و سرعت همگرایی در الگوریتم بهینه یابی می شود.



شکل ۱۱- تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن در استوانه.



(ب)



(الف)

شکل ۱۲- (الف) تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن در استوانه (ب) دمای تخمین زده شده در $\sigma=0$.

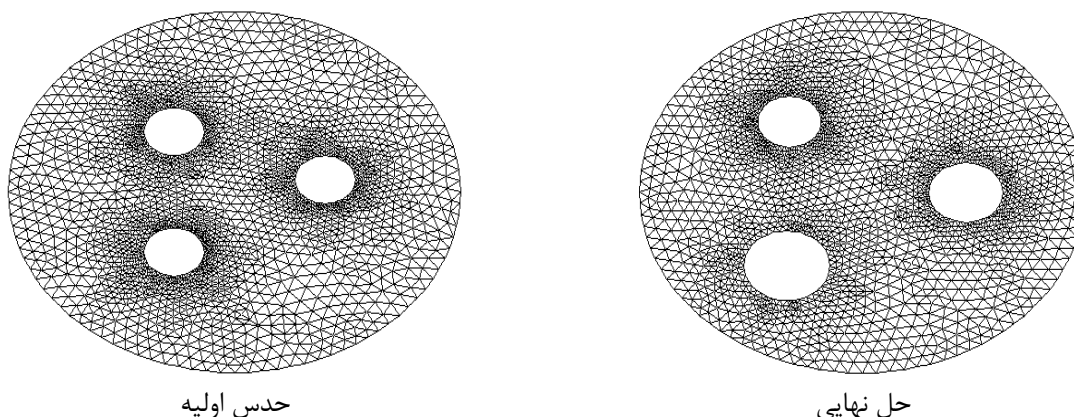
جدول ۵- پارامترهای دقیق و تخمینی با استفاده از الگوریتم معکوس در استوانه در مسئله سوم.

پارامترهای دقیق			پارامترهای تخمینی			
r	۲۵	۳۰	۲۰	۲۴/۹۴۳۹	۲۹/۱۵۰۶	۲۱/۳۱۹۶
x_0	۲۲۰	۱۰۰	۱۰۰	۲۲۰/۰۸۶۲	۹۹/۳۸۵۴	۱۰۱/۰۷۸۹
y_0	۱۰۰	۴۰	۱۶۰	۹۹/۶۴۹۴	۳۹/۰۲۶۲	۱۵۸/۲۰۲۲

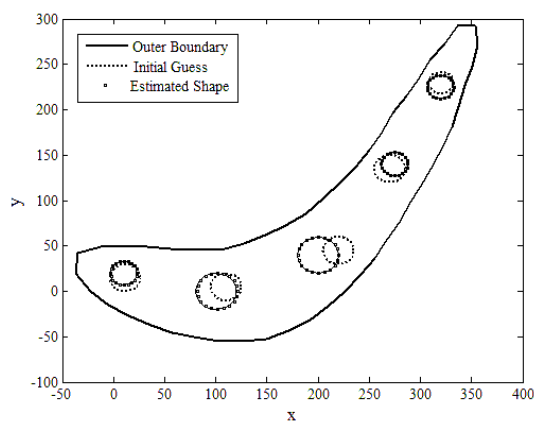
مسئله سوم

در این مسئله تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن با در نظر گرفتن $\sigma=0$ در دو شکل استوانه و پره توربین انجام گرفته است. در شکل (۱۱) محل و اندازه مجاری خنک کن تعیین شده در استوانه نشان داده شده اند. در شکل (۱۲-الف) نحوه تغییرات دمای مرز خارجی در طول بهینه یابی و شکل (۱۲-ب) کاهش

تابع هدف در تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن داخلی در استوانه نشان داده شده اند. مقادیر تابع هدف و خطای متوسط اولیه برابر ۲۹/۱۹۵۵ و ۰/۵۹۰۶ می باشند که بعد از ۲۳۹ تکرار به ترتیب به مقادیر ۰/۰۰۹۴ و ۰/۰۱۰۲ رسیده اند. برای سه مجرا با توجه به جدول (۵) به ترتیب شعاع دقیق برابر ۳۰، ۲۵ و ۲۰ و مرکز مختصات دقیق برابر (۲۲۰، ۱۰۰)، (۴۰، ۱۰۰) و (۱۶۰، ۱۰۰) می باشند.



