



تحلیل تنش باریکه تضعیف شده توسط چندین ترک متحرک

امید ترکیان^۱

کارشناس

مجتبی آیت اللهی^۲

استادیار

رضا تیموری فعال^۳

استادیار

در این مقاله میدان تنش یک باریکه تضعیف شده توسط نابجائی پادصفحه ای متحرک با سرعت ثابت که به موازات وجوه باریکه حرکت می کند بدست آمده است. حل معادله حرکت با اعمال تبدیل فوریه بدست می آید. در حیطه مکانیک شکست خطی، به کمک روش توزیع نابجائی بر روی چندین ترک و بررسی تأثیر متقابل آنها بر یکدیگر معادلات انتگرالی از نوع کوشی برای مسئله چندین ترک متحرک در باریکه بدست می آیند. ترک ها مستقیم و موازی وجوه باریکه بوده و با سرعت های مساوی حرکت می کنند. با حل عددی معادلات انتگرالی بدست آمده، دانسیته نابجائی بر روی ترک ها بدست آمده و ضرائب شدت تنش در نوک های ترک ها بدست می آیند. بررسی تأثیر سرعت حرکت ترک ها، طول، فاصله ترک ها از همدیگر و یا تأثیر نحوه قرار گرفتن ترک ها نسبت به هم بر روی ضرائب شدت تنش دینامیکی صورت گرفته است.

واژه های راهنما: باریکه- ترک متحرک- نابجائی پادصفحه ای- ضریب شدت تنش

۱- مقدمه

تحلیل تنش در قطعات مکانیکی که دارای ترک بوده و تحت بار دینامیکی قرار دارند از اهمیت خاصی برخوردار می باشد. طراحی با استفاده از اصول مکانیک شکست مستلزم داشتن معیاری است که مشخص کننده واماندگی^۴ قطعه باشد یکی از این معیارها ضریب شدت تنش بحرانی است. ضریب شدت تنش در نوک ترک ها تابعی از هندسه ترک، شکل قطعه، شرایط و اندازه بارگذاری می باشد که پس از محاسبه با مقدار بحرانی آن مقایسه می گردد. مکانیک شکست دینامیکی شاخه ای از مکانیک شکست است که در آن بارگذاری با زمان تغییر می کند و اینرسی ماده حاوی ترک در گسترش و ناپایداری ترک حائز اهمیت است. تحلیل های دینامیکی انجام شده بیانگر این است که تنش های ایجاد شده در محیط در اثر بار دینامیکی در بعضی مواقع بطور قابل ملاحظه ای بزرگتر از تنش ها در اثر اعمال بارگذاری استاتیکی معادل می باشد که آنرا می توان با انتشار امواج الاستیک منتشر شده در محیط و برخورد آن به ترک توجیه نمود. S. A. Meguid [۱] انتشار یک ترک محدود در ماده تابعی^۵ (ماده ای که خواص آن بصورت تابعی از موقعیت

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه زنجان omidarkian@gmail.com

^۲ نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان mo_ayatollahy@yahoo.com

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان

^۴ Failure

^۵ FGM

تغییر می کند) را مورد بررسی قرار داد. در این تحقیق اثر تغییر در خواص ماده تابعی و سرعت حرکت ترک بر روی ضریب شدت تنش، نرخ رهایی انرژی کرنشی و بازشدگی دهانه ترک مورد بررسی قرار گرفته است. انتشار ترک با شکل و طول ثابت واقع در یک باریکه پیزوالکتریک از جنس سرامیک تحت بارگذاری یکنواخت پادصفحه‌ای توسط X. F. Li [۲] مطالعه شد. بمنظور حل مسئله با شرایط مرزی ترکیبی از تبدیل انتگرالی استفاده شده است که منجر به ایجاد معادلات انتگرالی تکین می گردد. حرکت یک ترک محدود با سرعت ثابت در ماده تابعی توسط S. M. Kwon [۳] بررسی شد. در این تحقیق با استفاده از روش تبدیل فوریه^۱ مسئله به معادله انتگرالی فرد هولم^۲ نوع دوم تبدیل شده است. مسئله یک ترک متحرک^۳ در باریکه نامحدود ساخته شده از ماده تابعی که تحت تأثیر بارگذاری پادصفحه‌ای قرار دارد توسط X. S. Bi و همکاران [۴] حل شده است. در این مسئله مدول برشی در دو جهت از ماده به صورت تابع نمایی از موقعیت فرض شده و ضرایب شدت تنش دینامیکی، چگالی انرژی کرنشی در نوک ترک ارائه شده است. ضریب شدت تنش دینامیکی در ترک گریفیث^۴ در یک باریکه غیر همگن توسط L. Ma [۵] و همکارانش محاسبه شده است. در این مطالعه حرکت ترک با طول ثابت در باریکه از ماده تابعی بررسی شده است.

برای ترک متحرک یک رفتار غیر خطی محلی برای ناحیه کوچکی در نوک های ترک در نظر گرفته می شود. برای معرفی چنین ناحیه ای با رفتار غیر خطی یک تنش محلی ثابت در طول ثابت و مشخص از دو نوک ترک در نظر گرفته می شود و دیگر قسمت های سطوح آزاد ترک عاری از تنش فرض می شوند. بسته به نوع بارگذاری این تنش برشی یا عمودی خواهد بود، که چنین تنشی برای مود سوم مکانیک شکست تنش پادصفحه ای برشی در نظر گرفته می شود. Dugdale, Barenblatt [۶,۷] دلایل فیزیکی برای وجود چنین تنشی را با استفاده از مفهوم تنش چسبندگی^۵ و تنش تسلیم ارائه نموده اند که به میکروساختارهای ماده و بارگذاری خارجی ماکروسکوپی و مدل فیزیکی در نظر گرفته شده برای تنش ها که مدل تسلیم باریکه نامیده می شود، مربوط می شود. وجود چنین تنش ها و ناحیه ای، با فرض ماده شکننده و رفتار خطی برای ماده همانطور که در مرجع [۸] توضیح داده شده است قابل صرف نظر می باشد که در این مقاله از آن صرف نظر شده است.

در این مقاله حل تحلیلی مسئله باریکه تضعیف شده توسط چندین ترک مستقیم تحت بارگذاری پادصفحه که در آن ترک ها موازی وجوه باریکه بوده و با سرعت های مساوی حرکت می کنند بررسی شده است و تأثیر ضخامت باریکه، طول ترک و سرعت حرکت ترک ها بر ضرائب شدت تنش دینامیکی ارائه شده است.

