



کمانش دینامیکی و ارتعاشات تیر ساندویچی با

هسته ER

در این مقاله به بررسی کمانش دینامیکی و ارتعاشات تیر ساندویچی با هسته ER (electrorheological) پرداخته شده است. بدین منظور ابتدا المان تیر ساندویچی با استفاده از روش اجزاء محدود و بر اساس مدل بینگهام تعریف شده و سپس ماتریس‌های جرم، استهلاک و سفتی بدست آمده است. پس از استخراج روابط مورد نظر، به کمک روش انتگرال‌گیری مستقیم پاسخ گذرای سیستم به یک تحریک اولیه محاسبه گردیده است. تأثیر پارامترهای مختلف همچون هندسه تیر و خواص هسته ER بر ارتعاشات و پاسخ گذرای تیر بررسی شده است. علاوه بر این، بارهای دینامیکی بحرانی و همچنین نواحی پایداری محاسبه شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر آنها مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج عددی بدست آمده نشان می‌دهد که با اعمال میدان الکتریکی، بطور قابل ملاحظه‌ای بر میرایی و همچنین پایداری دینامیکی سیستم افزوده می‌گردد.

جلیل رضایی پژند^۲
استاد

واژه‌های راهنما: تیر ساندویچی هوشمند، سیال ER، اجزاء محدود، پاسخ گذرا، کمانش دینامیکی.

۱- مقدمه

مسئله ارتعاشات و کمانش دینامیکی تیرها از مسائل بسیار مهم مهندسی بشمار می‌رود که مدت‌هاست مورد توجه محققین قرار دارد. با توجه به اینکه این مسئله در زمره مسائل پایداری سازه‌ای قرار دارد از اهمیت دوچندانی در مهندسی مکانیک و هوافضا برخوردار است و تحقیقات زیادی در این زمینه صورت گرفته است. شی‌جی کوی و همکارانش [۱] کمانش دینامیکی ستون‌های الاستیک که تحت بارگذاری ضربه‌ای با سرعت متوسط قرار دارند را بصورت تحلیلی بررسی نموده‌اند و حل تحلیلی پاسخ دینامیکی ستونی که تحت تأثیر بار ضربه‌ای به صورت نیم‌سینوسی قرار دارد را بدست آورده‌اند. آنها همچنین کمانش دینامیکی صفحات تحت بارگذاری ضربه‌ای را با استفاده از روش اجزاء محدود مورد مطالعه قرار داده‌اند [۲]. کویاک [۳] معیار جدیدی برای تخمین بار بحرانی کمانش دینامیکی سازه‌های نازک ارائه نموده است که مطابقت مناسبی با معیارهای قبلی دارد. کنی و همکارانش [۴] کمانش دینامیکی تیرهای نازک با نقص اولیه را مورد بررسی قرار داده‌اند. مویتا و همکارانش [۵] کمانش و ارتعاشات آزاد سازه‌های کامپوزیتی چند لایه را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها در کار خود از روش اجزاء محدود بر اساس تئوری‌های مرتبه بالای تغییر شکل برشی استفاده نمودند و به نتایج خوبی در این زمینه دست یافتند.

^۱ کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

^۲ نویسنده مسؤل، استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد jrezaeep@um.ac.ir

یکی از روش‌های افزایش پایداری سیستم‌ها، مستهلک کردن ارتعاشات است. با استفاده از روش‌های مختلف از قبیل استفاده از دمپرهای ویسکوز و یا استفاده از مواد هوشمند جدید نظیر سیال‌های ER، می‌توان به این هدف دست یافت. سیال‌های ER دسته‌ای از مواد هوشمند هستند که از ذرات جامد ریز نیمه هادی به همراه یک فاز روغنی تشکیل شده‌اند که خواص مکانیکی آنها در اثر اعمال میدان الکتریکی تغییر می‌کند. رفتار سیالات ER تحت تأثیر میدان الکتریکی از یک سیال نیوتنی که در آن ذرات بصورت آزادانه حرکت می‌کنند به سیالی تغییر می‌کند که در آن ذرات بصورت زنجیره‌هایی مرتب می‌شوند و در نتیجه در مقابل نیروها یا تنش‌های برشی از خود مقاومت بیشتری نشان می‌دهند. یکی دیگر از ویژگی‌های این مواد سرعت پاسخ آنها به میدان الکتریکی است که در حد چند میلی ثانیه می‌باشد. این دو ویژگی مهم یعنی تغییرات قابل کنترل و برگشت‌پذیر خواص مکانیکی و همچنین پاسخ سریع آنها به میدان الکتریکی سبب شده است که در دهه‌های اخیر محققین از این سیالات به منظور کنترل هوشمند سیستم‌های ارتعاشی استفاده نمایند [۶].

تحقیقات آزمایشگاهی زیادی برای بدست آوردن خواص مکانیکی سیال‌های ER تحت تأثیر میدان الکتریکی انجام شده است. علی‌الواحد و همکارانش [۷] خواص سیال ER در بارگذاری‌های وابسته به زمان را بصورت تئوری و آزمایشگاهی مطالعه نموده است. پارک و همکارانش [۸] تأثیر تغییرات دما و میدان الکتریکی را بر مقاومت سیال ER بصورت آزمایشگاهی بررسی نموده‌اند. هوگیون‌لی و چوی خواص دینامیکی سیال ER تحت مودهای برشی و فشاری را بررسی نموده‌اند [۹]. تحقیقات انجام شده بر روی این سیالات منجر به ارائه مدل‌های ریاضی متفاوتی برای توجیه رفتار دینامیکی آنها در مرحله پیش-تسلیم و پس-تسلیم شده است [۱۰ و ۱۱]. مشهورترین مدل ارائه شده برای حالت پس-تسلیم سیالات ER مدل بینگهام می‌باشد که توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده است [۱۲].

با توسعه گستره استفاده از سیالات ER در مسائل کنترل ارتعاشات، محققین مدل‌های متنوعی برای بکارگیری این مواد در سازه‌های ارتعاشی ارائه کردند. یکی از مؤثرترین روش‌هایی ارائه شده، استفاده از یک لایه ER در تیرها و صفحه‌های ساندویچی می‌باشد. این مدل که به مدل استهلاک لایه محدود شده مشهور است پیش‌تر نیز مورد توجه محققین قرار داشته است [۱۳]. در این مدل یک لایه ویسکوالاستیک توسط یک لایه محدود کننده به سازه مرتعش اضافه می‌گردد و باعث مستهلک شدن ارتعاشات سیستم می‌شود. نظر به اینکه استفاده از سیال ER به جای مواد ویسکوالاستیک معمول خواص کنترلی سیستم را بالا می‌برد، این مدل اخیراً مورد توجه زیادی قرار گرفته است. جیایی‌یه و همکارانش [۱۴ و ۱۵] به تحلیل پایداری دینامیکی تیرها و صفحات چند لایه با هسته ER پرداخته‌اند. آنها از مدل ویسکوالاستیک کوین برای مدل‌سازی سیال ER استفاده نموده‌اند. نارایانا و جانسن [۱۶] با استفاده از روش اجزا محدود ارتعاشات صفحات ساندویچی مایل با هسته ER را مورد بررسی قرار داده‌اند. رضایی پژند و پهلوان پاسخ گذرای تیر ساندویچی با هسته ER را به کمک روش اجزاء محدود مطالعه نموده‌اند. آنها از مدل بینگهام برای بیان رفتار سیال ER تحت تأثیر میدان الکتریکی استفاده نمودند [۱۷].

در این تحقیق، یک تیر ساندویچی سه لایه در نظر گرفته شده که تحت بارگذاری محوری قرار دارد. جهت کاهش ارتعاشات تیر از سیال ER در لایه میانی استفاده گردیده است. بر اساس مدل بینگهام و به کمک

روش اجزاء محدود، المان مربوط این تیر استخراج شده و دستگاه معادلات حاکم بر حرکت تیر بدست آمده است. اعمال روش اجزاء محدود برای این مدل منجر به ایجاد ماتریس‌های جرم، استهلاک و سفتی در سمت چپ دستگاه معادلات و یک بردار نیرو در سمت راست دستگاه معادلات شده که ناشی از اعمال میدان الکتریکی به سیال ER می‌باشد. جدا شدن اثر سیال ER به صورت یک بردار نیروی مستقل در سمت راست دستگاه معادلات سبب شده است که بتوان تأثیر مستقیم میدان الکتریکی بر رفتار ارتعاشی سیستم را بررسی نمود. از حل مقادیر ویژه دستگاه معادلات فرکانس‌های طبیعی تیر استخراج گردیده و اثر پارامترهای مختلف بر آن بررسی شده است. در ادامه به کمک روش انتگرال‌گیری مستقیم دستگاه معادلات حاکم بر حرکت تیر حل شده و پاسخ ارتعاشی سیستم به یک تحریک اولیه بدست آمده است. علاوه بر این با اعمال بار محوری دینامیکی هارمونیک به جای بار استاتیکی، پایداری دینامیکی تیر فوق مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- مدل بینگهام برای سیال ER

سیال‌های ER دسته‌ای از مواد هوشمند هستند که از ذرات جامد ریز نیمه‌هادی به همراه یک فاز روغنی تشکیل شده‌اند. رفتار سیالات ER در اثر میدان الکتریکی از یک سیال نیوتنی که در آن ذرات بصورت آزادانه حرکت می‌کنند به ماده‌ای با رفتار پلاستیک بینگهام تغییر می‌کند که در آن ذرات بصورت زنجیره‌هایی مرتب می‌شوند و در نتیجه در مقابل نیروها یا تنش‌های برشی از خود مقاومت بیشتری نشان می‌دهند. تنش تسلیم این مواد با میدان الکتریکی طبق رابطه (۱) تغییر می‌کند [۷].

$$\tau = \eta \dot{\gamma} + \tau_y(\tilde{E}) \quad (1)$$

که در آن τ تنش برشی، $\dot{\gamma}$ نرخ برش، η لزجت و $\tau_y(\tilde{E})$ تنش برشی تسلیم سیال ER می‌باشند. در این رابطه تابعی از شدت میدان الکتریکی \tilde{E} است و بصورت توانی با شدت میدان افزایش می‌یابد.

$$\tau = \eta \dot{\gamma} + \alpha \tilde{E}^\beta \quad (2)$$

پارامترهای α و β از مشخصه‌های ذاتی سیال می‌باشند و معمولاً از طریق آزمایش بدست می‌آیند.