شکل ۱۳- روند تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن در استوانه.



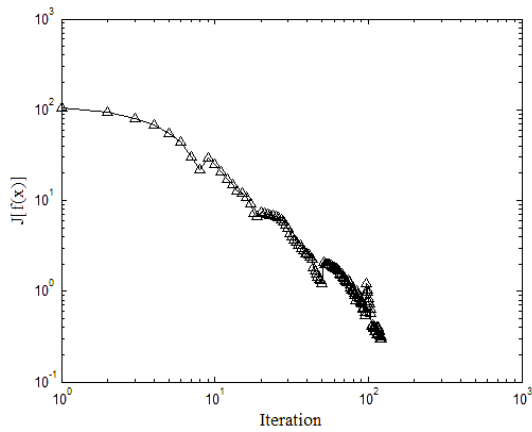
شکل ۱۴- تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن در پره توربین گاز.

جدول ۶- پارامترهای دقیق و تخمینی با استفاده از الگوریتم معکوس در پره توربین در مسئله سوم.

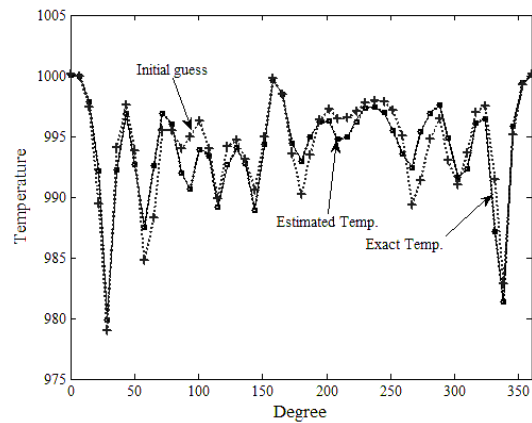
	پارامترهای دقیق					پارامترهای تخمینی				
r	۱۳	۲۰	۲۰	۱۳	۱۳	۱۳/۱۲۳	۲۰/۱۰۲۹	۱۹/۹۲۵۱	۱۲/۹۹۴۱	۱۳/۱۲۰۲
x_0	۱۰	۱۰۰	۲۰۰	۲۷۵	۳۲۰	۱۰/۲۳۴۹	۱۰/۱۸۷۵۰	۲۰۰/۳۶۲۳	۲۷۵/۰۲۱	۳۲۰/۰۰۳
y_0	۲۰	۰	۴۰	۱۴۰	۲۲۵	۱۹/۹۲۶۹	۰/۰۸۴۹	۴۰/۰۸۱۶	۱۴/۰۳۲۳	۲۲۴/۹۸۶۹

شعاع تخمینی مجاری برابر با ۲۴/۹۴۳۹، ۲۹/۱۵۰۶، ۲۱/۳۱۹ و مراکز مختصات تخمینی برابر با (۹۹/۶۴۹۴)، (۲۲/۰۸۶۲)، (۳۹/۰۲۶۲، ۹۹/۳۸۵۴) و (۱۵۸/۵۰۲۲، ۱۰۱/۰۷۹۸) بدست آمده اند. شکل (۱۳) روند حل شکل تخمینی در $Bi=2$ در تعدادی از تکرارهای الگوریتم معکوس را نمایش می دهد. در شکل (۱۴) محل و اندازه مجاری خنک کن در پره توربین گاز نشان داده شده اند. در شکل (۱۵-الف) نحوه تغییرات دمای مرز

خارجی در طول بهینه یابی و شکل (۱۵-ب) کاهش تابع هدف در تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن داخلی در پره توربین گاز آورده شده اند. در جدول (۶) شعاع و مراکز مختصات تخمینی برای پنج مجرا نشان داده شده اند. در شکل (۱۶) روند حل شکل مجاری محاسبه شده در پره های توربین گاز در تعدادی از تکرار های الگوریتم معکوس آورده شده است.