۲- حل نابجایی پادصفحه ای^۶ در باریکه

در مسائل الاستودینامیک خطی معادله حرکت برای حالت پاد صفحه ای با فرض حذف نیروی حجمی در صورتیکه $w(X, Y, t)$ مولفه تغییر مکان در جهت z باشد. عبارت است از:

¹ Fourier transform

² Ferdholm

³ Yoffe

⁴ Griffith

⁵ Cohesive stress

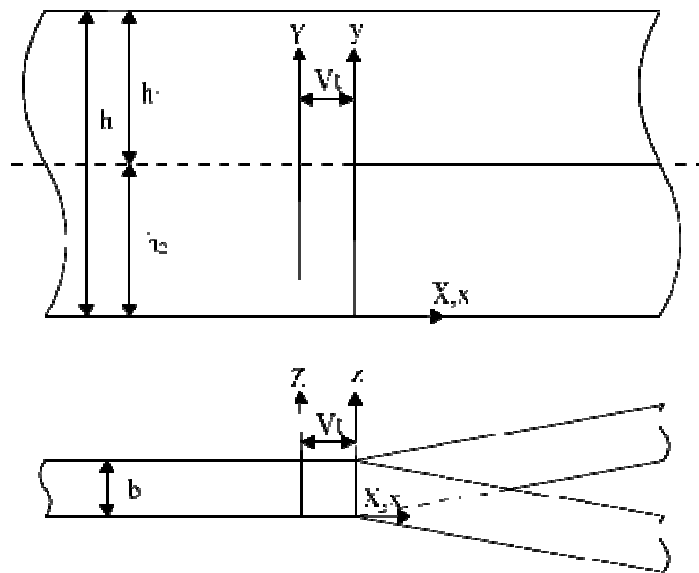
⁶ Screw dislocation

$$\mu \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

که در آن ∇^2 اپراتور لاپلاس در صفحه و μ و ρ به ترتیب مدول برشی و چگالی ماده تشکیل دهنده باریکه می باشند. معادله (۱) را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

که در آن $C = \sqrt{\mu/\rho}$ سرعت انتشار موج عرضی در ماده می باشد. مطابق شکل (۱) یک دستگاه مختصات ثابت OXY طوری انتخاب می شود که محور X ها موازی لبه های باریکه بوده و به ترتیب در فواصل h_1 و h_2 از لبه های بالایی و پایینی آن قرار داشته باشد.



شکل ۱- باریکه با طول نامحدود

دستگاه مختصات متحرک Axy طوری انتخاب می شود که رأس آن در محل جابجائی پادصفحه ای متحرک بوده و محور x بر محور نابجایی منطبق باشد. اگر نابجایی با سرعت ثابت V در جهت محور x حرکت نماید روابط زیر بیانگر ارتباط بین مختصات دو دستگاه ثابت و متحرک خواهد بود.

$$\begin{cases} X = x + Vt \\ Y = y \end{cases} \quad (3)$$

با توجه به محور مختصات جدید خواهیم داشت

$$w(X, Y, t) = w(x, y) \quad (4)$$

با جایگذاری روابط (۴) در معادله (۲) نتیجه می شود

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

که در آن $\alpha = \sqrt{1 - (V/C)^2}$ می باشد.

مولفه های تنش بر حسب مؤلفه جابجایی w با استفاده از روابط هوک بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \\ \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (۶)$$

شرایط مشخص کننده نابعی پادصفحه ای که شامل شرط ناپیوستگی مؤلفه جابجایی w بر روی خط برش یا محور نابعی و شرایط پیوستگی تنش برشی است بصورت زیر می باشد

$$\begin{aligned} w(x, 0^+) - w(x, 0^-) &= b_z H(x) \\ \sigma_{yz}(x, 0^+) &= \sigma_{yz}(x, 0^-) \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن $H(x)$ تابع پله هویساید^۱ و b_z مؤلفه در جهت z بردار برگرز^۲ نابعی است. در ضمن شرایط صفر بودن تنش در مرزهای باریکه به صورت رابطه زیر می باشد

$$\sigma_{yz}(x, h_1) = \sigma_{yz}(x, -h_2) = 0 \quad (۸)$$

برای حل معادله (۵) تبدیل فوریه تابع همواره تکه ای و مطلقاً انتگرال پذیر $f(x)$ بصورت زیر تعریف می شود.

$$f^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx \quad (۹)$$

وارون تبدیل فوریه عبارت است از

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f^*(\xi) d\xi \quad (۱۰)$$

با اعمال تبدیل فوریه به شرایط (۷) و (۸) روابط زیر بدست می آیند.

$$\begin{aligned} W^*(x, 0^+) - W^*(x, 0^-) &= b_z \left(\pi \delta(\xi) + \frac{i}{\xi} \right) \\ \sigma_{yz}^*(x, 0^+) &= \sigma_{yz}^*(x, 0^-) \\ \sigma_{yz}^*(x, h_1) &= \sigma_{yz}^*(x, -h_2) = 0 \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که در رابطه بالا $i = \sqrt{-1}$ است و بالا نویس^{*} در مفهوم تبدیل فوریه می باشد. با اعمال تبدیل (۹) به معادله (۵)، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کامل برای $W_j^*(\xi, y)$ بصورت زیر حاصل می شود:

$$\frac{d^2 W_j^*}{dy^2} - (\xi \alpha)^2 W_j^* = 0 \quad j = 1, 2 \quad (۱۲)$$

که در معادلات بالا اندیس های $j=1$ و $j=2$ به ترتیب نمایشگر نواحی $0 \leq y \leq h_1$ و $-h_2 \leq y \leq 0$ می باشند. جواب های معادلات (۱۲) عبارت اند از:

$$\begin{cases} W_1^*(\xi, y) = A_1(\xi) e^{\xi y} + B_1(\xi) e^{-\xi y} & ; 0 \leq y \leq h_1 \\ W_2^*(\xi, y) = A_2(\xi) e^{\xi y} + B_2(\xi) e^{-\xi y} & ; -h_2 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (۱۳)$$

ضرایب مجهول $A_1(\xi), A_2(\xi), B_1(\xi)$ و $B_2(\xi)$ با جایگذاری روابط (۱۳) در اولین معادله (۱۱) و جایگذاری مجدد این روابط (با رویت روابط (۶)) در دومین و سومین معادله (۱۱) بدست می آیند. بنابراین:

^۱ Heaviside step-function

^۲ Bergers vector

$$\begin{cases} W_1^*(\xi, y) = \frac{1 - e^{-2\xi h_2 \alpha}}{e^{2\xi h_1 \alpha} - e^{-2\xi h_2 \alpha}} (e^{\xi y \alpha} + e^{2\xi h_1 \alpha} e^{-\xi y \alpha}) \left(\frac{b_z}{2}\right) (\pi \delta(\xi) + \frac{i}{\xi}) & ; 0 \leq y \leq h_1 \\ W_2^*(\xi, y) = \frac{1 - e^{2\xi h_1 \alpha}}{e^{2\xi h_1 \alpha} - e^{-2\xi h_2 \alpha}} (e^{\xi y \alpha} + e^{-2\xi h_2 \alpha} e^{-\xi y \alpha}) \left(\frac{b_z}{2}\right) (\pi \delta(\xi) + \frac{i}{\xi}) & ; -h_2 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