۳- مدل تیر ساندویچی

به منظور تحلیل یک تیر سه لایه ساندویچی با هسته ER، تیر شکل (۱) در نظر گرفته شده که در آن یک لایه ER با دو لایه الاستیک در بالا و پایین محدود شده است.

مدل ریاضی این مسئله بر اساس فرض‌های زیر استوار است [۱۷].

از اینرسی پیچشی و تغییر شکل برشی لایه‌های الاستیک صرف نظر می‌شود.

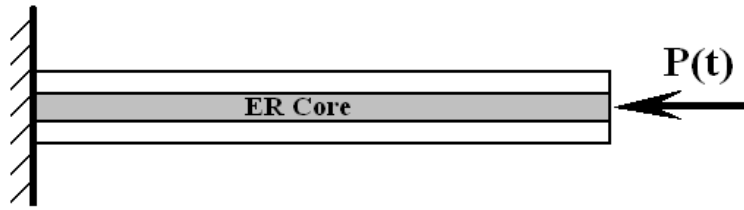
هیچ تنش نرمالی برای لایه میانی در نظر گرفته نمی‌شود.

هیچ لغزشی بین سطح مشترک لایه‌ها اتفاق نمی‌افتد.

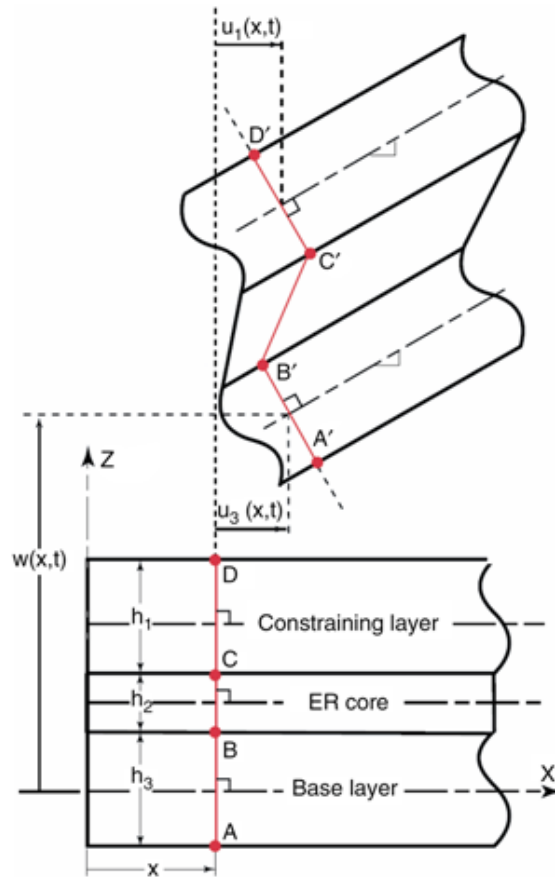
تنش عمودی عرضی برای هیچ یک از لایه‌ها در نظر گرفته نمی‌شود و جابجایی عرضی تمام

نقاطی که روی یک مقطع عرضی قرار دارند با هم برابر است.

خطوط راست مقطع عرضی لایه میانی پس از تغییر شکل بصورت راست باقی خواهد ماند.



شکل ۱- تیر ساندویچی با هسته ER



شکل ۲- وضعیت لایه‌ها قبل و بعد از تغییر شکل

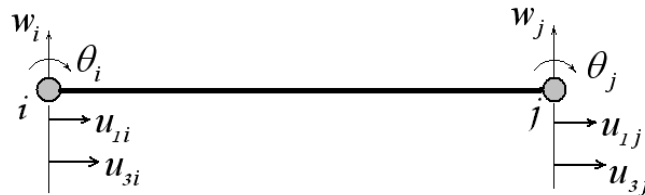
کرنش برشی در لایه میانی طبق رابطه (۳) بیان می‌شود.

$$\gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad (3)$$

که w بیانگر جابجایی عرضی هر نقطه از تیر و u_2 جابجایی طولی لایه میانی می‌باشد. با توجه به شکل (۲) جمله دوم رابطه (۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{u_1 - u_3}{h_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{h_1 + h_3}{h_2} \right) \quad (4)$$

در این رابطه u_i ($i=1,2,3$) نشان دهنده جابجایی طولی صفحه میانی لایه نام می باشد.



شکل ۳- المان دوگره‌ی تیر ساندویچی سه لایه [۱۷]

۴- مدل اجزاء محدود تیر ساندویچی

برای مدل کردن این مسئله مطابق شکل (۳) یک المان تیر دو گره‌ی با چهار درجه آزادی در هر گره در نظر گرفته شده است. درجات آزادی هر یک از گرہ‌ها به ترتیب جابجایی طولی لایه الاستیک فوقانی (u_1), جابجایی طولی لایه الاستیک تحتانی (u_3), جابجایی عرضی گرہ (w) و دوران زاویه‌ای در هر گرہ (θ) تعریف می شوند. بنابراین بردار جابجایی المان بصورت زیر تعریف می شود.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1(x,t) \\ u_3(x,t) \\ w(x,t) \end{Bmatrix} = [N(x)]\{q(t)\} \quad (5)$$

که در آن $q(t)$ بردار درجات آزادی المان و $N(x)$ تابع شکل المان می باشند و بصورت زیر تعریف می شوند.

$$\{q\} = \{u_{1i} \quad u_{3i} \quad w_i \quad \theta_i \quad u_{1j} \quad u_{3j} \quad w_j \quad \theta_j\}^T \quad (6)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{u_{1i}} & 0 & 0 & 0 & N_{u_{1j}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{u_{3i}} & 0 & 0 & 0 & N_{u_{3j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{w_i} & N_{\theta_i} & 0 & 0 & N_{w_j} & N_{\theta_j} \end{bmatrix} \quad (7)$$

انرژی کل المان فوق بصورت رابطه (۸) نوشته می شود.

$$\pi = T - V + W \quad (8)$$

در رابطه فوق T انرژی جنبشی، V انرژی پتانسیل و W کار نیروهای خارجی می باشند. انرژی پتانسیل برای لایه‌های اول و سوم بصورت زیر نوشته می شود.

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_V \{q\}^T [D_1]^T E_1 [D_1] \{q\} dv \quad (9)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_v \{q\}^T [D_3]^T E_3 [D_3] \{q\} dv \quad (10)$$

که در این روابط $[D_1]$ و $[D_3]$ بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$D_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & z_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} [N] \quad (11)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & z_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} [N] \quad (12)$$

z_1 و z_3 ارتفاع هریک از نقاط لایه‌های اول و سوم نسبت به صفحه میانی هر لایه می‌باشند. انرژی مستهلک شده در لایه میانی نیز از رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود.

$$E_{er} = \int_v \{q\}^T [D_2]^T \eta [D_2] \{\dot{q}\} dv + \int_v \{q\}^T [D_2]^T \tau_y (\tilde{E}) dv \quad (13)$$

که در آن $[D_2]$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$[D_2] = \frac{1}{2h_2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & (h_1 + 2h_2 + h_3) \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \quad (14)$$

انرژی جنبشی دو لایه اصلی و لایه میانی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_v \{\dot{q}\}^T [R_1]^T \rho_1 [R_1] \{\dot{q}\} dv \quad (15)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \int_v \{\dot{q}\}^T [R_3]^T \rho_3 [R_3] \{\dot{q}\} dv \quad (16)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_v \{\dot{q}\}^T [D_2]^T J_2 [D_2] \{\dot{q}\} dv + \frac{1}{2} \int_v \{\dot{q}\}^T [R_2]^T \rho_2 [R_2] \{\dot{q}\} dv \quad (17)$$

که در این روابط ماتریس‌های $[R_1]$ ، $[R_2]$ و $[R_3]$ بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \quad , \quad [R_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \quad , \quad [R_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \quad (18)$$

کار انجام شده توسط نیروی محوری خارجی $P(t)$ نیز بصورت زیر بیان می‌گردد.

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_l P(t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_l \{q\}^T [N]^T [Q]^T P(t) [Q][N] \{q\} dx
 \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن ماتریس $[Q]$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (20)$$

با جایگذاری V ، T و W در رابطه (۸) و اعمال اصل همیلتون معادله حرکت حاکم بر تیر ساندویچی با هسته ER به شکل زیر بدست می‌آید.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + ([K_e] - [K_G]P(t))\{q\} = \{F_{ER}\} \quad (21)$$

در این رابطه $[M]$ ماتریس جرم، $[C]$ ماتریس استهلاک، $[K_e]$ ماتریس سفتی و $[K_G]$ ماتریس سفتی هندسی می‌باشند. همچنین $\{F_{ER}\}$ یک بردار نیروی مستهلک کننده است که از ترم دوم رابطه بینگهام و در اثر میدان الکتریکی ایجاد شده است. رابطه مربوط به هر یک از این ماتریس‌ها در زیر آمده است.

$$[M] = \int_V [R_1]^T \rho_1 [R_1] dv + \int_V [R_3]^T \rho_3 [R_3] dv + \int_V [R_2]^T \rho_2 [R_2] dv + \int_V [D_2]^T J_2 [D_2] dv \quad (22)$$

$$[C] = \int_V [D_2]^T \eta [D_2] dv \quad (23)$$

$$[K_e] = \int_V [D_1]^T E_1 [D_1] dv + \int_V [D_3]^T E_3 [D_3] dv \quad (24)$$

$$[K_G] = \int_l [N]^T [Q]^T P(t) [Q][N] dx \quad (25)$$

$$\{F_{ER}\} = \text{sgn}(\dot{\gamma}) \cdot \int_V [D_2]^T \tau_y (\tilde{E}) dv \quad (26)$$

در رابطه (۲۶) عبارت $\text{sgn}(\dot{\gamma})$ به دلیل ماهیت ذاتی سیال ER در رابطه ظاهر شده است زیرا نیرویی مستهلک کننده‌ای که سیال ایجاد می‌کند همواره در جهت مخالف حرکت خواهد بود. این حالت بسیار شبیه حالتی است که در استهلاک کلمب روی می‌دهد.