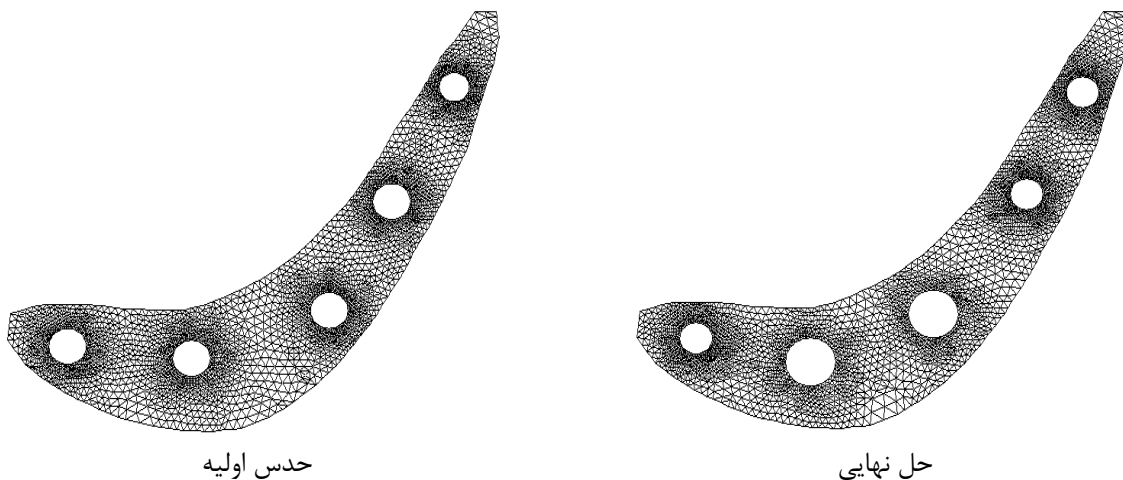


(ب)



(الف)

شکل ۱۵- (الف) تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن در پره توربین گاز (ب) دمای تخمین زده شده در $\sigma=0$.



شکل ۱۶- روند تخمین محل و اندازه مجاری خنک کن در پره توربین گاز

جدول ۷- مقادیر تکرار، تابع هدف و خطای متوسط در پره و استوانه در مسئله سوم.

شکل	ϵ	تعداد تکرار	تابع هدف اولیه	تابع هدف نهایی	خطای اولیه	خطای نهایی
شکل ۱۱	۰/۰۱	۲۳۹	۲۹/۱۹۵۵	۰/۰۰۹۴	۰/۵۹۰۶	۰/۰۱۰۲
شکل ۱۴	۰/۳	۱۲۲	۱۶۲/۹۰۰۹	۰/۲۹۵۳	۱/۳۹۸۲	۰/۰۴۸۳

با توجه به جدول (۷) مقادیر تابع هدف و خطای متوسط اولیه به ترتیب برابر ۱۶۲/۹۰۰۹ و ۱/۳۹۸۲ می باشند که بعد از ۱۲۲ تکرار به مقادیر ۰/۲۹۵۳ و ۰/۰۴۸۳ می رسند.

۶- نتیجه گیری

در تخمین شکل مجاری خنک کن از روش هدایت حرارتی معکوس استفاده شده است. در الگوریتم معکوس ابتدا با استفاده از تولید شبکه بی سازمان میدان حل گسسته سازی شده و معادلات دیفرانسیل پاره ای با استفاده از المان محدود حل شده و تابع هدف با استفاده از روش گرادیان مزدوج کاهش پیدا کرد است. با توجه به نتایج می توان گفت که هر چه مقدار اختلاف معیار کمتر باشد دقت الگوریتم افزایش می یابد. هرچه عدد بایوت افزایش یابد سرعت همگرایی الگوریتم معکوس افزایش می یابد. در الگوریتم معکوس با افزایش مجاری خنک کن، پارامترهای مجهول افزایش یافته و در نتیجه سرعت همگرایی کاهش می یابد.