که $\delta(\xi)$ تابع دلتای دیراک^۱ است. با اعمال وارون تبدیل فوریه به روابط (۱۴) مؤلفه های جابجائی بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{cases} w_1(x, y) = \frac{b_z}{2} \frac{h_2}{h} + \frac{ib_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{e^{2\xi h_2 \alpha} e^{\xi y \alpha} + e^{2\xi h_1 \alpha} e^{-\xi y \alpha} - e^{\xi y \alpha} - e^{2\xi h_1 \alpha} e^{-\xi y \alpha}}{\xi (e^{2\xi h_1 \alpha} - 1)} d\xi & ; 0 \leq y \leq h_1 \\ w_2(x, y) = -\frac{b_z}{2} \frac{h_1}{h} + \frac{ib_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{(e^{2\xi h_2 \alpha} e^{\xi y \alpha} - e^{2\xi h_1 \alpha} e^{\xi y \alpha} + e^{-\xi y \alpha} - e^{2\xi h_1 \alpha} e^{-\xi y \alpha})}{\xi (e^{2\xi h_1 \alpha} - 1)} d\xi & ; -h_2 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (15)$$

در روابط (۱۵) جملات ثابت بیرون انتگرال در واقع مد صلب جابجائی هستند. با جایگذاری روابط بالا در روابط (۶)، مؤلفه های تنش بصورت زیر در می آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz})_1 &= -\frac{\mu b_z}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(e^{2\xi h_2 \alpha} - 1)(e^{\xi(y-2h_1)\alpha} + e^{-\xi y \alpha})}{e^{-2\xi h_1 \alpha} - e^{2\xi h_2 \alpha}} \cos(\xi x) d\xi \\ \sigma_{yz})_1 &= -\frac{\mu b_z \alpha}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(e^{2\xi h_2 \alpha} - 1)(e^{\xi(y-2h_1)\alpha} - e^{-\xi y \alpha})}{e^{-2\xi h_1 \alpha} - e^{2\xi h_2 \alpha}} \sin(\xi x) d\xi \\ \sigma_{xz})_2 &= -\frac{\mu b_z}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-2\xi h_1 \alpha} - 1)(e^{\xi(y+2h_2)\alpha} e^{\xi y \alpha} + e^{-\xi y \alpha})}{e^{-2\xi h_1 \alpha} - e^{2\xi h_2 \alpha}} \cos(\xi x) d\xi \\ \sigma_{yz})_2 &= -\frac{\mu b_z \alpha}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-2\xi h_1 \alpha} - 1)(e^{\xi(y+2h_2)\alpha} - e^{-\xi y \alpha})}{e^{-2\xi h_1 \alpha} - e^{2\xi h_2 \alpha}} \sin(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

با استفاده از قضیه مانده ها و انتخاب کانتور مناسب برای انتگرال گیری، پاسخ انتگرال های روابط بالا بصورت زیر بدست می آیند.

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{aligned} \right\} = \frac{\mu b_z}{4(h_1 + h_2)} \left[\frac{1}{\cosh(\kappa x) - \cos(\kappa \alpha (y + (-1)^q 2h_q))} \right] \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} \sin(\kappa \alpha (y + (-1)^q 2h_q)) \\ \sinh(\kappa x) \end{aligned} \right\} \\ - \frac{1}{\cosh(\kappa x) - \cos(\kappa \alpha y)} \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} \sin(\kappa \alpha y) \\ \sinh(\kappa x) \end{aligned} \right\} \right] & -h_2 \leq y \leq h_1 \quad q = 1, 2 \end{cases} \quad (17)$$

که در آن $\kappa = \frac{\pi}{\alpha(h_1 + h_2)}$ می باشد. تکینگی تنش ها نیز از نوع کوشی بوده که در مرجع [۹] اثبات گردیده است.

^۱ Dirac delta function

۳- باریکه فاقد ترک تحت بار متحرک روی وجه بالایی آن

محور مختصات ثابت X, Y طوری انتخاب می شود که محور X بر وجه پایینی باریکه منطبق گردد. یک تنش نقطه ای پادصفحه ای τ_0 با سرعت ثابت U بر روی وجه بالایی باریکه حرکت می کند و وجه پایینی آن عاری از تنش است. در نتیجه شرایط مرزی بصورت زیر حاصل می گردد.

$$\begin{cases} \sigma_{zy}(x, h) = \tau_0 \delta(x) \\ \sigma_{zy}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

با اعمال تعویض متغیرهای $X = x + Ut$ و $Y = y$ به معادله حاکم بر حرکت که به شکل معادله (۲) می باشد معادله زیر بدست می آید.

$$\beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (19)$$

که در آن $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{U}{C}\right)^2}$ می باشد. با اعمال تبدیل فوریه (۹) به معادله بالا و حل معادله حاصل خواهیم داشت که :

$$W^*(\xi, y) = A(\xi) e^{\xi y \beta} + B(\xi) e^{-\xi y \beta} \quad (20)$$

با اعمال تبدیل فوریه به شرایط مرزی می توان ضرائب مجهول را به صورت زیر بدست آورد.

$$A(\xi) = B(\xi) = \frac{2\tau_0}{\mu \xi \beta \sinh(\xi h \beta)} \quad (21)$$

بنابراین میدان جابجائی با استفاده از وارون تبدیل فوریه (۱۰) بصورت زیر بدست می آید.

$$w(x, y) = \frac{-i \tau_0}{2 \pi \mu \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh(\xi y \beta)}{\sinh(\xi h \beta)} e^{-i \xi x} d\xi \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه بالا در روابط (۶) میدان تنش زیر بدست می آید

$$\sigma_{xz} = \frac{-\tau_0}{\pi \beta} \int_0^{+\infty} \frac{\cosh(\xi y \beta)}{\sinh(\xi h \beta)} \sin(\xi x) d\xi \quad (23)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\tau_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(\xi y \beta)}{\sinh(\xi h \beta)} \cos(\xi x) d\xi \quad (24)$$

با استفاده انتگرال گیری روی کانتور مناسب و استفاده از تئوری مانده ها انتگرال های بالا به شکل حل بسته بدست می آیند.

$$\begin{cases} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{cases} = \frac{\tau_0}{2 \alpha h [\cosh(\kappa x) + \cos(\kappa y \beta)]} \begin{cases} -\frac{1}{\beta} \sinh(\kappa x) \\ \sin(\kappa y \beta) \end{cases} \quad (25)$$