۵- روش انتگرال گیری مستقیم

این روش در واقع یک تفاضل محدود است که برای بدست آوردن جابجایی در لحظه t_{i+1} برحسب کمیت‌های جابجایی، سرعت یا شتاب در لحظات قبل استفاده می‌شود [۱۸]. شتاب در لحظه t_i که همان مشتق دوم جابجایی نسبت به زمان است، با نوشتن بسط مرکزی تفاضل محدود بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\ddot{U}_i \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) \quad (27)$$

در این رابطه Δt بازه زمانی می‌باشد. در اینجا تمام بازه‌های زمانی مساوی فرض شده است. بطور مشابه سرعت در لحظه t_i بصورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$\dot{U}_i \approx \frac{1}{2\Delta t}(U_{i+1} - U_{i-1}) \quad (28)$$

با جایگذاری \dot{U}_i و \ddot{U}_i از روابط فوق در معادله دیفرانسیل حاکم می‌توان U_{i+1} را بر حسب مقادیر U_i و U_{i-1} بدست آورد. اما روابط فوق روابط بازگشتی دو مرحله‌ای اند که برای بدست آوردن کمیت مورد نظر در هر لحظه باید مقادیر دو مرحله قبل در اختیار باشد. با حل همزمان روابط (۲۷) و (۲۸) در لحظه t_0 می‌توان U_{-1} را بصورت زیر بدست آورد.

$$U_{-1} = U_0 - \dot{U}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{U}_0 (\Delta t)^2 \quad (29)$$

به منظور استفاده از این روش جهت حل معادله حاکم بر تیر ساندویچی که در قسمت قبل بدست آمد، باید بسط تفاضل محدود $\{q\}$ و $\{\dot{q}\}$ را در معادله (۲۱) جایگزین گردد.

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] (\{q\}_{i-1} - 2\{q\}_i + \{q\}_{i+1}) + \frac{1}{2\Delta t} [C] (\{q\}_{i+1} - \{q\}_{i-1}) + ([K_e] - P(t)[K_G]) \{q\}_i = \{F_{ER}\}_i \quad (30)$$

و در نتیجه رابطه بازگشتی برای $\{q\}$ بصورت زیر بدست می‌آید.

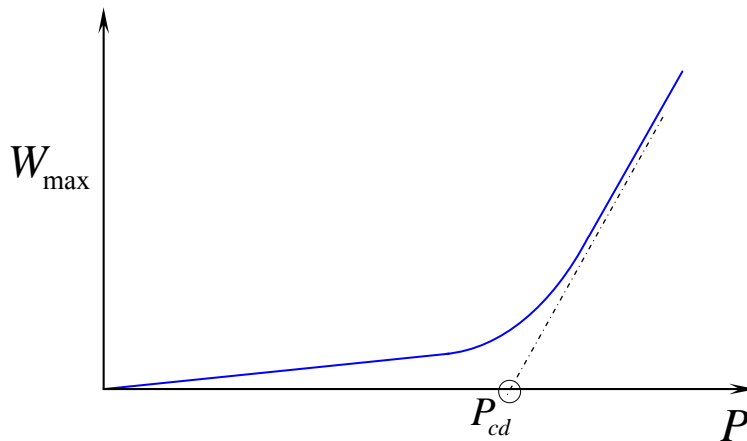
$$\begin{aligned} \{q\}_{i+1} = & \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right]^{-1} \left\{ \{F_{ER}\}_i - \left[[K_e] - P(t)[K_G] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [M] \right] \{q\}_i \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \{q\}_{i+1} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

۶- تعیین بار دینامیکی بحرانی

زمانیکه سازه‌ها تحت بارگذاری‌های دینامیکی محوری قرار می‌گیرند ممکن است کمانش دینامیکی در آنها رخ دهد. در چنین حالتی پیش‌بینی بار دینامیکی بحرانی از اهمیت بسزایی برخوردار است. بار دینامیکی بحرانی به دامنه‌ای از بار دینامیکی اطلاق می‌شود که به ازای آن سازه دچار ناپایداری می‌گردد. برای تیر اویلر-برنولی تک لایه که تحت بارگذاری هارمونیک محوری قرار دارد، می‌توان معادله بار دینامیکی بحرانی را با استفاده از حل معادله متیو^۱ بدست آورد. اما به دلیل وجود ترم‌های ناشی از سیال ER در رابطه (۲۱)، اعمال این روش به مدل حاضر میسر نمی‌باشد. به همین دلیل از یک روش تقریبی برای محاسبه بار دینامیکی بحرانی استفاده می‌شود. بدین منظور در یک فرکانس خاص بار، پاسخ زمانی سیستم به ازای اندازه‌های متفاوت دامنه بار بدست آورده شده و سپس نمودار ماکزیمم جابجایی تیر را بر حسب دامنه بار

¹ Mathieu

رسم می‌گردد. این نمودار در بارگذاری‌های محوری، مشابه شکل (۴) بوده و دارای یک مجانب مایل است که با رسم آن می‌توان اندازه بار دینامیکی بحرانی را تقریب زد [۲].



شکل ۴- نمودار ماکزیمم جابجایی تیر بر حسب اندازه بار دینامیکی

۷- بررسی صحت نتایج

برای بررسی صحت روش‌های بکارگرفته شده، نتایج حاصل از این کار با نتایج روش‌های تحلیلی و یا نتایج ارائه شده توسط محققین دیگر مقایسه شده است. با توجه به اینکه در زمینه تحلیل ارتعاشات و کمانش دینامیکی تیر ساندویچی با هسته ER بر اساس مدل بینگهام تحقیقات زیادی انجام نشده است، در این مقاله قسمت‌های مختلف روش حل بطور جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند. یعنی در ابتدا صحت مدل اجزاء محدود استخراج شده مورد بررسی قرار می‌گیرد و در ادامه صحت روش بکار گرفته شده برای بدست آوردن بار کمانشی بحرانی بررسی می‌شود.

به منظور بررسی صحت مدل اجزاء محدود، فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از این مدل با آنچه که در تحقیق هایکوینگ و کینگ ارائه شده، مقایسه گردیده است [۱۹]. آنها در کار خود پاسخ ارتعاشی یک تیر دوسر گیردار ساندویچی با لایه‌های فولاد و هسته ER را بصورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج آنها و نتایج بدست آمده از مدل اجزاء محدود ارائه شده، در جدول (۱) مقایسه شده‌اند. همانطور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود استفاده از مدل اجزاء محدود ارائه شده با پنج المان منجر به ایجاد دقت مناسبی در نتایج بدست آمده شده است.

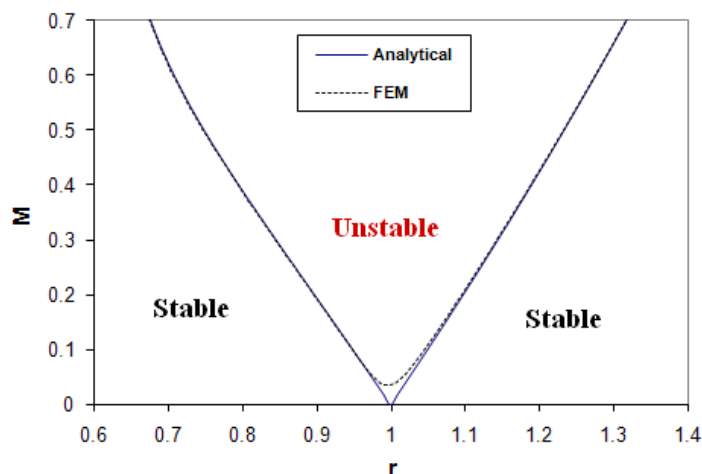
جدول ۱- مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی شش فرکانس طبیعی اول تیر ساندویچی دوسر گیردار (Hz)

شماره مود	نتایج عددی بدست آمده از این تحقیق	نتایج آزمایشگاهی تحقیق هایکوپینگ [۱۹]
1	4.6	-
2	12.67	13
3	24.85	22
4	41.07	41
5	61.35	60
6	85.69	84

به منظور بررسی صحت روش ارائه شده در این مقاله برای استخراج بار کمانشی دینامیکی، نتایج این روش برای یک تیر تک لایه با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. در این بررسی یک تیر تک لایه آلومینیومی دوسر مفصل تحت بارگذاری هارمونیک محوری به صورت زیر قرار گرفته است.

$$P = P_0 + P_1 \cos(vt) \quad (32)$$

که در آن P_0 ضریب استاتیکی بار، P_1 دامنه بار هارمونیک و v فرکانس بار می باشند. برای بدست آوردن ناحیه پایداری در هر مرحله یک فرکانس خاص در نظر گرفته شده است و با استفاده از روش ارائه شده در قسمت قبل بار کمانشی دینامیکی در آن فرکانس بدست آمده است. به کمک بارهای بحرانی بدست آمده در فرکانس های مختلف نواحی پایداری بدست آمده اند. نتایج بدست آمده از این روش در شکل (۵) با نتایج بدست آمده از روش تحلیلی [۲۰] مقایسه شده اند. این شکل که برای اولین ناحیه پایداری تیر رسم شده همخوانی مناسبی بین نتایج تحلیلی و نتایج مدل اجزاء محدود ارائه شده نشان می دهد.



شکل ۵- مقایسه ناحیه پایداری بدست آمده از دو روش تحلیلی و اجزاء محدود

در شکل (۵) پارامترهای بی بعد r و M بصورت زیر تعریف می شوند.

$$r = v/2\omega \quad (33)$$

$$M = \frac{P_1}{2(P_n - P_0)} \quad (34)$$

که در آن P_n بار کمانشی استاتیکی تیر بوده و ω طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\omega = \omega_n \sqrt{\frac{1 - P_0}{P_n}} \quad (35)$$

در این رابطه ω_n فرکانس‌های طبیعی تیر می‌باشند.