مراجع

- [1] Ozisik, M.N., and Orlande, H.R.B., "Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications," Taylor and Francis, New York, (2000).
- [2] Huang, C.H., and Chao, B.H., "An Inverse Geometry Problem in Identifying Irregular Boundary Configurations," Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 40, pp. 2045-2053, (1997).
- [3] Cheng, C.H., and Wu, C.Y., "An Approach Combining Body-fitted Grid Generation and Conjugate Gradient Methods for Shape Design in Heat Conduction Problems," Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 37, pp. 69-83, (2000).
- [4] Lan, C.H., Cheng, C.H., and Wu, C.Y., "Shape Design of Heat Conduction Problems using Curvilinear Grid Generation Conjugate Gradient and Redistribution Methods," Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 39, pp. 487-510, (2001).
- [5] Cheng, C.H., and Chang, M.H., "Shape Identification by Inverse Heat Transfer Method," J. Heat Transfer, Vol. 125, pp. 224-231, (2003).
- [6] Kennon, S.R., and Dulikravich, G.S., "The Inverse Design of Internally Cooled Turbine Blades," ASME J. Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 107, pp. 123-126, (1985).
- [7] Kennon, S.R., and Dulikravich, G.S., "Inverse Design of Multiholed Internally Cooled Turbine Blades," Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 22, pp. 363-375, (1986).
- [8] Dulikravich, G.S. "Inverse Design of Proper Number Shapes Sizes and Locations of Coolant Flow Passages," Proceeding of 10th Annual Workshop on CFD Application in Propulsion, Huntsville, USA, (1992).
- [9] Chiang, T.L., and Dulikravich, G.S., "Inverse Design of Composite Turbine Blade Circular Coolant Flow Passages," J. Turbomachinery, Vol. 112, pp. 275-282, (1990).
- [10] Dulikravich, G.S., and Martin, T.J., "Inverse Design of Super-elliptic Cooling Passages in Coated Turbine Blade Airfoil," J. Thermophysics and Heat Transfer, Vol. 8, pp. 288-

- 294, (1994).
- [11] Huang, C.H., and Hsiung, T.Y., "An Inverse Design Problem of Estimating Optimal Shape of Cooling Passages in Turbine Blades," Int. J. Heat Transfer, Vol. 42, pp. 4307-4319, (1999).
- [12] Dulikravich, G.S., and Martin, T.J., "Analysis and Multidisciplinary Optimization of Internal Coolant Networks in Turbine Blades," J. Propulsion Power, Vol. 18, pp. 896-906, (2002).
- [13] Ghadamyari, V., "Estimation of the Optimal Shape and the Location of Cooling Passages in Turbine Blades using Inverse Heat Conduction," M.Sc. Thesis, University of Tehran, Department of Mechanical Engineering, Tehran, Iran (2005).
- [14] Partial Differential Equation Toolbox User's Guide in MATLAB Software, 1984-2006 The MathWorks, Inc.
- [15] Fazeli, H., "Shape Design of Gas Turbine Cooling Passages via Gradient-based Optimization Method," M.Sc. Thesis, K.N. Toosi University of Technology, Department of Erospace Engineering, Tehran, Iran, (2009).

فهرست نمادهای انگلیسی

شعاع	:	r
عدد بایوت	:	Bi
جهت کاهش	:	d
ضریب جابجایی حرارتی	:	h
تابع هدف	:	J
گرادیان تابع هدف	:	J'
ضریب هدایت حرارتی	:	k
تعداد سنسورها	:	M
تعداد نقاط در یک المان	:	N
جهت نرمال	:	n
شار حرارتی	:	q
دمای تخمینی	:	T
دمای خنک کن	:	T_c
دمای گاز بیرونی	:	T_g
تابع حساسیت	:	ΔT
مختصات طولی مرکز	:	x_0
مختصات عرضی مرکز	:	y_0
دمای اندازه گیری شده	:	Y
دمای دقیق	:	Y_{exact}

نمادهای یونانی

اندازه گام	:	β
تابع شکل مجهول	:	Γ
میدان محاسباتی	:	Ω
ضریب لاگرانژ	:	λ
تابع آزمون	:	ν
تابع ضربه	:	δ
موقعیت زاویه ای	:	θ
عدد تصادفی	:	ω
تابع هندسی یک المان	:	ϕ
معیار همگرایی	:	ε
انحراف معیار	:	σ

Abstract

Shape design in inverse heat conduction problems has many important engineering applications. Design of the cooling channels in a gas turbine blade is an example. In spite of the availability of solution algorithms for such problems, research for more efficient methods is still carrying out by many scientist and engineers. In this paper, a numerical adjoint-based shape optimization method is presented in which the finite element method is used to solve the analysis, adjoint and sensitivity equations on an unstructured grid. The proposed algorithms used to find the correct positions and sizes of a number of cooling channels inside a heat conducting body. Design examples show the applicability of the proposed method in the solution of such inverse problems even when the input data are poised with some measurement errors.