۴- باریکه تضعیف شده توسط تعدادی ترک متحرک

جواب نابجایی بدست آمده در بخش قبل را می توان برای تحلیل باریکه تضعیف شده توسط تعدادی ترک مستقیم متحرک که تحت مود سوم مکانیک شکست قرار می گیرند بکار برد. فرض می شود که باریکه توسط N ترک مستقیم تضعیف شده است. معادلات پارامتری ترک ها را می توان بصورت زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} x_i &= x_{0i} + l_i s \\ y_i &= y_{0i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad -1 \leq s \leq 1 \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن (x_{0i}, y_{0i}) مختصات وسط ترک i ام و l_i نصف طول ترک i ام می باشد. مطابق اصل باکتر مسئله باریکه تضعیف شده توسط چندین ترک متحرک را می توان به دو مسئله تفکیک نمود. در مسئله اول که در اینجا مورد نظر نیست ترک ها حذف و بردار تنش سطحی ناشی از بارگذاری خارجی روی سطوح فرضی ترک بدست می آید. در مسئله دوم منفی بردارهای تنش های سطحی بدست آمده از مسئله اول بر روی سطوح ترک ها بدون در نظر گرفتن بار خارجی اعمال می گردد. حاصل جمع میدان های تنش دو مسئله میدان تنشی را ارائه می دهد که بردار تنش سطحی در سطح ترک صفر بوده (سطوح آزاد ترک همواره عاری از تنش هستند). بنابراین در این مقاله حل مسئله دوم مورد نظر بوده و فرض می شود که بارگذاری خارجی، بارگذاری معرفی شده در بخش (۳) باشد. در اینصورت بردارهای تنش سطحی در سطوح آزاد ترک های متحرک ایجاد می گردد. که بوسیله روابط (۲۵) می توانند محاسبه گردند. در حل مسئله چندین ترک مولفه های بردار تنش سطحی با استفاده از اصل باکتر [۱۰] در روی ترک ها بدست می آیند و چگالی نابجائی در هر نقطه مجهول می باشد. بنابراین اگر توزیع نابجایی با چگالی $B_{zj} dl$ در راستای ترک در نقطه ای از ترک j ام به مختصات $(x_j(p), y_j(p))$ روی المان بینهایت کوچک dl قرار داده شود که $dl = \sqrt{[\alpha'_j(p)]^2 + [\beta'_j(p)]^2} dp = l_j dp$ است. با استفاده از اصل جمع آثار بردار تنش ایجاد شده روی سطح ترک i ام ناشی از توزیع نابجائی روی ترک ها بدست می آید که عبارتست از:

$$\sigma_{yz}(x(s), y(s)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 k_{ij}(s, p) B_{zj}(p) dp \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

محور مختصات جدید جهت تحلیل مسئله چندین ترک متحرک طوری انتخاب می گردد که محور x بر روی وجه پایینی باریکه منطبق باشد و جهت محور y در جهت محور y بکار رفته برای حل نابجائی می باشد، در این صورت کرنل معادله انتگرالی (۲۷) با استفاده از روابط (۱۷) بصورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} k_{ij}(x_i(s), y_i(s), x_j(p), y_j(p)) &= \frac{\mu b_z l_j \sinh(\kappa(x_i(s) - x_j(p)))}{4(h_1 + h_2)} \\ & \left[\frac{1}{\cosh(\kappa(x_i(s) - x_j(p))) - \cos(\kappa \alpha(y_i(s) - y_j(p)))} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\cosh(\kappa(x_i(s) - x_j(p))) - \cos(\kappa \alpha(y_i(s) + y_j(p) - 2h))} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

با توجه به اینکه در معادله (۲۸) x و y با اندیس های i و j بترتیب توابعی از s و p هستند، رفتار کرنل فوق وقتی که $j \rightarrow i$ بصورت تکین با تکینگی از نوع کوشی خواهد بود این مطلب در حالت $\alpha = 1$ در مرجع [۱۰] اثبات گردیده است. در این مرجع روابط تنش و کرنل بدست آمده برای مسئله ای کاملاً متفاوت، مشابه روابط تنش و کرنل این مقاله می باشد با این تفاوت که پارامتر α معرفی شده در این مقاله در آنجا با پارامتر G مشخص شده و بنابراین خواص تکینگی تنش ها و کرنل مشابه آن مرجع خواهد بود. در اینجا با توجه به اصل باکتر بردار تنش سطحی در سطح ترک منفی تنش σ_{yz} بدست آمده در رابطه (۲۵) در نظر گرفته می شود. باید توجه داشت که در اینصورت به جای متغیرهای x و y متغیرهای $x_i(s)$

و $y_i(s)$ جایگزین می گردد. با استفاده از تعریف تابع دانسیته نابجایی بازشدگی دهانه ترک برای ترک z ام از رابطه زیر بدست می آید.

$$w_j^-(s) - w_j^+(s) = \int_{-1}^s \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{zj}(p) dp = \int_{-1}^s l_j B_{zj}(p) dp \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

برای ترک های احاطه شده در محیط، جابجایی در خارج از لبه های ترک تک مقداری است بنابراین برای دانسیته نابجایی باید شرایط زیر برقرار باشد.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{[x'_j(p)]^2 + [y'_j(p)]^2} B_{zj}(p) dp = l_j \int_{-1}^1 B_{zj}(p) dp = 0 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

دانسیته نابجایی با حل همزمان معادلات انتگرالی (۲۷) و (۲۹) بدست می آید. بعلت تکینگی تنش در نوک ترکها تابعیت دانسیته نابجایی بصورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$B_{zj}(p) = \frac{g_{zj}(p)}{\sqrt{1-p^2}} \quad -1 \leq p \leq 1 \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

حل عددی معادلات انتگرالی با تکینگی کوشی اولین بار توسط Erdogan و همکاران [۱۱] ارائه گردید. در این روش معادلات انتگرالی در نقاط خاصی که توسط ریشه های چندجمله ای چبیشف^۱ و نظائر آن تعیین می شود گسسته شده و به دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می شود با حل این سیستم معادلات جبری دانسیته نابجایی در نقاطی که در آنها معادلات گسسته شده اند بدست می آید. با قراردادن رابطه (۳۱) در روابط (۲۷) و (۲۹) سیستم معادلات جبری خطی زیر حاصل می شوند [۱۲]

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{z1}(p_n) \\ g_{z2}(p_n) \\ \vdots \\ g_{zN}(p_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(s_r) \\ q_2(s_r) \\ \vdots \\ q_N(s_r) \end{bmatrix} \quad (32)$$

که در آن نقاطی که در آن معادلات انتگرالی گسسته شده اند عبارتند از:

$$\begin{cases} s_r = \cos\left(\frac{\pi r}{m}\right) & r = 1, 2, \dots, m-1 \\ p_n = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2m}\right) & n = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (33)$$

و درآیه های ماتریس و بردارها در رابطه (۳۲) عبارتند از:

$$A_{ij} = \frac{\pi}{m} \begin{bmatrix} k_{ij}(s_1, p_1) & k_{ij}(s_1, p_2) & \dots & k_{ij}(s_1, p_m) \\ k_{ij}(s_2, p_1) & k_{ij}(s_2, p_2) & \dots & k_{ij}(s_2, p_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ij}(s_{m-1}, p_1) & k_{ij}(s_{m-1}, p_2) & \dots & k_{ij}(s_{m-1}, p_m) \\ \delta_{ij} l_i & \delta_{ij} l_i & \dots & \delta_{ij} l_i \end{bmatrix}$$

$$g_{zj}(p_n) = [g_{zj}(p_1) \quad g_{zj}(p_2) \quad \dots \quad g_{zj}(p_m)]^T$$

$$q_j(s_r) = [\sigma_n(x_j(s_1), y_j(s_1)) \quad \sigma_n(x_j(s_2), y_j(s_2)) \dots \quad \sigma_n(x_j(s_{m-1}), y_j(s_{m-1})) \quad 0]^T \quad (34)$$