جدول ۲- خواص هندسی تیر ساندویچی

600 (mm)	طول تیر (L)
30 (mm)	عرض مقطع تیر (b)
3 (mm)	ضخامت لایه‌های اصلی (h_3, h_1)
3 (mm)	ضخامت لایه ER (h_2)

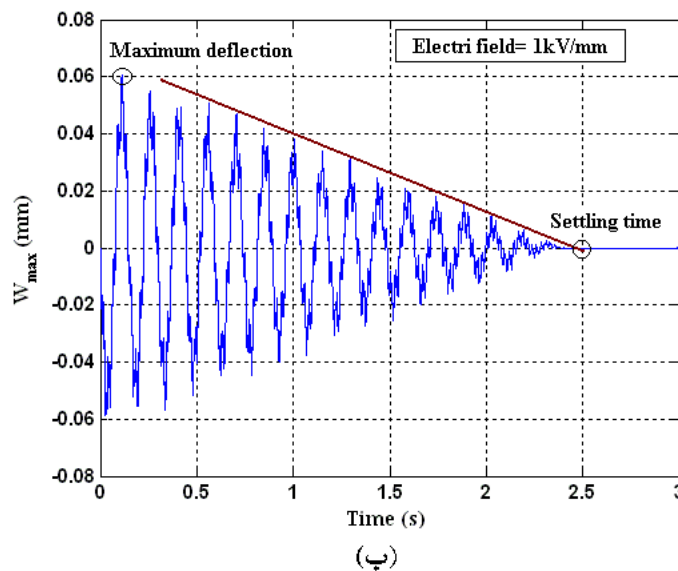
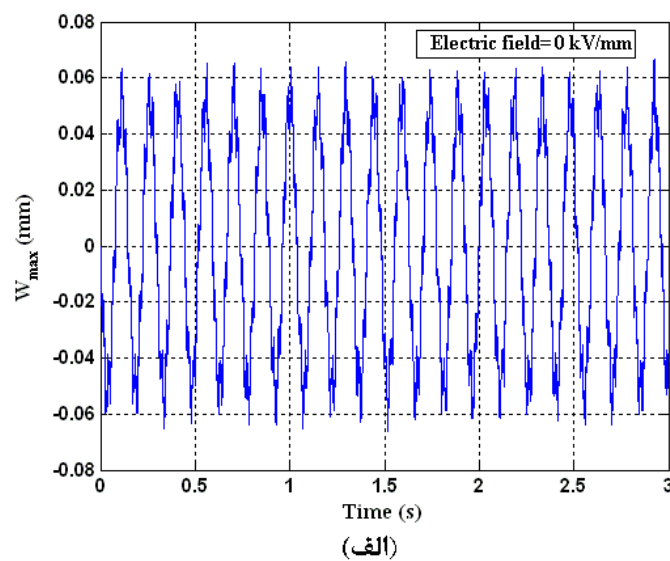
۸- بررسی نتایج عددی

به منظور بررسی رفتار ارتعاشی تیر ساندویچی با هسته ER، یک تیر یک‌سر گیردار با مشخصات مذکور در جدول (۲) در نظر گرفته شده است. لایه‌های اصلی تیر در موارد مختلف از جنس آلومینیوم و فولاد فرض شده‌اند. همچنین در این تیر از سیال ER با صمغ عربی^۱ به عنوان ذرات نیمه هادی و روغن ترانسفورماتور به عنوان فاز مایع استفاده شده است که دارای چگالی 1100 kg/m^3 و لزجت 10 CSt بوده و طبق تحقیق پارک [۸] ضرایب مورد نیاز رابطه بینگهام برای آن می‌تواند بصورت $\alpha = 42.57$ و $\beta = 1.18$ تعریف شود. این تیر تحت تأثیر تحریک عرضی اولیه 0.01 N/s به ارتعاش در می‌آید. در غیاب میدان الکتریکی پاسخ گذرای تیر بصورت شکل (۶-الف) خواهد بود. اما در صورت برقراری میدان الکتریکی 1 kV/mm مطابق شکل (۶-ب) مشاهده می‌گردد که ارتعاشات تیر میرا می‌گردد. همانطور که در این شکل نشان داده شده است می‌توان با رسم خط گذرنده از بیشینه‌های نسبی این نمودار، زمان نشست^۲ ارتعاشات تیر را محاسبه کرد. زمان نشست در ارتعاشات میرا از این لحاظ قابل اهمیت است که نشان دهنده توانایی استهلاک سیستم می‌باشد. پارامتر دیگری که در شکل ۶-ب نشان داده شده است ماکزیمم دامنه جابجایی عرضی تیر می‌باشد. این پارامتر نیز از جمله پارامترهای دارای اهمیت در ارتعاشات واداشته سیستم‌ها می‌باشد چون با بالا رفتن ماکزیمم دامنه ارتعاشات، سیستم به سمت ناپایداری پیش می‌رود.

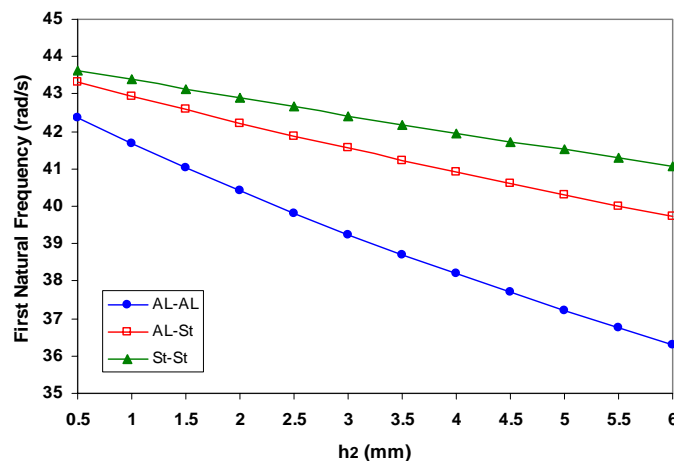
¹ Arabic gum

² Settling time

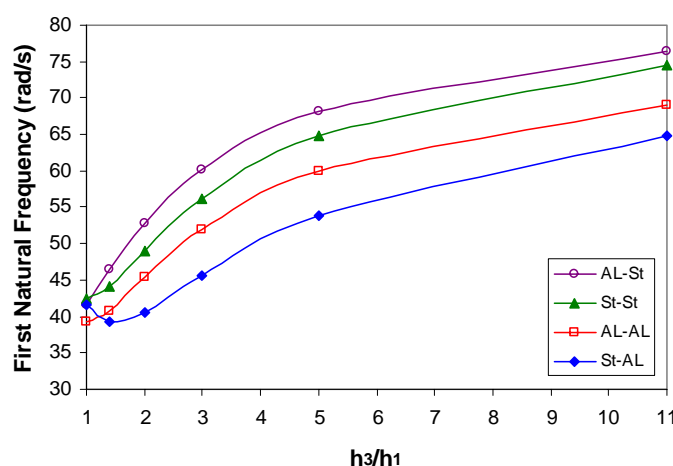
در اولین مرحله از بررسی پارامتریک به مطالعه تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی تیر پرداخته شده است. شکل (۷) تأثیر ضخامت هسته ER بر فرکانس طبیعی اول تیر برای سه حالت مختلف را نشان می‌دهد. در هر یک از این حالت‌ها جنس لایه‌های اصلی متفاوت فرض شده است. نمودار اول مربوط به تیری است که جنس هر دو لایه آن از فولاد با مدول یانگ 210 GPa و چگالی 7800 Kg/m^3 می‌باشد. در حالت دوم جنس یک لایه از فولاد و جنس لایه دیگر از آلومینیوم با مدول یانگ 70 GPa و چگالی 2700 Kg/m^3 فرض شده و در حالت سوم جنس هر دو لایه از آلومینیوم در نظر گرفته شده است. همانطور که از این شکل مشخص است با افزایش ضخامت لایه ER اولین فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش سفتی لایه‌ها فرکانس طبیعی افزایش یافته است به نحویکه برای تیر فولاد-فولاد بیشترین فرکانس طبیعی بدست آمده است.



شکل ۶- پاسخ گذرای تیر قبل و بعد از اعمال میدان الکتریکی

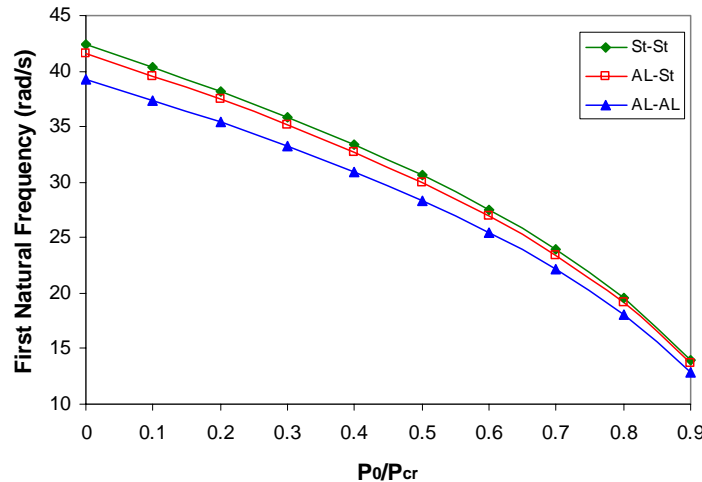


شکل ۷- نمودار تغییرات فرکانس طبیعی تیر بر حسب ضخامت لایه ER



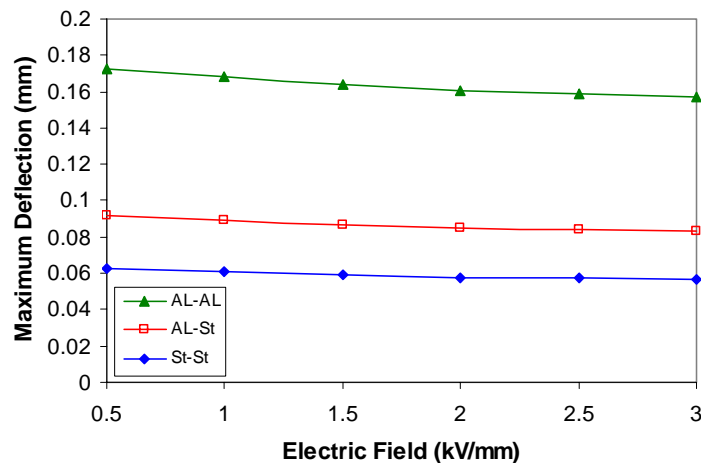
شکل ۸- تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی (h_3/h_1) بر فرکانس طبیعی تیر

در شکل (۸) تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی بر فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. در این مورد که برای چهار حالت بررسی شده است مجموع ضخامت دو لایه اصلی ثابت فرض شده و نسبت ضخامت آنها تغییر داده شده است. همانطور که در شکل (۸) مشاهده می‌شود بطور کلی می‌توان گفت با افزایش نسبت ضخامت، فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. در نمودار چهارم این شکل (نمودار St-Al) یک روند یکنواخت مانند حالت‌های دیگر دیده نمی‌شود. با توجه به اینکه عوامل تأثیر گذار در محاسبه فرکانس طبیعی سیستم، ماتریس‌های جرم و سفتی می‌باشند، زمانیکه جنس لایه‌های اصلی متفاوت فرض می‌شود و نسبت ضخامت آنها تغییر می‌کند، ماتریس‌های جرم و سفتی سیستم هر دو تغییر می‌کنند و این تغییرات ماتریس‌های جرم و سفتی در نسبت‌های مختلف ضخامت، گاه به گونه ایست که باعث ایجاد روند ثابتی در تغییرات فرکانس طبیعی سیستم نمی‌شود.



شکل ۹- تأثیر افزایش بار محوری فشاری بر فرکانس طبیعی تیر

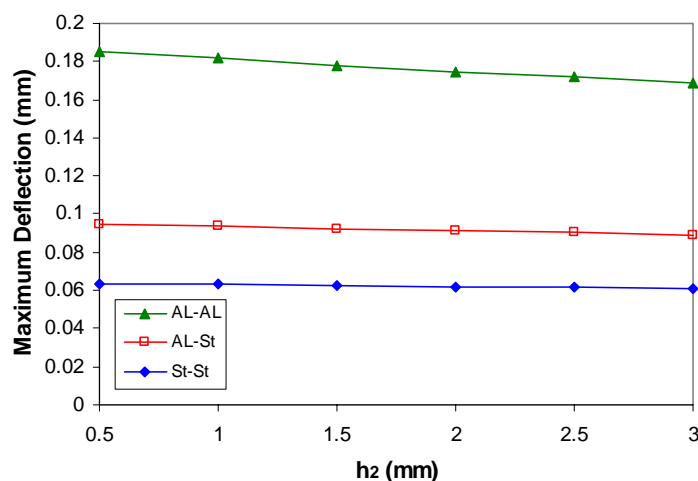
اعمال بار محوری استاتیکی نیز بر فرکانس طبیعی تیر اثر می‌گذارد به نحویکه با افزایش بار محوری فشاری در انتهای تیر فرکانس طبیعی تیر کاهش می‌یابد. شکل (۹) تأثیر افزایش بار محوری بر فرکانس‌های طبیعی تیر را نشان می‌دهد. در این شکل بار محوری وارد به انتهای هر یک از تیرها بر حسب بار بحرانی همان تیر بی‌بعد شده‌اند. در مرحله بعد تأثیر عوامل مختلف بر ماکزیمم جابجایی انتهای تیر در اثر یک تحریک اولیه مورد مطالعه قرار گرفته است. به عنوان اولین عامل تأثیر شدت میدان الکتریکی بر ماکزیمم جابجایی انتهای تیر بررسی شده است. با اعمال میدان الکتریکی به لایه ER می‌توان ماکزیمم جابجایی تیر را کاهش داد. شکل (۱۰) که برای سه حالت مختلف لایه‌های اصلی رسم شده، تأثیر افزایش شدت میدان الکتریکی بر ماکزیمم جابجایی انتهای تیر را نشان می‌دهد. همانطور که از این شکل مشخص است با افزایش شدت میدان الکتریکی ماکزیمم جابجایی انتهای تیر کم می‌شود. همچنین می‌توان مشاهده کرد که با کاهش سفتی لایه‌های تیر، ماکزیمم جابجایی انتهای آن افزایش یافته و بیشترین جابجایی‌ها برای تیر آلومینیوم-آلومینیوم بدست آمده است.



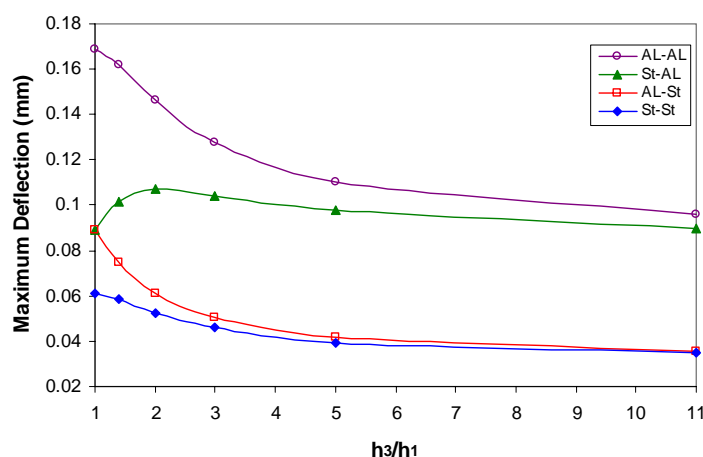
شکل ۱۰- تأثیر شدت میدان الکتریکی بر ماکزیمم جابجایی انتهای تیر

تغییرات ضخامت لایه ER نیز بر ماکزیمم جابجایی انتهای تیر مؤثر است. همانطور که در شکل (۱۱) نشان داده شده است با افزایش ضخامت لایه ER بر خاصیت استهلاک این لایه افزوده شده و ماکزیمم جابجایی انتهای تیر کم می‌شود. نکته دیگری که از این شکل قابل استنباط است شدت تأثیر تغییر ضخامت بر تیرهای مختلف می‌باشد. باتوجه به این شکل می‌توان چنین نتیجه گرفت که با افزایش سفتی لایه‌ها از شدت تأثیر افزایش ضخامت لایه ER کاسته می‌شود. البته در شکل (۱۰) نیز این روند قابل مشاهده بود.

از دیگر عوامل مورد بررسی در این زمینه تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی می‌باشد. بطور کلی با افزایش این نسبت نیز از ماکزیمم جابجایی انتهای تیر کاسته می‌شود. شکل (۱۲) تأثیر این عامل را بر خیز ماکزیمم انتهای تیر برای چهار تیر مختلف نشان می‌دهد. با توجه به این شکل و شکل (۸) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش این نسبت به نوعی بر سفتی سیستم افزوده می‌شود. البته در این شکل نیز همانند شکل (۸) تغییرات یکنواختی برای تیر فولاد-آلومینیوم دیده نمی‌شود.

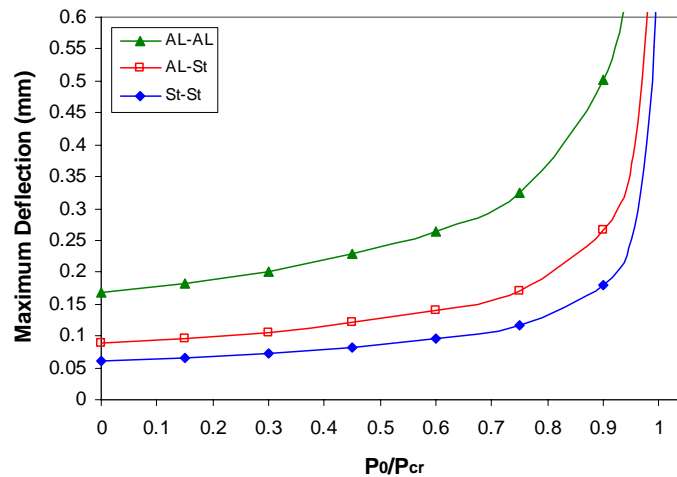


شکل ۱۱- تأثیر ضخامت لایه ER بر ماکزیمم جابجایی انتهای تیر



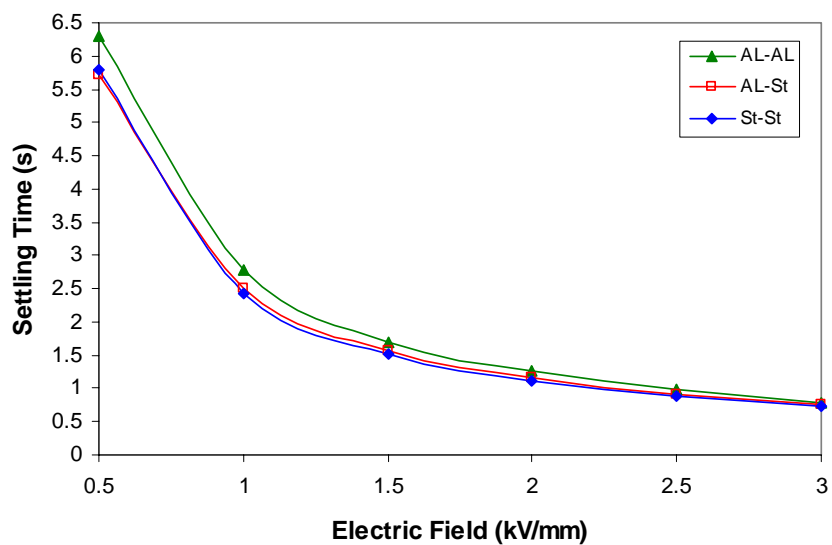
شکل ۱۲- تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی (h_3/h_1) بر ماکزیمم جابجایی انتهای تیر

آخرین عاملی که در این قسمت بررسی شده است اثر بار محوری فشاری می‌باشد. همانطور که از شکل (۱۳) مشخص است این عامل تأثیر به‌سزایی بر ماکزیمم جابجایی انتهایی تیر دارد. با افزایش بار محوری میزان جابجایی انتهایی تیر ابتدا بصورت خطی افزایش می‌یابد تا جایی که خیز ماکزیمم ناگهان بصورت نمایی زیاد می‌شود و ارتعاشات تیر از آن مرحله به بعد ناپایدار می‌گردد. نکته حائز اهمیت که از این شکل استنباط می‌شود تأثیر جنس تیر بر میزان تحمل بار سیستم است. از نمودارهای شکل (۱۳) مشخص است که با نزدیک شدن بار فشاری به بار بحرانی، تغییرات ماکزیمم جابجایی تیر آلومینیوم-آلومینیوم زودتر به حالت نمایی می‌رسد. اما در مورد تیر فولاد-فولاد، تغییرات ماکزیمم جابجایی تیر بیشتر بصورت خطی است و ناگهان در نزدیکی بار بحرانی به شکل نمایی درمی‌آید. در واقع چنین می‌توان استنباط کرد که با افزایش بار محوری فشاری، هرچه جنس تیر نرم‌تر باشد تیر بصورت یکنواخت‌تری به مرز ناپایداری خود نزدیک می‌شود و در مقابل تیرهایی که از مواد سخت‌تری برخوردارند بصورت ناگهانی به مرز ناپایداری خود می‌رسند.