^۱Chebyshev polynomials

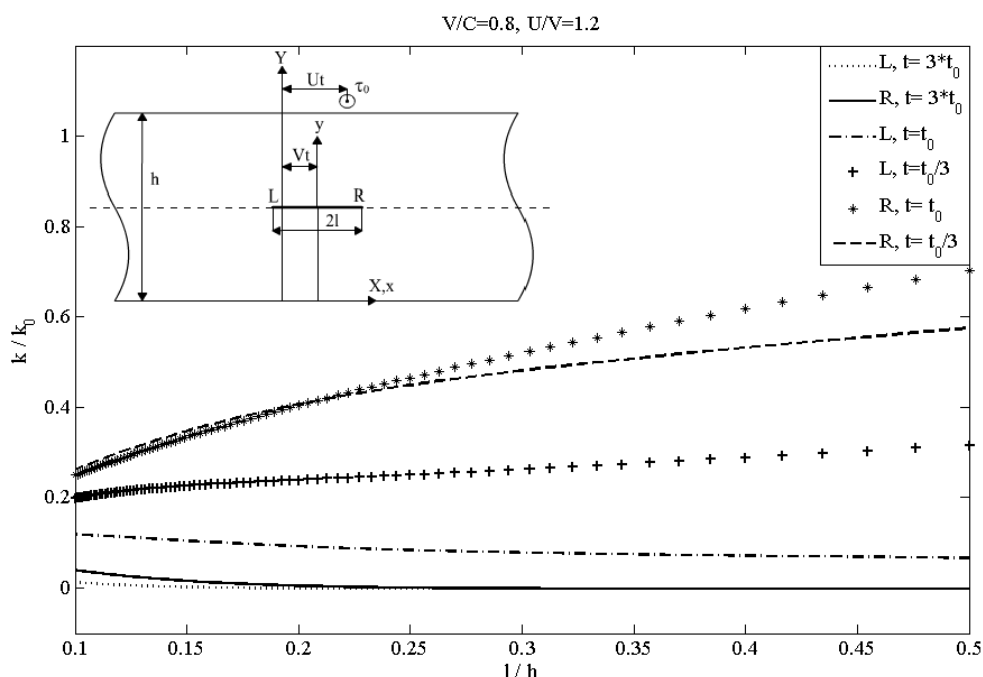
که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر می باشد و T در مفهوم ترانهاده بردار می باشد. پارامتر مهمی که در مکانیک شکست مورد استفاده قرار می گیرد ضرائب شدت تنش در نوک ترکها می باشد. ضریب شدت تنش برای ترک i ام بر حسب بازشدگی دهانه ترک بصورت زیر تعریف می شود.

پس از محاسبه دانسیته نابجایی بر روی ترک های احاطه شده در محیط بایستی روابطی ارائه نمود که به کمک آنها بتوان ضرایب شدت تنش را در نوک ترکها بر حسب دانسیته نابجایی محاسبه نمود. در نهایت ضرایب شدت تنش برای ترک i ام بصورت زیر بدست می آیند [۱۲].

$$\begin{cases} k_{mLi} = \frac{\mu}{2} ([x'_i(-1)]^2 + [y'_i(-1)]^2)^{\frac{1}{4}} g_i(-1) = \frac{1}{2} \mu l_i^{1/2} g_i(-1) \\ k_{mRi} = -\frac{\mu}{2} ([x'_i(1)]^2 + [y'_i(1)]^2)^{\frac{1}{4}} g_i(1) = -\frac{1}{2} \mu l_i^{1/2} g_i(1) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

۵- نتایج و مثالهای عددی

برای نشان دادن کارائی روش بکار رفته در این مقاله و نشان دادن تأثیر متقابل چندین ترک متحرک در باریکه مقاله به چندین مثال عددی مزین شده است. لازم به یادآوری است که در مثال های حل شده V بیانگر سرعت ترک و U سرعت بار متحرک اعمالی است. به عنوان اولین مثال یک ترک متحرک به طول $2l$ که به ترتیب در فاصله $h_1 = h/2$ و $h_2 = h/2$ از وجوه بالائی و پایینی باریکه قرار داشته و موازی وجوه باریکه می باشد در نظر گرفته می شود. ترک با سرعت $V = \frac{5}{6}U$ حرکت می کند. در این صورت سرعت نسبی حرکت بار نسبت به مرکز ترک برابر $U - V = 0.2V$ خواهد بود. در زمان $t = 0$ بار در مرکز ترک متحرک است. پس از طی زمان $t_0 = \frac{l}{U - V}$ بار به نوک سمت راست ترک می رسد. در اینصورت نتایج ضرائب شدت تنش نوک ترک ها برای $t \ll t_0$ و $t = t_0$ و $t \gg t_0$ متفاوت خواهد بود. مقایر ضرائب شدت تنش بی بعد $\frac{k}{k_0}$ برای دو نوک ترک بر حسب طول بی بعد ترک $\frac{l}{h}$ برای $\frac{V}{C} = 0.8$ و زمان های $t = \frac{t_0}{3}$ و $t = t_0$ و $t = 3t_0$ در شکل (۲) ترسیم شده است. که در آن $k_0 = \tau_0 \sqrt{l}$ می باشد. برای $t = 3t_0$ چون بار از هر دو نوک ترک دور می شود ضرائب شدت تنش کاهش می یابد. بر $t = t_0$ بار روی نوک سمت راست قرار دارد بر این نوک بیشترین تغییرات و افزایش ضریب شدت تنش را داریم ولی نوک سمت چپ از بار دور می باشد و مقادیر ضریب شدت تنش کمتر است. برای $t = \frac{t_0}{3}$ بار قبل از نوک سمت راست قرار دارد ولی در مقایسه با نوک سمت چپ به نوک سمت راست نزدیک تر است بنابراین ضریب شدت تنش نوک سمت راست از چپ کمتر است. نکته مهم این است که ضریب شدت تنش نوک سمت راست برای $t = \frac{t_0}{3}$ در مقایسه با $t = t_0$ کوچکتر است. چرا که در $t = t_0$ بار نوک سمت راست در مقایسه با $t = \frac{t_0}{3}$ نزدیکتر است.

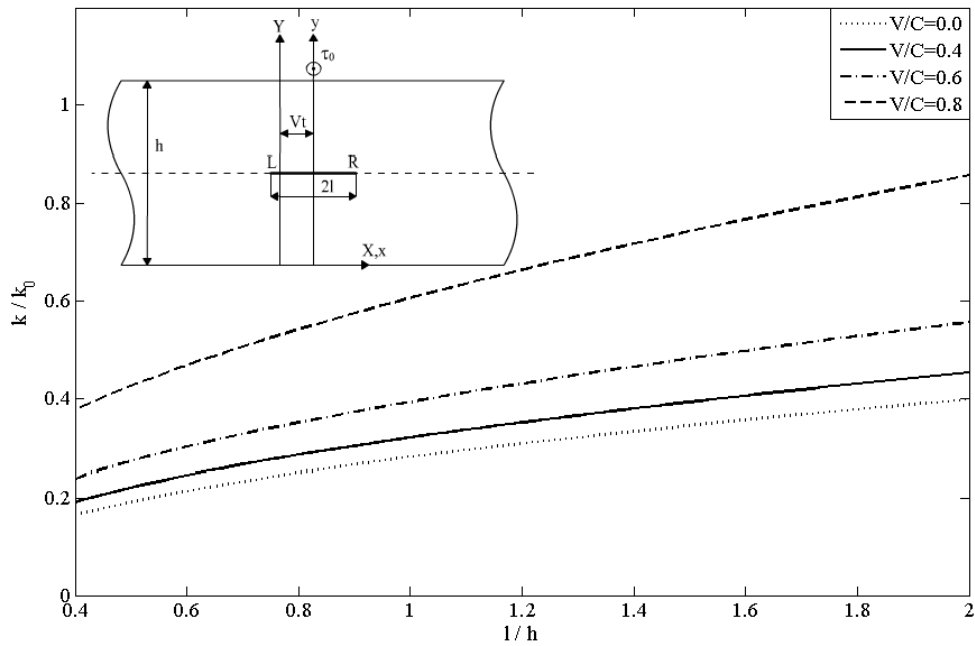


شکل ۲- تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد دو نوک ترک $\frac{V}{C} = 0.8$

بر حسب طول بی بعد ترک و برای و مقادیر مختلف t

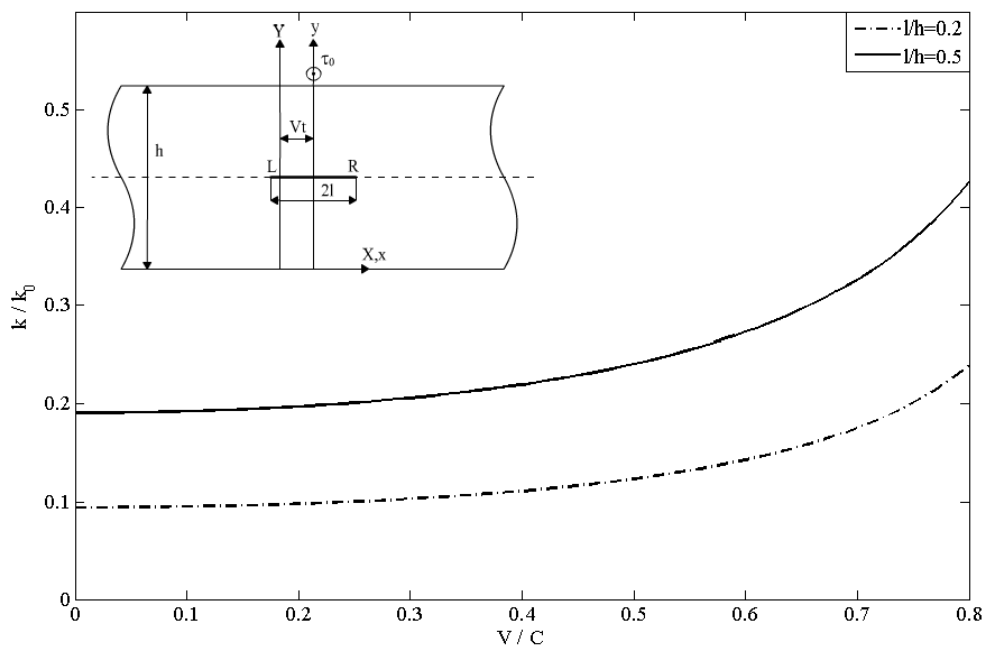
در ادامه برای سادگی و ایجاد تقارن در بارگذاری نسبت به ترک $U=V$ فرض شده است و بار نقطه ای همواره در مرکز ترک متحرک قرار دارد. مقادیر ضرائب شدت تنش بی بعد $\frac{k}{k_0}$ بر حسب طول بی بعد ترک $\frac{l}{h}$ برای مقادیر مختلف سرعت بی بعد ترک $\frac{V}{C}$ در شکل (۳) ترسیم شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش طول ترک و سرعت حرکت ترک ضرائب شدت تنش افزایش می یابد. افزایش ضرائب شدت تنش با افزایش طول ترک ها برای ترک های ساکن یک رفتار شناخته شده می باشد که چنین رفتاری برای ترک ها متحرک نیز مشاهده می شود.

در شکل (۴) تغییرات ضرائب شدت تنش دو نوک ترک متحرک ذکر شده بر حسب سرعت بی بعد $\frac{V}{C}$ برای ضخامت های مختلف بی بعد شده باریکه ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش سرعت حرکت ترک این ضرائب افزایش می یابند. در ضمن برای باریکه پهن تر بدلیل دوری مرزها از سطوح ترک ضرائب شدت تنش کوچکتری در مقایسه با باریکه نازکتر حاصل می گردد. دلیل این ویژگی را می توان چنین توجیه کرد که تنش سطحی که با توجه به اصل باکنر بر روی سطح ترک در نظر گرفته شده در فاصله کمتری از وجوه باریکه که عاری از تنش هستند قرار داشته یعنی تنش سطحی در فاصله کمتری از τ_0 به صفر میل نموده است و به عبارت دیگر تغییرات تنش شدیدتر از باریکه پهن است و لذا ضرائب شدت تنش بزرگتری را ایجاد نموده است.