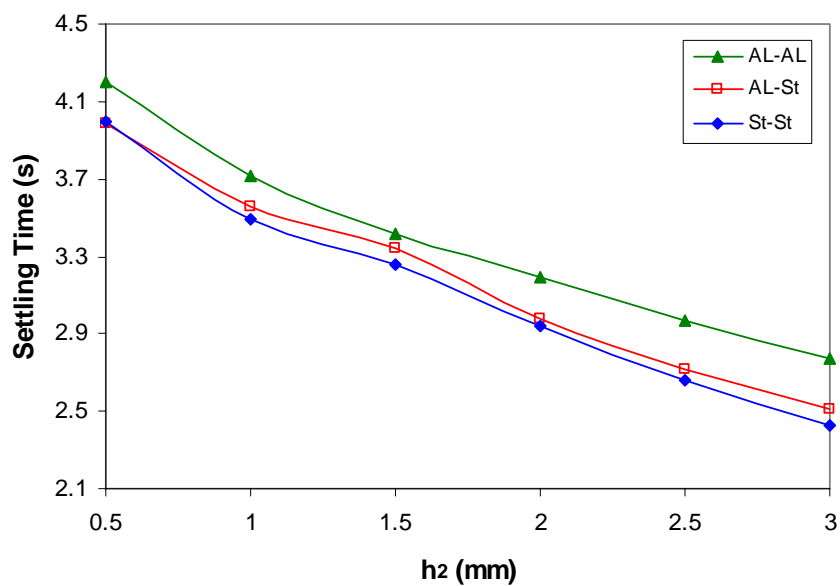


شکل ۱۳- تأثیر بار محوری فشاری بر ماکزیمم جابجایی انتهایی تیر

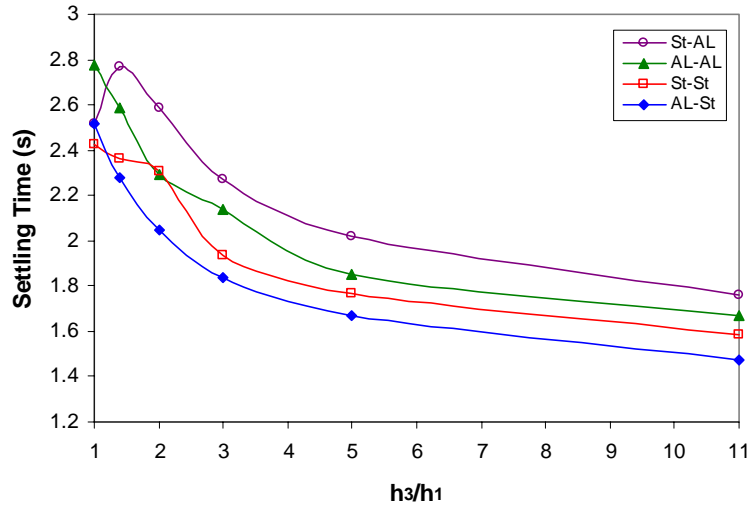
در ادامه تأثیر عوامل مختلف بر زمان نشست ارتعاشات تیر مورد مطالعه قرار گرفته است. این امر بسیار حائز اهمیت بوده چون به نوعی نشان دهنده توانایی استهلاک سیستم است. یکی از عوامل مهم که مستقیماً با توانایی استهلاک سیستم در ارتباط است وضعیت هندسی و فیزیکی لایه ER است. با افزایش شدت میدان الکتریکی اعمال شده به سیال ER، میزان تنش برشی که در واقع همان نیروی مستهلک کننده سیستم است، افزایش می‌یابد و در نتیجه با افزایش نیروی استهلاک انتظار می‌رود زمان نشست ارتعاشات کاهش یابد. تأثیر شدت میدان الکتریکی بر زمان نشست ارتعاشات تیر در شکل (۱۴) نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت با افزایش شدت میدان الکتریکی زمان نشست ارتعاشات کاهش یافته است. همچنین از آنجا که این نمودار برای تیرهایی با جنس‌های متفاوت رسم شده می‌توان مشاهده نمود که افزایش سفتی تیر نیز بطور ناچیزی باعث کاهش زمان نشست شده است. افزایش ضخامت هسته ER نیز چون باعث افزایش حجم عامل میرا کننده، یعنی سیال ER، می‌شود توانایی استهلاک سیستم را بالا می‌برد. همانطور که در شکل (۱۵) نشان داده شده با افزایش ضخامت لایه ER نیز زمان نشست ارتعاشات تیر کاهش یافته است.



شکل ۱۴- تأثیر شدت میدان الکتریکی بر زمان نشست ارتعاشات تیر

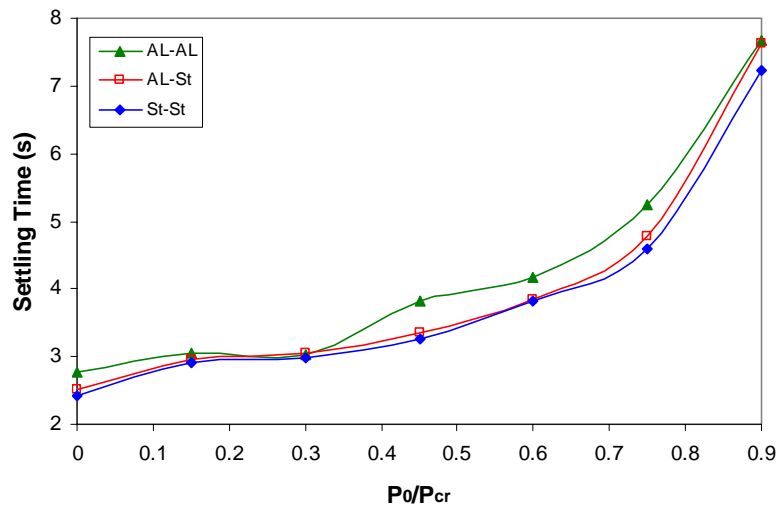


شکل ۱۵- تأثیر ضخامت لایه ER بر زمان نشست ارتعاشات تیر



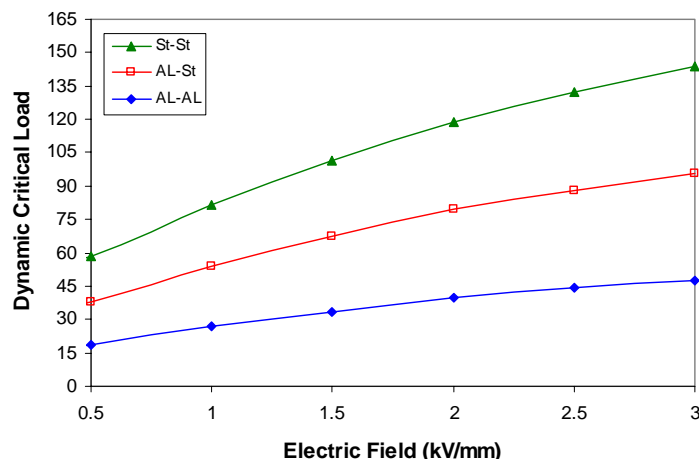
شکل ۱۶- تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی (h_3/h_1) بر زمان نشست ارتعاشات تیر

مشابه قسمت‌های قبل، در این قسمت نیز تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی مورد مطالعه قرار گرفته است. بطور کلی می‌توان گفت که با افزایش نسبت ضخامت لایه‌ها نیز زمان نشست کاهش یافته است. شکل (۱۶) تأثیر افزایش نسبت ضخامت بر زمان نشست را نشان می‌دهد.



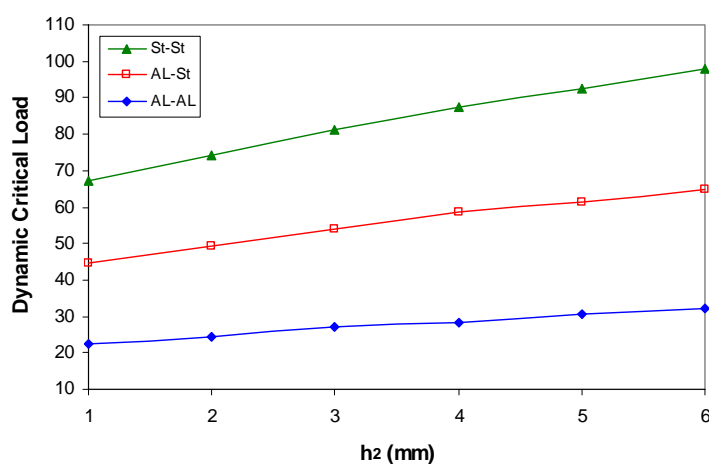
شکل ۱۷- تأثیر بار محوری فشاری بر زمان نشست ارتعاشات تیر

در شکل (۱۷) به بررسی اثر بار محوری بر زمان نشست پرداخته شده است. همانطور که شکل (۱۳) مشاهده شد با افزایش بار محوری فشاری، تیر به سمت ناپایداری پیش می‌رود. در نمودار شکل (۱۷) نیز همانطور که انتظار می‌رود با افزایش نیروی محوری P_0 زمان نشست ارتعاشات تیر بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته است.



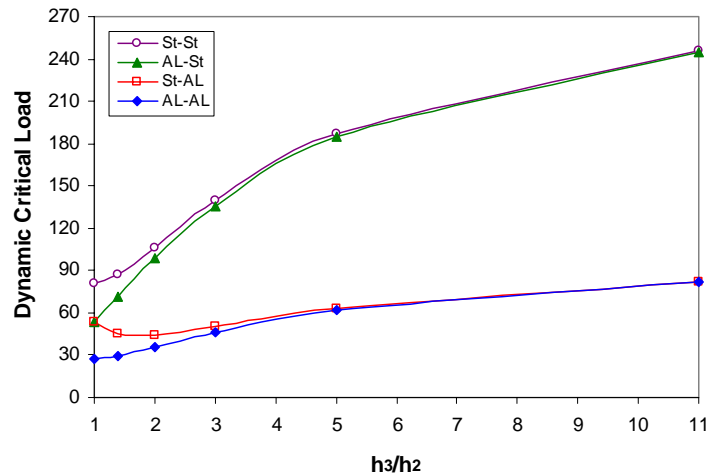
شکل ۱۸- تأثیر شدت میدان الکتریکی بر بار دینامیکی بحرانی

در ادامه بحث موارد مربوط به بار دینامیکی بحرانی تیر مورد مطالعه قرار گرفته است. در این قسمت فرکانس بار هارمونیک در رابطه (۳۲) برابر با اولین فرکانس طبیعی تیر فرض شده است. به عنوان اولین عامل، تأثیر شدت میدان الکتریکی بر بار دینامیکی بحرانی بررسی شده است. همانطور که در شکل (۱۸) نمایش داده شده است، با افزایش شدت میدان الکتریکی اندازه بار دینامیکی بحرانی افزایش یافته است. همچنین همانطور که انتظار می‌رود با افزایش سفتی تیر نیز میزان تحمل بار تیر افزایش یافته است.