شکل ۳- تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد بر حسب طول بی بعد ترک

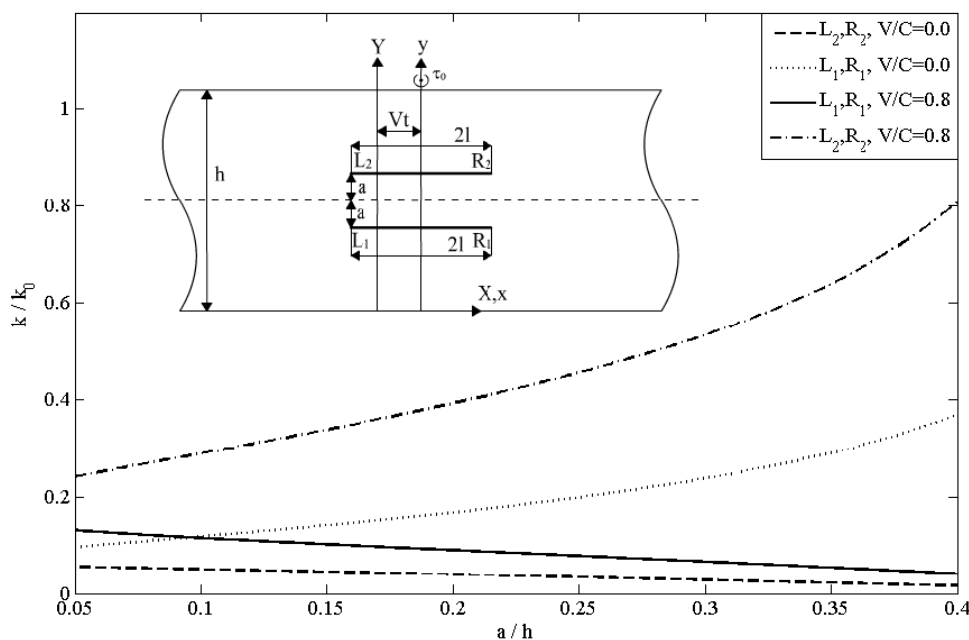
برای مقادیر مختلف سرعت بی بعد ترک $\frac{V}{C}$



شکل ۴- تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد بر حسب سرعت

بی بعد حرکت ترک برای پهناهای بی بعد متفاوت باریکه

جهت نشان دادن تأثیر متقابل چندین ترک متحرک در باریکه دو ترک هم طول موازی که با سرعت های مساوی V و در فواصل مساوی a از میانتار باریکه قرار دارند و $l=0.2h$ در نظر گرفته می شود. شکل (۵) نمودار تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد $\frac{k}{k_0}$ برای دو نوک ترک ها و برای مقادیر $\frac{V}{C}=0.8$ و $\frac{V}{C}=0$ در این شکل نمایش داده شده است.

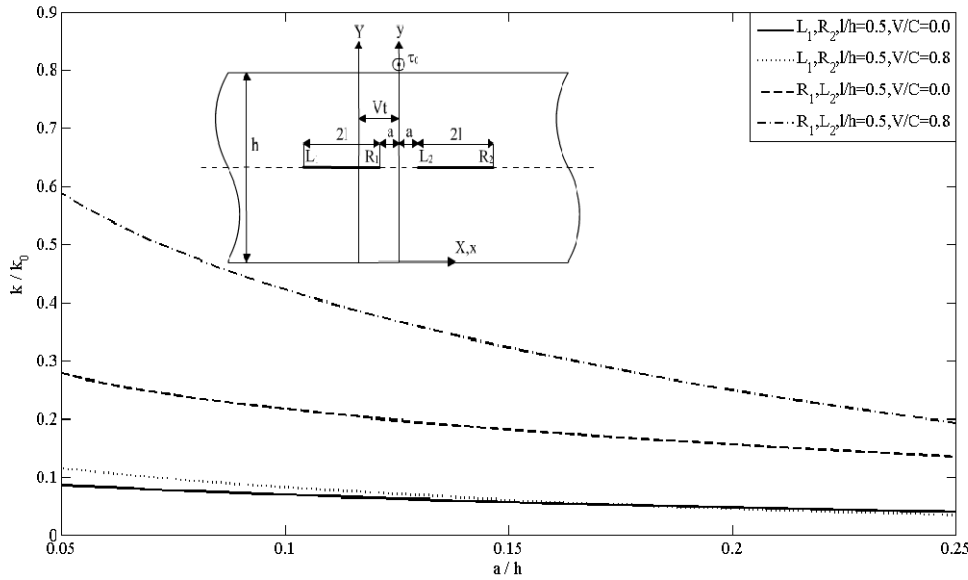


شکل ۵- تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد بر حسب نسبت بی بعد $\frac{a}{h}$

برای دو ترک موازی هم طول با $\frac{l}{h}=0.2$

با افزایش a ترک بالائی (ترک دوم) به بار نزدیک تر می شود و ترک پایینی (ترک اول) نیز به لبه پایینی با سطح آزاد عاری از تنش نزدیک می شود. بنابراین با افزایش a ضرائب شدت تنش دو نوک ترک بالائی افزایش و برعکس ضرائب شدت تنش دو نوک ترک پایینی کاهش می یابد. در ضمن برای $\frac{V}{C}=0.8$ مقادیر ضرائب شدت تنش نسبت به $\frac{V}{C}=0$ بزرگتر می باشد.

در شکل (۶) نمودار تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد برای دو ترک هم طول ($l=0.5h$) و همراستا که هر دو در میانتار باریکه قرار دارند بر حسب $\frac{a}{h}$ مشاهده می شود. که در آن a فاصله دو نوک مجاور دو ترک می باشد.



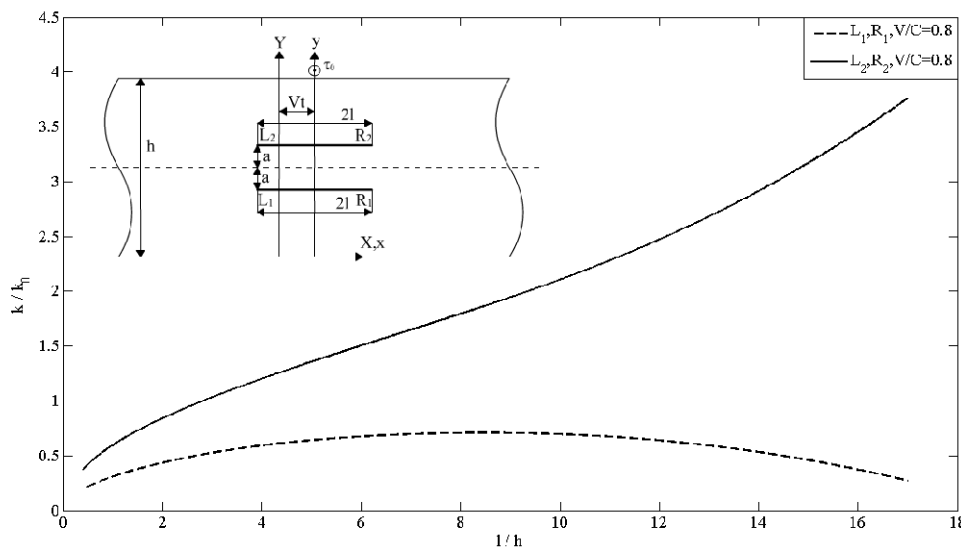
شکل ۶- تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد بر حسب نسبت بی بعد $\frac{a}{h}$

$$\frac{l}{h} = 0.5 \text{ برای دو ترک همراستای هم طول با } \frac{l}{h} = 0.5$$

همانطور که مشاهده می شود با افزایش a دو ترک از هم دور می شوند و تأثیر متقابل آنها بر هم دیگر کمتر شده و ضرائب شدت تنش بی بعد دو نوک مجاور و دو نوک غیر مجاور کاهش می یابند. نکته دیگری که در مورد کاهش ضرائب شدت تنش می توان گفت دوری نوک های ترک ها از بار با افزایش a نیز عامل دیگری در کاهش ضرائب شدت تنش نوک ها ترک ها باشد. مشابه مثال قبل مقادیر ضرائب شدت تنش بی بعد برای $\frac{V}{C} = 0.8$ بیشتر از $\frac{V}{C} = 0$ است.