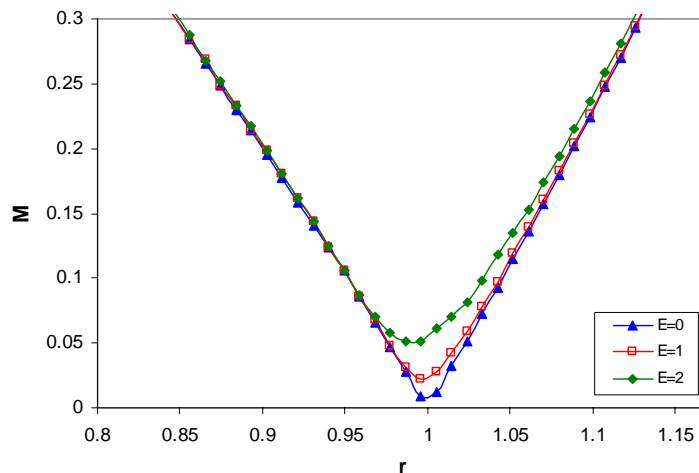
شکل ۱۹- تأثیر ضخامت لایه ER بر بار دینامیکی بحرانی

تغییر ضخامت هسته ER نیز بر میزان تحمل بار دینامیکی تیر تأثیرگذار است. با توجه به شکل (۱۹) با افزایش ضخامت لایه ER بر توانایی تحمل بار دینامیکی تیر افزوده می‌شود. اما همانطور که در شکل دیده می‌شود تأثیر این عامل کمتر از شدت میدان الکتریکی است. علت این امر آن است که هرچند با افزایش ضخامت هسته ER بر حجم ماده مستهلک کننده سیستم افزوده می‌شود اما از طرف دیگر جرم معادل تیر نیز افزایش می‌یابد که منجر به کاسته شدن توانایی استهلاک سیستم می‌گردد. اما آنچه از برآیند این دو عامل متقابل دیده می‌شود، افزایش میرایی سیستم و در نتیجه افزایش میزان تحمل بار دینامیکی تیر است.



شکل ۲۰- تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی (h_3/h_1) بر بار دینامیکی بحرانی

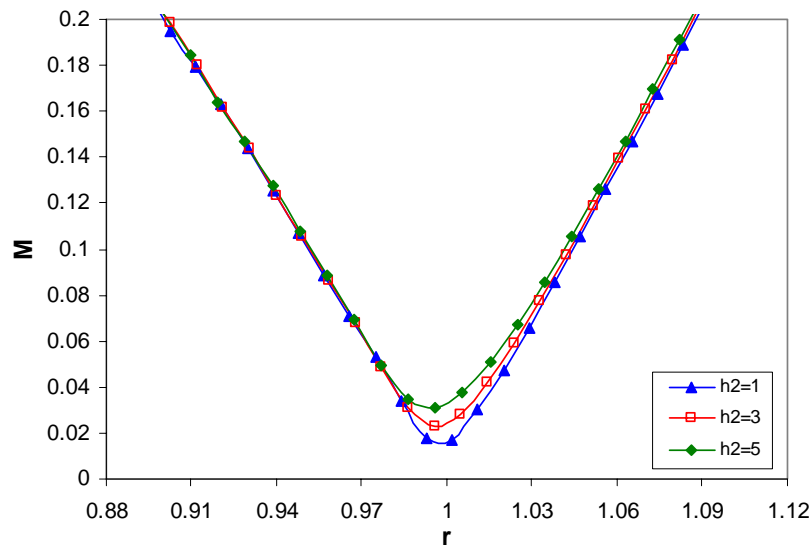
عامل دیگری که قابلیت تحمل بار دینامیکی تیر را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد، نسبت ضخامت لایه‌های اصلی تیر است. با توجه به نمودارهای شکل (۲۰) می‌توان گفت که به طور کلی با افزایش نسبت ضخامت h_3/h_1 ، بار دینامیکی بحرانی تیر نیز افزایش پیدا کرده است. آنچه از این شکل و شکل‌های قبل در مورد تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی استنباط می‌شود این است که هرچه یکی از لایه‌ها نسبت به لایه دیگر ضخیم‌تر در نظر گرفته شود، به نوعی بر استحکام تیر افزوده می‌گردد. در واقع بهتر است به منظور بهبود خواص تیر لایه اصلی را تا حد امکان ضخیم و لایه محدود کننده هسته ER را تا حد امکان نازک در نظر گرفت.



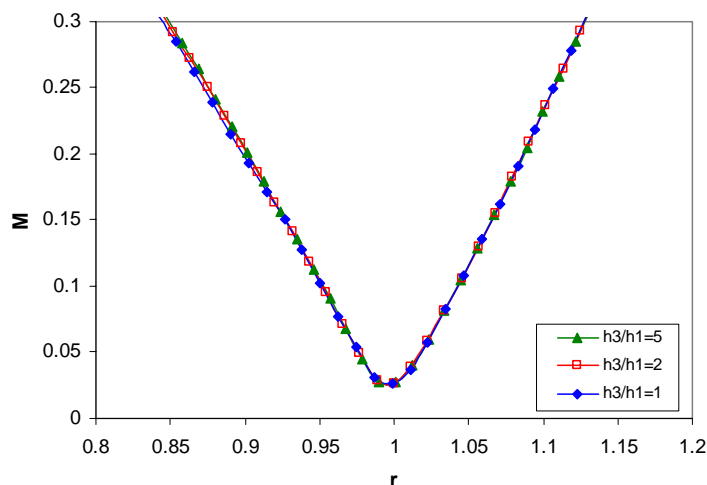
شکل ۲۱- تأثیر شدت میدان الکتریکی بر اولین ناحیه پایداری تیر

بحث پایانی این مقاله مربوط به نواحی پایداری تیر ساندویچی با هسته ER می‌باشد. در این قسمت نواحی پایداری تنها برای یک تیر آلومینیوم-فولاد رسم شده‌اند. خواص مادی و هندسی تیر همانند حالت‌های قبل است با این تفاوت که در اینجا ضخامت لایه آلومینیومی برابر 1mm و ضخامت لایه فولادی برابر 4mm در نظر گرفته شده است. همانطور که قبلاً توضیح داده شد برای بدست آوردن نواحی پایداری، مقادیر بار

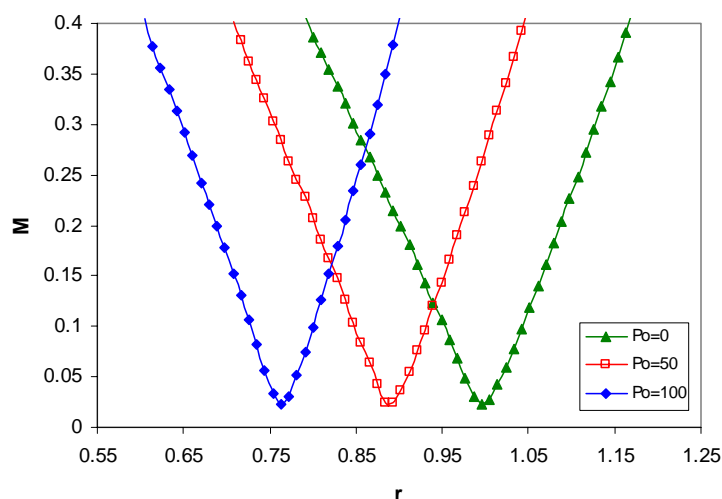
دینامیکی بحرانی به ازای فرکانس‌های مختلف بار هارمونیک محاسبه می‌شوند سپس این مقادیر طبق روابط (۳۳) و (۳۴) بی‌بعد می‌گردند. لازم به ذکر است که در تمامی موارد مورد بحث، ناحیه اول ناپایداری تیر رسم شده که در اطراف $\theta=2\omega_1$ ایجاد می‌گردد. به عنوان اولین عامل مورد بررسی، تأثیر شدت میدان الکتریکی بر اولین ناحیه پایداری تیر در شکل (۲۱) ارائه شده است. همان طور که انتظار می‌رود با افزایش شدت میدان الکتریکی، مرز ناپایداری تیر به سمت بالا جابجا شده و به پایداری سیستم افزوده شده است. تأثیر افزایش ضخامت هسته ER نیز مشابه تأثیر افزایش شدت میدان الکتریکی است به نحویکه با افزایش ضخامت لایه ER، مرز ناپایداری تیر به سمت بالا حرکت کرده و تیر در شرایط پایداری قرار گرفته است. اما با توجه به شکل (۲۲) تأثیر این عامل کمتر از تأثیر شدت میدان الکتریکی است. علت این امر همانطور که قبلاً توضیح داده شد به دلیل وقوع دو اثر متضاد همراه با افزایش ضخامت لایه ER است. در شکل (۲۳) تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی بر ناحیه پایداری نشان داده شده است. بر خلاف آنچه انتظار می‌رفت با تغییر نسبت ضخامت تغییر محسوسی در مرز ناپایداری تیر دیده نمی‌شود. همانطور که در قسمت‌های قبلی بیان شد، با افزایش نسبت ضخامت h_3/h_1 ، به استحکام و سفتی تیر افزوده می‌شود که با بالا رفتن پایداری سیستم همراه است. اما از آنجا که با بالا رفتن سفتی تیر، هم بار بحرانی استاتیکی (P_{cr}) و



شکل ۲۲- تأثیر ضخامت لایه ER بر اولین ناحیه پایداری تیر



شکل ۲۳- تأثیر نسبت ضخامت لایه‌های اصلی (h_3/h_1) بر اولین ناحیه پایداری تیر



شکل ۲۴- تأثیر ضریب استاتیکی بار هارمونیک بر اولین ناحیه پایداری تیر

هم بار بحرانی دینامیکی به یک میزان افزایش پیدا می‌کنند، طبق رابطه (۳۴) تغییری در پارامتر M ایجاد نمی‌شود. به همین دلیل اثر بالا رفتن استحکام سیستم در نمودارهای پایداری که به این روش رسم می‌شوند، قابل رؤیت نیست.