بعنوان آخرین مثال دو ترک هم طول و موازی که در فواصل مساوی a از میانتر باریکه قرار دارند را در نظر گرفته می شود. نمودار تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد بر حسب طول بی بعد ترک $\frac{l}{h}$ در شکل (۷) مشاهده می شود.

با افزایش طول ترک ضرائب شدت تنش نوک های ترک ها افزایش می یابد. چنین رفتاری برای ترک بالائی (ترک دوم) همواره وجود دارد و ترک پایینی (ترک اول) با افزایش طول ترک از محل بار نقطه ای دور می شوند و انتظار می رود که دو اثر مختلف مقادیر ضرائب شدت تنش بی بعد در نوک ترک ها را تحت تأثیر قرار دهند. نخست افزایش طول ترک که سبب افزایش این ضرائب می شود و سپس دوری از بار سبب کاهش ضرائب شدت تنش بی بعد می گردد. برای مقادیر $\frac{l}{h}$ کوچکتر از 10 اثر افزایش طول غالب بوده و برای $\frac{l}{h}$ بزرگتر از 10 اثر دوری از بار غالب می باشد. لذا مقادیر ضرائب شدت تنش بی بعد برای ترک پایینی (ترک اول) تا $\frac{l}{h} \approx 10$ افزایش و بعد از آن مقداری کاهش پیدا می کنند.



شکل ۷- تغییرات ضرائب شدت تنش بی بعد بر حسب طول بی بعد $\frac{l}{h}$

برای دو ترک موازی هم طول با $\frac{a}{h} = 0.05$

۶- نتیجه گیری

با توجه به مثال های حل شده نتایج زیر بدست می آیند:

۱. ضرائب شدت تنش بی بعد نوک ترک با افزایش سرعت بی بعد $\frac{V}{C}$ افزایش می یابند.
۲. ضرائب شدت تنش بی بعد نوک ترک تحت تأثیر افزایش طول و دوری از محل بار می باشد، بطوریکه افزایش طول ترک این ضرائب را افزایش و دوری از بار آنها را کاهش می دهد.
۳. ضرائب شدت تنش برای نوک های مجاور نزدیک شونده دو ترک بدلیل تأثیر متقابل آنها بر یکدیگر افزایش می یابند.

مراجع

- [1] Meguid, S. A., Wang, X. D., and Jiang, L. Y., "On the Dynamic Propagation of a Finite Crack in Functionally Graded Materials", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 69, pp. 1753-1768, (2002).
- [2] Li, X. F., "Griffith Crack Moving in a Piezoelectric", Archive of Applied Mechanics, Vol. 72, pp. 745-758, (2003).
- [3] Kwon, S. M., "On the Dynamic Propagation of an Anti-plane Shear Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip", Acta Mechanica, Vol. 167, pp. 1-2, (2003).
- [4] Bi, X. S., Cheng, J., and Chen, X. L., "Moving Crack for Functionally Graded Material in an Infinite Length Strip under Antiplane Shear", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 39, pp. 89-97, (2003).

- [5] Ma, L., Wu, L. Z., and Guo, L. C., "On the Moving Griffith Crack in a Nonhomogeneous Orthotropic Strip", *International Journal of Fracture*, Vol. 136, pp. 187-205, (2005).
- [6] Barenblatt, G. I., "*The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture*", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, Academic Press, pp. 55-129, (1962).
- [7] Dugdale, D. S., "Yeilding in Steel Sheets Containing Slits", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, pp. 100-104, (1960).
- [8] Freund, L. B., "*Dynamic Fracture Mechanics*", University Press, Cambridge, (1998).
- [9] Faal, R. T., Fariborz, S. J., and Daghyani, H. R., "Antiplane Deformation of Orthotropic Strips with Multiple Defects", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 1, No. 7, (2006).
- [10] Korsunsky, A. M., and Hills, D. A., "The Solution of Crack Problems by using Distributed Strain Nuclei", Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 210, No.1, pp. 23-31, (1996).
- [11] Erdogan, F., Gupta, G. D. , and Cook, T. S., "Numerical Solution of Singular Integral Equations, *Method of Analysis and Solution of Crack Problems*" , Edited by G. C. Sih, Noordhoof, Leyden, Holland, (1973).
- [12] Faal, R. T., Fotuhi, A. R., Fariborz, S. J., and Daghyani, H. R., "Antiplane Stress Analysis of an Isotropic Weedge with Multiple Creak", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 4535-4550, (2004).

فهرست نمادهای انگلیسی

تابع محدود و پیوسته	$g_{zj}(p)$
تعداد نقاط روی ترک	m
محل اعمال نابجائی	p
محل بررسی تنش	s
نصف طول ترک i ام	l_i
مختصات وسط ترک i ام	x_{0i}, y_{0i}
ضخامت باریکه	h
فاصله مرکز ترک تا وجه بالایی باریکه	h_1
فاصله مرکز ترک تا وجه پایینی باریکه	h_2
مختصات متحرک	x, y
مختصات ثابت	X, Y
بردار برگرز	b_z

تابع دانسیته نابجائی بر حسب متغیر بی بعد	$B_{zj}(p)$
ضرایب شدت تنش نوکهای سمت راست و چپ ترک	k_{III_L}, k_{III_R}
کرنل معادله انتگرالی	$k_{ij}(s, p)$
نصف طول ترک	l
تعداد ترک در باریکه	N
زمان	t
جابجائی درون صفحه ای در جهت محور z	w
تبدیل فوریه مولفه تغییر مکان عمود بر صفحه	W^*
معادلات پارامتری ترک	$x_i(s), y_i(s)$
سرعت حرکت ترک در ماده	V
سرعت موج در ماده	C
تابع پله	$H(x)$

نمادهای یونانی

بردار تنش سطحی ثابت	τ_∞
تابع دلتای دیراک	$\delta(\xi)$
ثابت لامه	μ
چگالی جرمی ماده	ρ
متغیر تبدیل فوریه تابع f	ξ
بردار تنش پادصفحه ای روی سطح ترک i ام	$\sigma_{yz}(x_i(s), y_i(s))$
مولفه های تنش	σ_{xz}, σ_{yz}

Abstract

The distributed dislocation technique is used to carry out stress analysis in a strip containing parallel moving cracks under anti-plane loading. The solution of a moving screw dislocation is obtained in a strip by means of Fourier transform method. The stress components reveal the familiar Cauchy singularity at the location of dislocation. The solution is employed to derive integral equations for a strip weakened by moving cracks. Numerical solution of the integral equations leads to dynamic stress intensity factor at the moving crack tips, several examples are solved.