در پایان به بررسی اثر ضریب استاتیکی بار هارمونیک بر ناحیه پایداری تیر پرداخته شده است. بر اساس شکل (۲۴) با تغییر در ضریب استاتیکی بار هارمونیک مرزهای ناپایداری در راستای محور r جابجا می‌شوند. این پدیده در واقع ناشی از تغییر فرکانس طبیعی اول تیر در اثر اعمال بار استاتیکی است که در شکل (۹) نیز مشاهده شد. در نتیجه این تغییر فرکانس، نقطه مینیمم منحنی مرز ناپایداری دیگر در $r=1$ قرار نگرفته و به نقطه دیگری منتقل شده است. این اثر زمانی می‌تواند مفید باشد که سازه تحت بارگذاری هارمونیک با فرکانسی نزدیک به $2\omega_1$ باشد. در این حالت چون میزان تحمل بار دینامیکی سازه بسیار کم است می‌توان با

اضافه کردن یک بار استاتیکی نقطه مینیمم مرز ناپایداری را جابجا نموده و میزان تحمل بار دینامیکی سیستم را افزایش داد.

۹- نتیجه گیری

در این مقاله مسئله ارتعاشات و کمانش دینامیکی تیر ساندویچی با هسته ER مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از مدل بینگهام برای توجیه رفتار سیال ER و به کمک روش اجزاء محدود یک المان تیر برای این مدل استخراج گردید. با بهره‌گیری از روش انتگرال‌گیری مستقیم پاسخ گذرای تیر به یک تحریک اولیه محاسبه شد و همچنین بار دینامیکی بحرانی و نواحی پایداری برای تیر بدست آمد.

در زمینه ارتعاشات، سه عامل فرکانس طبیعی، ماکزیمم جابجایی و زمان نشست مورد مطالعه قرار گرفت و تأثیر پارامترهای مختلف بر این سه عامل تحقیق شد. بررسی‌های انجام شده نشان داد که افزایش ضخامت لایه ER و بار محوری P_0 باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی تیر شده و افزایش نسبت ضخامت لایه اصلی به لایه محدود کننده باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی تیر گردیده است. در زمینه ماکزیمم دامنه جابجایی و زمان نشست ارتعاشات نتایج حاکی از این بود که با افزایش پارامترهای شدت میدان الکتریکی، ضخامت لایه ER و نسبت ضخامت لایه‌های اصلی، زمان نشست و ماکزیمم دامنه ارتعاشات کاهش یافته و در مقابل با افزایش بار محوری P_0 این دو عامل به شدت افزایش یافته‌اند.

در مورد کمانش دینامیکی، بررسی‌ها نشان داد که با افزایش پارامترهای شدت میدان الکتریکی، ضخامت لایه ER و نسبت ضخامت لایه‌های اصلی بار دینامیکی بحرانی تیر افزایش پیدا کرد. با رسم نواحی پایداری برای حالت‌های مختلف مشخص شد که با افزایش شدت میدان الکتریکی و همچنین ضخامت لایه ER، مرز ناپایداری تیر به سمت بالا جابجا شد که به معنی پایداری بیشتر تیر است. تغییر ضریب استاتیکی بار هارمونیک نیز به شدت در جابجا کردن نواحی پایداری اثرگذار بود به نحویکه با افزایش این ضریب، مرز ناپایداری سیستم در راستای محور r جابجا گردید.

مراجع

- [1] Cui, S., Hao, H., and Cheong, H.K., "Theoretical Study of Dynamic Elastic Buckling of Columns Subjected to Intermediate Velocity Impact Loads", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, pp. 687-702, (2002).
- [2] Cui, S., Hao, H., and Cheong, H.K., "Numerical Analysis of Dynamic Buckling of Rectangular Plates Subjected to Intermediate-velocity Impact", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 25, pp. 147-167, (2001).
- [3] Kubiak, T., "Criteria of Dynamic Buckling Estimation of Thin-walled Structures", *Thin-Walled Structure*, Vol. 45, pp. 888-892, (2007).
- [4] Kenny, S., Pegg, N., and Taheri, F., "Dynamic Elastic Buckling of a Slender Beam with Geometric Imperfections Subject to an Axial Impulse", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 35, pp. 227-246, (2000).

- [5] Moita, J.S., Soares, C.M.M., and Soares, C.A.M., "Buckling and Dynamic Behavior of Laminated Composite Structures using a Discrete Higher-order Displacement Model", *Computers and Structures*, Vol. 73, pp. 407-423, (1999).
- [6] Choi, S.B., Choi, Y.T., Chang, E.G., Han, S.J., and Kim, C.S., "Control Characteristics of a Continuously Variable ER Damper", *Mechatronics*, Vol. 8, pp. 143-161, (1998).
- [7] Wahed, A.K.E., Sproston, J.L., and Stanway, R., "The Rheological Characteristics of Electrorheological Fluids in Dynamic Squeeze", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. Vol. 13, pp. 655-660, (2002).
- [8] Park, W.C., Choi, S.B., and Suh, M.S., "Material Characteristics of an ER Fluid and its Influence on Damping Forces of an ER Damper", *Materials and Design*. Vol. 20, pp. 317-323, (1999).
- [9] Lee, H.G., and Choi, S.B., "Dynamic Properties of an ER Fluid under Shear and Flow Modes", *Materials and Design*. Vol. 23, pp. 69-76, (2002).
- [10] Keith, D., Weiss, J., Carlson, D., and Nixon, A., "Viscoelastic Properties of Magneto- and Electro-rheological Fluids", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. Vol. 23, pp. 1027-1034, (1987).
- [11] Stangroom, J.E., "Electrorheological Fluids", *Physics in Technology*. Vol. 14, pp. 290-296, (1983).
- [12] Keith, D., Weiss, J., Carlson, D., and Coulter, J.P., "Material Aspects of Electrorheological Systems", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. Vol. 4, pp. 13-34, (1993).
- [13] Mace, M., "Damping of Beam Vibrations by Means of a Thin Constrained Viscoelastic Layer: Evaluation of New Theory", *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 172, pp. 577-591, (1994).
- [14] Yeh, J.Y., Chen, L.W., and Wang, C.C., "Dynamic Stability of a Sandwich Beam with a Constrained Layer and Electrorheological Fluid Core", *Composite Structures*, Vol. 64, pp. 47-54, (2004).
- [15] Yeh, J.Y., and Chen, L.W., "Dynamic Stability of a Sandwich Plate with a Constraining Layer and Electrorheological Fluid Core", *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 285, pp. 637-652, (2005).
- [16] Narayana, G.V., and Ganesan, N., "Critical Comparison of Viscoelastic Damping and Electrorheological Fluid Core Damping in Composite Sandwich Skew Plates", *Composite Structures*. Vol. 80, pp. 221-233, (2007).
- [17] Rezaeepazhand, J., and Pahlavan, L., "Transient Response of Sandwich Beams with Electrorheological Core", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, pp. 171-179, (2009).

- [18] Weaver, W., and Johnston, P.R., "*Structural Dynamics by Finite Elements*", 1st Edition, Prentice Hall, New Jersey, (1987).
- [19] Haiqing, G., and King, L.M., "Vibration Characteristics of Sandwich Beams Partially and Fully Treated with Electro-rheological Fluid", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 8, pp. 401-413, (1997).
- [20] Xie, W.C., "*Dynamic Stability of Structures*", 1st Edition, Cambridge University Press, New York, (2006).

فهرست نمادهای انگلیسی

- $[C]$: ماتریس استهلاک المان
 \tilde{E} : شدت میدان الکتریکی
 E_i : مدول یانگ لایه i ام
 $\{F_{ER}\}$: بردار نیروی حاصل از لایه ER
 h_i : ضخامت لایه i ام
 J_2 : ممان اینرسی جرمی لایه دوم
 $[K_e]$: ماتریس سفتی المان ناشی از سفتی لایه‌های الاستیک
 $[K_G]$: ماتریس سفتی هندسی المان ناشی از اعمال بار محوری
 M : پارامتر بی‌بعد بار محوری در نمودار پایداری
 $[M]$: ماتریس جرم المان
 $[N]$: ماتریس توابع شکل
 P : بار محوری
 P_0 : ضریب استاتیکی بار محوری
 P_1 : ضریب دینامیکی بار محوری
 $\{q\}$: بردار درجات آزادی المان
 $\{\dot{q}\}$: مشتق زمانی اول بردار درجات آزادی المان
 $\{\ddot{q}\}$: مشتق زمانی دوم بردار درجات آزادی المان
 r : پارامتر بی‌بعد فرکانس در نمودار پایداری
 t : پارامتر زمان
 T : انرژی جنبشی المان
 u_i : جابجایی محوری لایه i ام
 U : بردار جابجایی المان
 U_i : پارامتر روش تفاضل محدود در بازه i ام
 \dot{U}_i : مشتق زمانی اول پارامتر روش تفاضل محدود در بازه i ام
 \ddot{U}_i : مشتق زمانی دوم پارامتر روش تفاضل محدود در بازه i ام

V : انرژی جنبشی المان
 v : فرکانس بار هارمونیک
 w : جابجایی عرضی تیر
 W : کار نیروهای خارجی
 x : مؤلفه طولی دستگاه مختصات
 z : مؤلفه عرضی دستگاه مختصات

نمادهای یونانی

α : پارامتر آزمایشگاهی رابطه بینگهام
 β : پارامتر آزمایشگاهی رابطه بینگهام
 γ : کرنش برشی
 $\dot{\gamma}$: مشتق زمانی کرنش برشی
 η : لزجت سیال ER
 π : انرژی کل المان
 τ : تنش برشی در لایه ER
 τ_y : تنش برشی تسلیم سیال ER
 θ : دوران زاویه‌ای در هر گره
 ω_n : فرکانس طبیعی تیر

Abstract

In this study vibration and dynamic buckling of three layers sandwich beam with electrorheological (ER) core is investigated using finite element method. A two node beam element for three layers sandwich beam is presented and corresponding stiffness, mass and damping matrices are obtained. Effects of different parameters such as beam geometry, material properties and applied voltage to the ER core on free vibration and transient response of the beam are investigated. Furthermore, dynamic stability of the sandwich beam is studied. The effect of each parameter on critical dynamic load and stability regions of the beam is presented. Based on presented results, applying electric field on ER core decreases the settling time of transient response and changes stability region of the sandwich beam.